2019年11月26日　物理学概論I 演習問題 (解答)　海洋環境科学科

授業中に解説する例題や次週提出の課題についての板書時間を削減するために配布しています。授業中に指定された問題をレポート用紙にまとめ提出してください。(このプリントは提出不要)

1. 一様な重力と速度に比例した空気の抵抗力を受けて点 O から速さ v_0 で鉛直上向きに投げ上げられた質量 m の質点の運動を考える。質点には重力 mg と運動方向とは逆向きに抵抗力 $-mkv$ がかかっている。点 O を原点とし、鉛直上向きを y 軸の正の向きとする。

(1) 鉛直方向について運動方程式をたてよ。

速度を v とすると、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - mkv \tag{1}$$

次の書き方でも正しいが、このあとの計算のために速度 v を使って左辺を表しておくと都合がよい

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y}{dt^2} &= -mg - mkv \\ ma &= -mg - mkv \end{aligned}$$

(2) この運動の時刻 $t = 0$ での運動状態を列挙せよ (初期条件を列挙せよ)。

時刻 $t = 0$ での位置と速度は、

$$y = 0 \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \tag{3}$$

(3) 運動方程式を積分することで、ある時刻 t における速度 dy/dt をもとめよ。

運動方程式 (1) を変形して

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g - kv \\ &= -k(v + g/k) \\ \frac{1}{(v + g/k)}\frac{dv}{dt} &= -k \end{aligned}$$

両辺を積分して時刻 t での速度 v を求めると

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(v+g/k)}dv &= -\int kdt \\
\log(v+g/k) &= -kt + C_1 \\
v + g/k &= e^{-kt+C_1} \\
v &= e^{-kt+C_1} - g/k \\
v(t) &= e^{C_1}e^{-kt} - g/k
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで C_1 は積分定数

式 (4) は時刻 $t=0$ でも成り立つので、$t=0$ と (3) 式を代入して

$$\begin{aligned}
v_0 &= e^{C_1} - g/k \\
e^{C_1} &= v_0 + g/k
\end{aligned}$$

これを (4) 式に代入して、ある時刻での速度は

$$\frac{dy}{dt} = v(t) = (v_0 + g/k)e^{-kt} - g/k \tag{5}$$

(4) ある時刻 t における速度 dy/dt を時間で積分することで、ある時刻 t における位置 y をもとめよ。

ある時刻での速度 (5) を変形して積分する

$$\begin{aligned}
\int dy &= \int \left[(v_0+g/k)e^{-kt} - g/k\right] dt \\
y &= -\frac{v_0+g/k}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}t + C_2
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで C_2 は積分定数

式 (6) は時刻 $t=0$ でも成り立つので、$t=0$ と式 (2) を代入して

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{v_0+g/k}{k} + C_2 \\
C_2 &= \frac{v_0+g/k}{k}
\end{aligned}$$

したがってある時刻 t における位置は

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{v_0+g/k}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}t + \frac{v_0+g/k}{k} \\
&= \frac{v_0+g/k}{k}(1-e^{-kt}) - \frac{g}{k}t
\end{aligned} \tag{7}$$

(5) 十分に時間が経ったときの速度を求めよ ($t \to \infty$ の極限を考える)

(5) 式から、$t \to \infty$ の極限を考えると、$e^{-kt} = \frac{1}{e^{kt}} \to 0$ なので

$$v \to \frac{g}{k}$$

(6) 最高点の高さを H とする。最高点では速度 $dy/dt = 0$ となることを利用して、最高点の高さ H を求めよ。

最高点では速度が 0、つまり $v = 0$ なので (5) 式から最高点に達する時刻 t_0 を求める。

$$\begin{aligned}
&(v_0 + g/k)e^{-kt_0} - g/k = 0 \\
&(v_0 + g/k)e^{-kt_0} = g/k \\
&e^{-kt_0} = \frac{g}{k(v_0 + g/k)} && (8) \\
&-kt_0 = \log\left[\frac{g}{k(v_0 + g/k)}\right] \\
&t_0 = -\frac{1}{k}\log\left[\frac{g}{k(v_0 + g/k)}\right] \\
&t_0 = \frac{1}{k}\log\left[\frac{k(v_0 + g/k)}{g}\right] \\
&t_0 = \frac{1}{k}\log\left(kv_0/g + 1\right) && (9)
\end{aligned}$$

