

物理学科選択科目「物理実験学」
講義補足資料

奥村 暁

名古屋大学 宇宙地球環境研究所
名古屋大学 素粒子宇宙起源研究所

2026年1月25日

目次

第 1 章	はじめに	1
第 2 章	測定と誤差	3
2.1	物理量と次元	3
2.2	誤差と不確かさ	4
2.3	有効数字	5
2.4	精度と確度	6
2.5	ノギス	6
2.6	アナログテスター	6
2.7	誤差の種類	7
2.8	期待値と分散	9
2.9	標本と母集団	11
2.10	誤差の伝播	11
2.11	離散的な測定値の不確かさと標準偏差	13
第 3 章	交流回路と同軸ケーブルの物理	15
3.1	キャパシタンスとインダクタンス	15
3.2	複素インピーダンス	17
3.3	ポインティングベクトルによるエネルギー輸送	17
3.4	伝送線	20
3.5	同軸ケーブル	22
第 4 章	微分積分回路	29
補遺		31
A	中学・高校教科書での単位の扱い方	31
B	質問と回答	33
参考文献		41

第1章

はじめに

本書は名古屋大学理学部物理学科の選択科目「物理実験学」の講義で使用する補足資料である。講義スライドでは説明しきれない内容を補足することを目的としており、本書単体で理解できることを目指してはならず、また講義の内容全てを網羅し補足することも目指していない。

「実験学」というのは学生にとっても掴みどころのない科目であり、担当教員の奥村も何を教えるべきなのか悩むことがある。学生から見れば、何を覚えておけば良いのか、どのような勉強をすれば良いのか、また試験や課題ではどのようなことが問われ解答できれば良いのか、どの内容が3年生以降で繰り返し出てくるのか、そういったことが分かりにくいだろうと推察する。そこで本書では、実験物理学者として意識すべきことや（講義も含め若干説教くさいかもしれない）、実際に手を動かしながら追いかけてほしい計算などを書き留め、後で読み返せるようにすることを意識した。

講義担当の奥村が本講義を行うのは2025年度が最終年度であるため、来年度以降の講義にそのまま反映されるかは分からないが、本書の改善点や誤りの指摘など、何かあれば奥村まで連絡してほしい。

第 2 章

測定と誤差

2.1 物理量と次元

数学では長さや面積を考えると、その単位や次元に十分注意を払わない場合がある。例えば「底辺が $a = 4$ 、高さが $h = 2$ の三角形の面積は $A = a \times h \times 1/2 = 4$ である」のような記述が当たり前に出てくる。このとき $a = 4$ と $A = 4$ だけを並べると、我々はそれが長さなのか面積なのか、互いに大小を比較できるものなのか、判別することができない。

物理学では次元と単位を常に意識する必要がある。スピン量子数、ニュートリノ世代数、円周率など無次元の値を除き、多くの場合で単位を伴った数字を扱う。例えば真空中の光速はおおよそ $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ と書き表すが、 $c = 3.00 \times 10^8$ とは絶対に書かない。物理の問題で「光速を m/s の単位で書け」のような指示がある場合、これは 3.00×10^8 という数値部分のみを取り出して書けという意味ではなく、 $3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ という形式で書け ($3.00 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ など他の単位にして書くな) という意味である。物理量をアルファベットなどの文字で表すとき、それは数学のように数値部分のみを表すのではなく、そこでは通常、単位も含んでいると考えることに注意する必要がある。

また $3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ のように数値と単位を繋げて書く学生が多いが、これは日本特有の、特に小学校教科書の記法である。これを理解していない研究者も国内には多数いるが、世界標準では数値と単位の間には狭いスペース^{*1}を必ず入れる。少なくとも高校の物理の教科書ではスペースが入っていたはずであるが日本の中等教育ではそれを意識した指導がされていないため、現時点でスペースを入れる癖がついていなくても学生の責任ではない。

単位を $()$ や $[]$ で囲む必要もない。これをつけるのは、グラフの縦軸・横軸に単位を書く場合や（「長さ (mm)」など）、測定結果を表にまとめる場合だけである。本来は数値に単位をつけるべきであるが、グラフや表に現れる全ての数字に単位をつけると煩雑になるため、「これら数字はこの単位で示している」と宣言するために丸括弧が使われる。表 2.1 にその例を示す。

高校物理を学んだ後に、なぜ $c = 3.00 \times 10^8$ や $c = 3.00 \times 10^8 [\text{m/s}^2]$ と書いてしまう癖がつくのかははっきりとし

表 2.1 単位を丸括弧で囲む例

電圧 (V)	電流 (A)
1.000 ± 0.005	2.01 ± 0.03
2.020 ± 0.005	3.96 ± 0.04
1.970 ± 0.005	6.05 ± 0.06
3.010 ± 0.005	8.10 ± 0.02

*1 \LaTeX ではスペースの代わりに $\,$ と入力する。

た理由は分からないが、実際の中学・高校教科書でどのような表記が使われているのかを踏まえ補遺 A に考察をまとめた。

2.2 誤差と不確かさ

物理学で何か物理量の測定結果を報告するとき、多くの場合にその測定には不正確さが伴う。例えば最小目盛が 1 mm の正確に作られた物差しを使い、**真の値 (true value)** が $L_{\text{true}} = 123.456 \text{ mm}$ の物体の長さを測ることを考える。このとき、最小目盛まで使ってこの物体を物差しで測定すると測定値は $L_1 = 123 \text{ mm}$ となるであろう。また、もし最小目盛の 10 分の 1 まで読み取る努力をした場合には、測定値は $L_2 = 123.5 \text{ mm}$ となる。

次にこの物差しがプラスチックで作られており、室温の変化によって伸び縮みが無視できない場合を考えよう。このとき、最小目盛まで使って先ほどの物体の長さを測定すると、 $L_3 = 122 \text{ mm}$ という結果を得るかもしれない。

このように、測定装置の読み取り性能の限界であったり、測定装置自身の持つ問題はあらゆる場面で存在し、結果として真の値と測定値には一般に差が生じる ($L_1 - L_{\text{true}} = -0.456 \text{ mm}$ 、 $L_2 - L_{\text{true}} = 0.544 \text{ mm}$ 、 $L_3 - L_{\text{true}} = -1.456 \text{ mm}$)。このような真値と測定値の差のことを**誤差 (error)** と呼ぶ。

最小目盛の 1 mm まで読み取って $L_1 = 123 \text{ mm}$ を得た場合、真の値が $L_{\text{true}} = 123.000000 \dots \text{ mm}$ であると考えられるものはいないだろう。真の値は $123.321 \dots \text{ mm}$ かもしれないし、 $122.813 \dots \text{ mm}$ かもしれない。では (物差しそれ自身が正確であったとして) 測定値と真の値にどの程度の開きがありえると測定者は考えるべきであろうか。これが測定の**不確かさ (uncertainty)** であり、誤差とは分けて考える必要がある*2。なぜなら通常、我々は真の値を知らないため誤差を計算できないからである。もし誤差を正確に計算できるのであれば、測定をする必要がない*3。

1 mm まで目盛を読み取るということは、真の値は $122.5 \leq L_{\text{true}} \leq 123.5$ の範囲に入っているはずである。この場合、測定値 L_1 には不確かさを含めて $L_1 = 123.0 \pm 0.5 \text{ mm}$ のように記述する*4*5*6。この記法の意味を言語化すると、真値は 123 mm よりも最大で 0.5 mm 大きいかもかもしれないし、逆に 0.5 mm 小さいかもしないということである。真値がその間のどこにいるかは「神のみぞ知る」であるが、少なくとも $\pm 0.5 \text{ mm}$ の範囲には収まっているはずであると測定者が強く確信していることになる。

この測定の不確かさというものは、どのように与えれば良いか絶対的な決まりがあるわけではない。原則として、その測定を理解した測定者自身の考えに基づいて決定されるべきものである。いくつか例を見てみよう。

例えば物差しでの測定を 1 mm の最小読み値で行うとして、 $L_{\text{true}} = 123.456 \text{ mm}$ の場合に読み値が 123 mm と 124 mm と判別しきれない状況を考えよう。つまり、むしろ 123.5 mm がより適切な値だと感じる場合である。小学校の算数などで経験したことがあるのではないだろうか。そのような状況では $123.0 \pm 0.5 \text{ mm}$ と書くべきなのか $124.0 \pm 0.5 \text{ mm}$ と書くべきなのか、迷ってしまうに違いない。もし前者を書いてしまえば、 L_{true} は不確かさの範囲に収まらなくなってしまうため、不確かさの付け方が不適切であったことになる。