(7) 式に時刻 (8), (9) を代入して

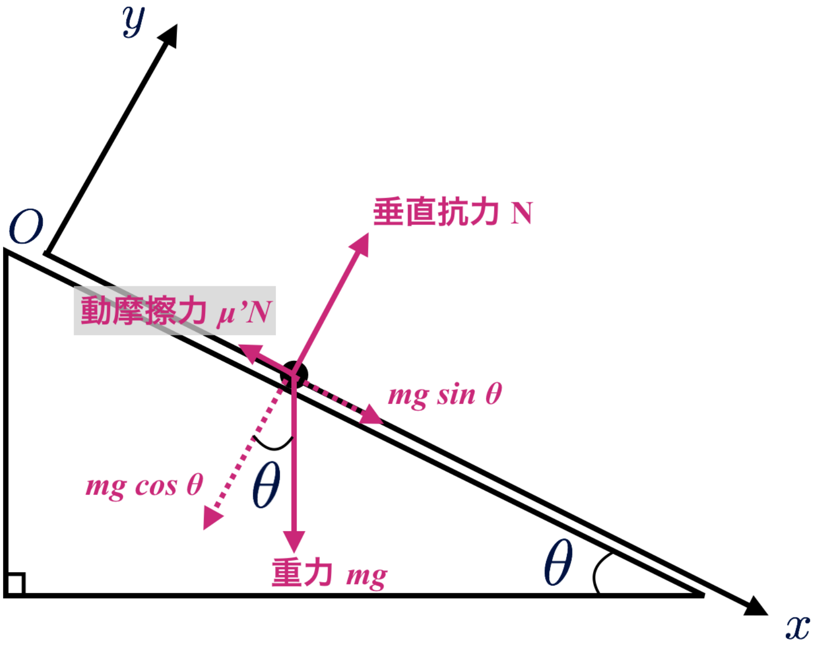
$$\begin{aligned}
H &= \frac{v_0 + g/k}{k}\left[1 - \frac{g}{k(v_0 + g/k)}\right] + \frac{g}{k}\frac{1}{k}\log\left(kv_0/g + 1\right) \\
&= \frac{v_0 + g/k}{k}\left[\frac{k(v_0 + g/k) - g}{k(v_0 + g/k)}\right] + \frac{g}{k^2}\log\left(kv_0/g + 1\right) \\
&= \frac{v_0 + g/k}{k}\frac{kv_0}{k(v_0 + g/k)} + \frac{g}{k^2}\log\left(kv_0/g + 1\right) \\
&= \frac{v_0}{k} + \frac{g}{k^2}\log\left(kv_0/g + 1\right)
\end{aligned}$$

[1]

2. 水平方向と θ の一定角をなす斜面を持つ台が地面に固定されている。一様な重力の下、この斜面上の点 O に置かれた質量 m の質点が斜面からの摩擦力を受けながら静止状態 (初速度=0) から斜面を滑り落ちていく。点 O を原点

[1]小問 (6) はとても計算が大変で簡単に間違えるのでテストに出すことはないと思います

とし、斜面方向下向きに x 軸、斜面と垂直な方向上向きに y 軸をとる。ただし、この質点と斜面との間の動摩擦係数を μ' とする。



(1) 質点にかかる力を図示せよ。

かかっている力は重力 mg、垂直抗力 N、動摩擦力 $\mu' N$。向きは図を参照

(2) x 軸方向, y 軸方向について運動方程式をたてよ。

かかっている力を x, y 軸方向に沿うように分解する (図を参照)。x, y 軸に沿った運動方程式はそれぞれ

$$x \text{ 方向} : m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta - \mu' N \tag{10}$$

$$y \text{ 方向} : m\frac{d^2y}{dt^2} = N - mg\cos\theta \tag{11}$$

(3) この運動の時刻 $t = 0$ での運動状態を列挙せよ (初期条件を列挙せよ)。

時刻 $t = 0$ での位置は

$$x = 0, \tag{12}$$

$$y = 0$$

そっと動き出したので初速度は 0 なので

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad (13)$$
$$\frac{dy}{dt} = 0$$