しかし、もしあなたが 123.5 mm を読み値としてより適切だと感じたのであれば、これは測定者がこの物差しを使って最小目盛の半分 (0.5 mm) まで読めると考えているということである。この場合、測定値には 123.5 mm を採用し、不確かさには最小目盛の半分のさらに半分を採用し、測定結果として $123.50 \pm 0.25 \text{ mm}$ を報告すれば良いことになる。

*2 ただし多くの物理分野の教科書では「誤差」と「不確かさ」を区別せずに両者とも「誤差」と呼ぶ場合が多い。英語圏でも同様である。

*3 「真の値」という言葉は誤差の説明において頻繁に使われるが、真の値は知りようがないのだから理想的な概念であり、議論しても意味がないという考えもありうる。またノギスで何かの長さを測るような場合でも、そもそも真の値は温度などに影響され変化する場合もあるし、また水素原子の周りの電子の位置や運動量のように、特定の真の値が存在しないものもある。一方で、乱数を使用して円周率を「測定」する例は講義でも取り扱うが、これは数学的に真の値が存在するはずの特殊例である。

*4 分野や論文によっては、 $L_1 = 123.0 \pm 0.5 \text{ mm}$ を $L_1 = 123.0(5) \text{ mm}$ のように記載する慣習もあるため注意すること。例えば $123.123(9876) \text{ mm}$ と書かれていれば、誤差は 9.876 mm である。

*5 数値と単位の関係を明確にするため、数値全体を丸括弧で囲む (123.0 ± 0.5) mm という書き方も使われる。

*6 測定値と不確かさの最小桁位置は揃えること。

また多くの場合、最小目盛の 5 分の 1 や 10 分の 1 まで測定値を読み取れることがある。例えば化学実験で使用するメスシリンダーなどでは、最小目盛の 10 分の 1 まで読むように中学・高校の理科で指導されているはずである。しかし現実問題としてせいぜい 5 分の 1 までしか読み取れない場合もあるだろうから、そのようなときは自信を持って 5 分の 1 まで読むように諦めれば良い。大切なのは、測定者自身が不確かさをどれだけ自信を持って見積もれるかである。

もし最小目盛が 1 mL のメスシリンダーで 10 分の 1 まで読み取る自信があるのであれば、 12.40 ± 0.05 mL のように測定結果を報告すれば良い。しかしもし 5 分の 1 (0.2 mL) までしか読み取る自信がないのであれば、その自信のなさを不確かさに反映させ、 12.4 ± 0.1 mL のように報告すれば良い。

以上のいくつか例のように、ある最小目盛の測定器があったからといって、誰が測っても測定の不確かさが同じであるとは限らない。測定者がどのように不確かさを見積もり、それをどのように正当化しているかによって不確かさは変わってくる。実験レポートや論文などでは、この不確かさをどのように見積もったのかも簡潔に説明すべきである。

2.3 有効数字

ここまで見てきたように、一般に測定値には不確かさが伴うため表示桁数を無闇に増やしても、また逆に減らしても意味がない。不確かさが例えば ± 0.05 mm である場合、測定値を 123.4567 mm のように小数点以下 4 桁まで表示したところで、0.0001 mm の精度で測定することはできないのだから無意味である。また 123 mm のように桁数を減らし過ぎた場合、 ± 0.05 mm という小さい不確かさで測定できるはずであるのに、それを反映していないことになる。

このように、不確かさの大きさに応じて測定値の表示桁数を適切なものに調整することを**有効数字 (significant figures)** を考慮すると言う。一般に、不確かさの最小桁位置に合わせて測定値の表示桁数を調整する。例えば最小目盛 1 mm の物差しで 1 mm まで読んだとき、測定値の最小桁は 1 mm、不確かさは ± 0.5 mm となる。しかし測定値は不確かさの桁に合わせて 123.0 ± 0.5 mm のように書き、有効数字が 4 桁であると表現する。

有効数字の概念を習うのは中学校 3 年の数学が最初のはずである。しかし科学実験の測定値や不確かさの概念とは離れた文脈で教えられるため、多くの学生は有効数字の取り扱いに慣れていない。例えば単純に「有効数字の桁数を揃えましょう」のように覚えているため、実際の計算では苦勞する。

いくつかの例を見てみよう。有効数字が 1 桁の数同士を四則演算する場合、 $1 + 9$ の答えはどのように書くべきであろうか。「有効数字の桁数を揃えましょう」だけを教義にしまうと、答えは有効数字を 1 桁にして 1×10^1 と書くべきと考えるかもしれない。また $999 - 998$ の答えはどうだろうか。これは有効数字を 3 桁にして 1.00 と書くべきだろうか。

このような場合、演算する前のそれぞれの数値がどれだけの不確かさを持っているかを考えると方針が見えてくる。 $1 + 9$ の例では、最小目盛が 1 であると考えれば $(1.0 \pm 0.5) + (9.0 \pm 0.5) = (10 \pm 1)$ と考えることができる。すなわち、有効数字が 1 桁の数字同士の演算であっても、その計算結果を有効数字 2 桁で表しても良いのである。

同様に $999 - 998$ も考えよう。これは $(999.0 \pm 0.5) - (998.0 \pm 0.5) = 1 \pm 1$ と考えれば良い。すなわち、3 桁の有効数字を持つ数字同士の引き算の結果が有効数字 1 桁になっても良いのである。

これら 2 つの計算例の答えを $1 \times 10 \pm 1$ や 1.00 ± 1 と書いてしまったときの違和感をもう少し丁寧に説明しよう。前者は 9.0 ± 0.5 という 5% 程度の不確かさが支配的であったにも関わらず、 $1 \times 10 \pm 1$ と書くことによって 1×10 の部分が持つ不確かさが 50% に大きく劣化しているのが問題である。誤差伝播の後の不確かさは ± 1 であるから、測定値も同程度の精度のはずであるのに、 ± 5 の精度でしか測定値を記述できておらず矛盾している。後者は ± 1 でしか求められない計算であるにも関わらず、1.00 と書くことでその 100 分の 1 の精度で測定できるかのような誤解を招くのが問題である。

ここまで見てきたように、有効数字が何桁なのかを読者に対して明示するため、指数表示という手法を採用することがよくある。例えば 12.3 m という有効数字 3 桁の測定値があった場合、これを mm の単位で書くと 12300 mm となってしまう、有効数字が 5 桁であるかのように読者に勘違いさせかねない。これを防止するためには指数表示が有効である。すなわち 1.23×10^4 mm と書き、有効数字のみを先頭部分に書き出す。

2.4 精度と確度

日常的に「精度のよい測定」「精度のよい町工場の職人の加工技術」のような言い回しをすることがあるが、物理実験では**精度 (precision)** と **確度 (accuracy)** という 2 つの言葉を区別して考える必要がある。

1 mg まで読み取ることができ、また繰り返し測定をしても測定値が揺らがない（つまり偶然誤差の無視できる）体重計を考えよう。ただしこの体重計に、あなたは着衣のまま乗ったとする。このとき、測定結果は「精度が良い」と言えるだろうか。

実はこのとき、「精度は良いが確度は悪い」と表現するのが科学測定での標準である。日常会話とは少し感覚が異なるので注意されたい。精度とは、物理量をどれだけ小さく測定し、それがどれだけ揺らがないかを表す尺度である。この体重計の例では 1 mg の精度で測定が可能であると言える。ただし、もしこの測定結果が測定のたびに 100 mg 程度揺らぎ再現性がないのであれば、それは表示の最小桁が 1 mg であったとしても、精度は 100 mg である。

着衣のまま体重を測れば、当然その分だけ測定値から減算しない限り真の体重は測れない。このように真の値からのずれ、すなわち誤差が大きいかどうか、確度の良さである。

2.5 ノギス

ノギスの原理など詳細は講義スライドを参照してほしい。簡単にまとめると、1 mm の目盛りを持つ本尺と 39 mm を 20 等分した副尺の組み合わせで、最小 0.05 mm までの測定を実現する。副尺が右方向に 0.05 mm 移動するたび、本尺と副尺の目盛りの重なる箇所がひとつずつ右へ移動する。これは副尺の最小目盛りの幅が 1.95 mm だからである。