(4) 運動方程式を積分することで、ある時刻 t における速度をもとめよ。

y 軸方向には質点は運動しない (位置 y が変化しない) ので、常に $y = 0$ つまり、(11) の運動方程式は力のつりあいを表しており、

$$0 = N - mg\cos\theta$$
$$N = mg\cos\theta$$

のように垂直抗力 N が求まる。これを (10) に代入して

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\theta - \mu' g\cos\theta$$

これを積分すると、

$$\frac{dx}{dt} = (g\sin\theta - \mu' g\cos\theta)t + C_1$$

ここで C_1 は積分定数。この式は $t = 0$ でも成り立つので、(13) を代入すると

$$0 = (g\sin\theta - \mu' g\cos\theta)t + C_1$$
$$C_1 = 0$$

したがってある時刻 t での速度は

$$\frac{dx}{dt} = (g\sin\theta - \mu' g\cos\theta)t \qquad (14)$$

(5) ある時刻 t における速度を時間で積分することで、ある時刻 t における位置をもとめよ。

(16) を時間で積分すると

$$x = \frac{1}{2}(g\sin\theta - \mu' g\cos\theta)t^2 + C_2$$

この式は $t=0$ でも成り立つので、(12) を代入すると

$$C_2 = 0$$

となることがわかる。したがってある時刻 t での位置は

$$x = \frac{1}{2}(g\sin\theta - \mu' g\cos\theta)t^2$$

3. 一様な重力と速度に比例した空気の抵抗力を受けて、点 O から水平方向と θ の角をなす方向に速さ v_0 で斜方投射された質量 m の質点の運動を決定せよ。質点には重力 mg と運動方向とは逆向きに抵抗力 $-mkv$ がかかっている。点 O を原点とし、投げ出した方角の水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸を取り、運動は x-y 平面内で起こるとする。[2]

   (1) 水平方向と鉛直方向それぞれについて運動方程式をたてよ。
   かかっている力は重力 mg と抵抗力 mkv(向きは図を参照)。[3] x, y 軸方向の速度をそれぞれ v_x, v_y として、図のように抵抗力を力の分解する。[4] x, y 軸に沿った運動方程式はそれぞれ[5]

$$x\text{ 方向}: m\frac{dv_x}{dt} = -mkv_x \tag{15}$$

$$y\text{ 方向}: m\frac{dv_y}{dt} = -mg - mkv_y \tag{16}$$

   (2) この運動の時刻 $t=0$ での運動状態を列挙せよ (初期条件を列挙せよ)。
   時刻 $t=0$ での位置は

$$x = 0 \tag{17}$$

$$y = 0 \tag{18}$$

   時刻 $t=0$ での速度は

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\theta \tag{19}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\sin\theta \tag{20}$$

---

[2] 11/19 の授業で取り扱った問題に空気の抵抗力が入った版, 参考書 p.50 にも似た問題があるが x, y 軸のとり方が異なるので注意

[3] 抵抗力の向きと大きさは質点の運動によって時間変化する。抵抗力 $mkv(t)$ のように時間の関数になっていることに注意

[4] よく見かけた間違いとして、x 軸方向の速度 v_x と y 軸方向の速度 v_y を使わずに時刻 $t=0$ での速度 $v_0\cos\theta$ と $v_0\sin\theta$ を抵抗力を表すのに使っている人がいたが、それらは時刻 $t=0$ での速度なので間違い。)