ノギスの測定の場合、測定の不確かさは 0.05 mm の半分の 0.025 mm とすれば良い。ノギスは一般的なプラスチック製や金属製の物差しよりも工作精度が高く温度依存性も小さいはずであるが、それでも製造時の誤差（系統誤差）によってノギスの示す値も完璧ではない。この系統誤差は日本工業規格（JIS）にのっとったノギスであれば、50 mm までの測定では 0.05 mm 以下になるように試験されている。

2.6 アナログテスター

アナログテスターの原理など詳細は講義スライドを参照してほしい。簡単にまとめると、アナログテスターの内部には可動コイル式の電流計が入っている。コイルに流れた電流に比例して磁石からトルクを受け、針が回転する。回転角は電流が微小であれば（= ぜんまいのバネ定数が一定の範囲内では）電流に比例する。

アナログテスターを電圧計として使用するには、テスター内部の既知の抵抗を通じて電圧源と電流計を直列に内部で接続し、流れる電流と既知抵抗の大きさの積をとることで電圧を測定する。また抵抗計として使用するには、テスター内部の既知の電圧源と電流計を抵抗に対して直列に繋ぎ、流れる電流と既知電圧の関係から抵抗値を測定する。

測定対象の回路に影響を与えないことが重要であるため、テスターの内部抵抗が十分小さくなるように作られている必要がある。

2.7 誤差の種類

測定には様々な原因によって誤差（真値と測定値の差）が生じる。これらは大きく分けて3つに分類される。すなわち、系統誤差、偶然誤差、過失誤差である^{*7}。

2.7.1 系統誤差

系統誤差 (systematic error) とは、測定手法もしくは測定装置に起因する誤差である。例えばノギスの製造精度が悪く、「ジョウ」や「クチバシ」などが変形していれば、その変形分だけ測定値が常に一定の大きさに真値からずれることになる。

いくつか他にも系統誤差の例を挙げてみよう。体重計は人間の質量 m にある地点での重力加速度 g をかけた値、すなわちある地点での重さ mg (力) を測定する装置である。その測定された力の大きさを、地球上の標準的な重力加速度 $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ で割ることで質量を求める。しかし重力加速度は地球の場所によって異なるため、同じ質量の人間が体重計に乗っても、設置場所によって質量の推定値が変わってしまう。体重計内部のバネ自体は力 mg の測定を精確にできていたとしても、 g のように値が不変ではなく較正ができていない場合 m の推定を間違えるのである。またバネ定数 k が変位に対して $mg = kx$ が常に成り立つという仮定も間違いかもしれない。これはあくまで変位が小さいときにのみ成り立つのだから、大きな体重では線形性が崩れるだろう。これらは一種の系統誤差である。

講義で取り扱った110個の抵抗の測定結果(図 2.1)では、1 k Ω の公称値に対して平均が $\langle R \rangle = 978.8 \Omega$ 、標準偏差が $\sigma_R = 2.7 \Omega$ であった。つまり平均値が1 k Ω ちょうどになるようには製造されていない。もしくは、測定に使用したテスターの較正が不十分であったと言える。仮にこの抵抗を実測せずに回路製作に用い、公称値の1 k Ω を信用してその回路を使用すると、計算から期待される回路の振る舞いと実際の振る舞いが異なることになる。もし、この抵抗に流れる電流を抵抗両端の電位差からオームの法則を用いて算出すると、常に電流の大きさを過大評価することになる。

以上のような系統誤差は、どのような測定系を使用するか、何を測定対象とするかによって様々なものが存在する。したがって教科書や講義資料などで詳しく取り扱うことは難しく、「取り扱いが難しい」とか「個々の測定系で注意する必要がある」などの説明にとどまることが多い。また例示する測定もストップウォッチを押すタイミングがずれるとか、物差しが伸びているとか、現実の物理実験では現れない分かりやすいものが多い。本資料でもそれは同様である。

しかし、基本的な考え方を述べれば、自分の使用する装置や測定手法にはどのような不確かさが入り込みうるのか、測定のどの部分まで精度良く信頼できるのか、それを測定原理に立ち返って慎重に検討することが系統誤差の評価では大切である。

2.7.2 偶然誤差

偶然誤差 (random error) とは、測定対象もしくは測定系(人間を含む)の確率的な揺らぎに起因する誤差である。**統計誤差 (statistical error)** と呼ぶことも多い。