[5] 左辺は位置 x, y で表すこともできるが、速度にしておくと積分するときに便利

(3) 運動方程式を積分することで、ある時刻 t における速度 $dx/dt, dy/dt$ をもとめよ。

まずは x 軸方向の速度を求める。(15) 式を変形して、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt} &= -k \\
\int \frac{1}{v_x}dv_x &= -\int kdt \\
\log v_x &= -kt + C_1 \\
v_x &= e_1^C e^{-kt} \qquad (21)
\end{aligned}$$

ここで C_1 は積分定数。この式は時刻 $t = 0$ でも成り立つので、(19) を代入して

$$e^{C_1} = v_0 \cos\theta$$

これを (21) 式に代入して

$$v_x = v_0 \cos\theta e^{-kt} \qquad (22)$$

次に、y 軸方向の速度を求める。(16) 式を変形して、

$$\begin{aligned}
\frac{dv_y}{dt} &= -g - kv_y \\
\frac{dv_y}{dt} &= -k(v_y + g/k) \\
\frac{1}{(v_y + g/k)}\frac{dv_y}{dt} &= -k \\
\int \frac{1}{(v_y + g/k)}dv_y &= -\int kdt \\
\log(v_y + g/k) &= -kt + C_2 \\
v_y &= e^{C_2}e^{-kt} - g/k \qquad (23)
\end{aligned}$$

ここで C_2 は積分定数。この式は時刻 $t = 0$ でも成り立つので、(20) を代入して

$$e^{C_2} = v_0 \sin\theta + g/k$$

これを (23) に代入して

$$v_y = (v_0 \sin\theta + g/k)e^{-kt} - g/k \qquad (24)$$

(4) ある時刻 t における速度 $dx/dt, dy/dt$ を積分することである時刻 t における位置 x, y を求めよ

まず x 軸方向の位置を求める。(22) を変形して積分する

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta e^{-kt}$$
$$\int dx = \int v_0 \cos\theta e^{-kt} dt$$
$$x = -\frac{v_0}{k}\cos\theta e^{-kt} + C_3 \tag{25}$$

ここで C_3 は積分定数。この式は時刻 $t = 0$ でも成り立つので、(17) を代入して

$$0 = -\frac{v_0}{k}\cos\theta + C_3$$
$$C_3 = \frac{v_0}{k}\cos\theta$$

これを (25) に代入して

$$x = -\frac{v_0}{k}\cos\theta e^{-kt} + \frac{v_0}{k}\cos\theta \tag{26}$$
$$= \frac{v_0\cos\theta}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \tag{27}$$

次に x 軸方向の位置を求める。(24) を変形して積分する

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (v_0 \sin\theta + g/k)e^{-kt} - g/k$$
$$\int dy = \int \left[(v_0 \sin\theta + g/k)e^{-kt} - g/k\right] dt$$
$$y = -\frac{v_0 \sin\theta + g/k}{k} e^{-kt} - \frac{gt}{k} + C_4 \tag{28}$$

ここで C_4 は積分定数。この式は時刻 $t = 0$ でも成り立つので、(18) を代入して

$$C_4 = \frac{v_0 \sin\theta + g/k}{k} \tag{29}$$

これを (28) に代入して

$$y = -\frac{v_0 \sin\theta + g/k}{k} e^{-kt} - \frac{gt}{k} + \frac{v_0 \sin\theta + g/k}{k}$$
$$= \frac{v_0 \sin\theta + g/k}{k}(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}$$

(5) 十分に時間が経ったときの x 軸方向, y 軸方向の速度を求めよ ($t \to \infty$ の極限を考える)

$t \to \infty$ の極限を考えると、$e^{-kt} = \frac{1}{e^{kt}} \to 0$ なので (22) 式から x 軸方向の速度は

$$v_0 \to 0 \tag{30}$$

また、(24) 式から y 軸方向の速度は

$$v_0 \to -g/k \tag{31}$$