例えばある放射線源の放射能(単位時間あたりの崩壊数)を測定する場合を考えよう。放射性同位体の崩壊は確率事象であるので、例えば10 Bqの放射能を持つ放射線源であっても、ある1秒間には8回の崩壊を起こすかもし

^{*7} ここでは「誤差」という言葉を使用するが、測定値の不確かさを指す場合には英語で systematic error ではなく systematic uncertainty のように言い換えることもある。ただし日本語では「不確かさ」を意味する適切な熟語が存在しないため、「系統不確かさ」のような言い換えをせずに「誤差」と「不確かさ」の区別を曖昧にしたまま、「系統誤差」となんでも「誤差」と書くのが一般的である。

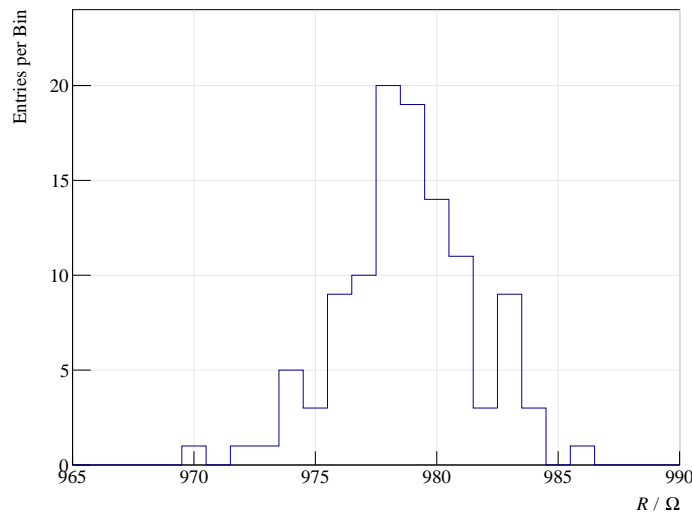


図 2.1 110 個の抵抗（公称値 $1.00 \pm 0.05 \text{ k}\Omega$ ）の測定値の分布

れないし、他の 1 秒間には 12 回の崩壊を起こすかもしれない。したがって特定の 1 秒間だけ測定をしても、推定される放射能はいつも 10 Bq という真値に合致するわけではなく、確率分布にしたがって確率的な揺らぎを持ち、誤差が生じる。これが偶然誤差である。

また測定装置の側に確率的な揺らぎが存在する場合もある。同じく放射能の測定を考えると、この線源からの放射線を検出する効率が 50% であったとしよう。この場合、1 秒間に 10 回の崩壊が起き、そこから放射されるガンマ線が検出器に全て入射したとしても、検出効率が 100% を下回る状況では、検出ガンマ線数は 8 だったり 4 だったりする。これも確率的な揺らぎであり、偶然誤差である。

このような測定対象もしくは測定装置の持つ不可避な確率的な揺らぎとは別に、測定を行う人間に起因する偶然誤差もある。例えばノギスで金属の厚みを測定する際に、ノギス測定に習熟していない測定者であれば、測定のたびにノギスの当て方が斜めになるなどし、同一の金属板の同一箇所を測定しているにもかかわらず測定結果が揺らぐことがあるだろう。もしくは目盛の読み方が安定せず、同じ値をノギスは指しているにもかかわらず、判断に迷いが生じ読み値が揺らぐかもしれない。このような測定者に起因する偶然誤差もあるが、本来これは測定方法を改善することで取り除くことが期待される誤差であり、どちらかという系統誤差や後述する過失誤差として取り扱うべきかもしれない。

2.7.3 過失誤差

過失誤差 (mistake) とは、測定者の誤りに起因する誤差である。例えば先述したノギスの当て方の問題であったり、テスターを用いた抵抗値の測定でプローブの当て方が悪く接触抵抗が大きくなってしまふような場合が考えられる。また単純に測定値の読み間違い、実験ノートへの書き間違い、計算機でデータ解析する際の入力値の誤り、計算間違いなど、不注意と呼べるようなものも低くない頻度で実際の研究においても発生する。

このような誤差を発生させないためには、測定原理を理解し測定に習熟した上で実験を行ったり、測定結果の記録を人力に頼らず自動化するなど、誤りをいかに混入させないかという工夫をすることが肝要である。本講義の課題や 3 年生の実験レポートで、測定結果が想定と大きくずれた場合などに「測定ミスが考えられる」というような考察(?) の記述がよく見られるが、もし本当に測定に問題があると考えてるのであれば測定をやり直すか、どのような過失が発生し、それがどのような影響を与えるのか、またどのように測定手法を改善できるのかを考察するべきであ

る。根拠なしになんでも「測定ミス」と片付けるのは、科学的態度ではない。

2.8 期待値と分散

ある測定値 x が**確率密度関数 (probability density function)** $p(x)$ ^{*8}にしたがって揺らぐとき、 x の**期待値 (expected value)** $E[x]$ と**分散 (variance)** $V[x]$ は次のように定義される^{*9*10}。

$$E[x] \equiv \int xp(x)dx \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} V[x] &\equiv \int (x - E[x])^2 p(x) dx \\ &= \int (x^2 - 2xE[x] + E[x]^2) p(x) dx \\ &= \int x^2 p(x) dx - 2E[x] \int xp(x) dx + E[x]^2 \int p(x) dx \\ &= \int x^2 p(x) dx - E[x]^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで積分範囲は $-\infty$ から ∞ とする^{*11}。もし x が離散的な値 x_i を取るとき、確率分布をそれぞれの x_i の出る確率 p_i ^{*12}に焼き直すと、同様の計算により x の期待値と分散は次のように定義される。

$$E[x] \equiv \sum_i x_i p_i \quad (2.3)$$

$$V[x] \equiv \sum_i (x_i - E[x])^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - E[x]^2 \quad (2.4)$$

$$\sum_i p_i = 1 \quad (2.5)$$

ここで添え字 i は、取りうる測定値の全てに番号を振ったものである。例えばサイコロの出目であれば、 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ であり、 $p_i = 1/6$ となる。

また分散の平方根をとったものを標準偏差と呼び、次のように定義する。

$$\sigma_x \equiv \sqrt{V[x]} \quad (2.6)$$

ここで現れる分散や標準偏差は、確率分布の広がり程度の指標として使われる。式 (2.2) から分かるように期待値からの偏差の二乗平均を取ることで、正負の偏差が打ち消しあうのを防いでいる。

わざわざ二乗の積分を実行したにも関わらず、分散の平方根を取って標準偏差という**統計量 (statistic)**を導入するのは、それが元の物理量と同じ次元になるからである。測定値の広がり程度、例えば日本人の身長の高さを議論するときに、分散の単位が m^2 であるよりも、標準偏差の単位が m である方が直感的に理解しやすい。

分布の広がりを計算する基準として期待値 (平均値) からの偏差を採用した。この基準は好きに選んでも構わないはずだが、期待値を選ぶことで分散を最小にできる。次のように任意の基準点 m を選べる分散 $V[x](m)$ を定義しよう。

$$V[x](m) \equiv \int (x - m)^2 p(x) dx \quad (2.7)$$

^{*8} $p(x)$ は確率密度であるから、 $\int p(x) dx = 1$ であることに注意。

^{*9} $E[x]$ を $E(x)$ や $\langle x \rangle$ と書いたり、 $V[x]$ を $V(x)$ と書くこともあるので注意。

^{*10} $\langle x \rangle$ という表記は x の関数であることを表しているが、 $[x]$ という表記には、 x のなんらかの関数を確率密度 $p(x)$ で重み付けて積分したものであるという意味を持たせている。

^{*11} 実際に x がどのような値の範囲を取るかは $p(x)$ が非ゼロの値を取るかで考えれば良いので、積分範囲が無限大であることは気にしなくてよい。

^{*12} 「確率」という言葉と「確率密度」という言葉を使い分けていることに注意。後者は測定値の物理量の逆数である。

このとき $V[x](m)$ を最小にするのは $dV[x](m)/dm = 0$ なので、

$$\begin{aligned}
 \frac{dV[x](m)}{dm} &= \int -2(x-m)p(x)dx \\
 &= -2 \left\{ \int xp(x)dx - m \int p(x)dx \right\} \\
 &= -2(E[x] - m) \\
 &= 0 \\
 \therefore m &= E[x]
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

が得られる。つまり、分散を最小にするには期待値からの偏差を考えれば良いことが分かる。

偏差の二乗の代わりに偏差の絶対値を使うだけでも偏差の正負が打ち消しあう問題は解消できるが、場合分けが不要になり積分の表式が簡単になることや、二乗にすると数学的な性質が良いという利点があるため、期待値からの偏差の二乗を分散として用いる。

例えば、分散の加法性という便利な性質を見てみよう。2つの測定値 x_1 と x_2 がそれぞれ確率分布 $p_1(x_1)$ と $p_2(x_2)$ に独立^{*13}に従うとする。このとき $y = a_1x_1 + a_2x_2$ を考えると、まず期待値の加法性が得られる。

$$\begin{aligned}
 E[y] &= \iint (a_1x_1 + a_2x_2)p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2 \\
 &= \int a_1x_1p_1(x_1)dx_1 \int p_2(x_2)dx_2 + \int a_2x_2p_2(x_2)dx_2 \int p_1(x_1)dx_1 \\
 &= a_1E[x_1] + a_2E[x_2]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

また y の分散 $V[y]$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 V[y] &\equiv \iint (y - E[y])^2 p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2 \\
 &= \iint (a_1x_1 - a_1E[x_1])^2 p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2 \\
 &\quad + \iint (a_2x_2 - a_2E[x_2])^2 p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2 \\
 &\quad - 2 \iint (a_1x_1 - a_1E[x_1])(a_2x_2 - a_2E[x_2])dx_1dx_2 \\
 &= a_1^2 \int (x_1 - E[x_1])^2 p_1(x_1)dx_1 \\
 &\quad + a_2^2 \int (x_2 - E[x_2])^2 p_2(x_2)dx_2 \\
 &\quad - 2a_1a_2 \iint (x_1x_2 - E[x_1]x_2 - E[x_2]x_1 + E[x_1]E[x_2])p_1(x_1)p_2(x_2)dx_1dx_2 \\
 &= a_1^2V[x_1] + a_2^2V[x_2] \\
 &\quad - 2a_1a_2 \left\{ \int x_1p_1(x_1)dx_1 \int x_2p_2(x_2)dx_2 - E[x_1] \int p_1(x_1)dx_1 \int x_2p_2(x_2)dx_2 \right. \\
 &\quad \left. - E[x_2] \int x_1p_1(x_1)dx_1 \int p_2(x_2)dx_2 + E[x_1]E[x_2] \int p_1(x_1)dx_1 \int p_2(x_2)dx_2 \right\} \\
 &= a_1^2V[x_1] + a_2^2V[x_2]
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで x_1 と x_2 は独立変数であるため積分をそれぞれで実行できること、また $\int p_1(x_1)dx_1 = \int p_2(x_2)dx_2 = 1$ であることに注意せよ。

*13 x_1 の値が x_2 に影響を与えず、 x_2 の値も x_1 に影響を与えないこと。

整理すると、 $y = a_1x + a_2x_2$ のとき、次の加法性が得られる。

$$E[y] = a_1E[x_1] + a_2E[x_2] \quad (2.11)$$

$$V[y] = a_1^2V[x_1] + a_2^2V[x_2] \quad (2.12)$$

$$\sigma_y^2 = a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2 \quad (2.13)$$

2.9 標本と母集団

我々が測定を行うとき、その測定値の集合のことを**標本 (sample)** と呼ぶ。例えば講義で扱った 110 個の抵抗の測定値は標本の例である。もし同じ製造元が同製品を合計 100 万個製造していたとすると、我々は**大きさ (size)** 1,000,000 の**母集団 (population)** から大きさ 110 の標本を取り出して測定したと表現できる。この標本の大きさを n と表すことが多く、 $n = 110$ と書いたり、「 n を増やす」(もっと測定する) などと表現することもある^{*14}。

前節で期待値という概念を導入したが、これは母集団の平均値 (**母平均 (population mean)**) でもあり、標本から計算される平均 (**標本平均 (sample mean)**) の期待値でもある (高校数学で出てくる期待値と同じである)。偏りのないサイコロを繰り返し振ることができる場合を考えると、母集団は無限回の試行を繰り返した場合であり、標本は有限回の試行である。母平均は当然 $7/2$ であるが、標本平均は母平均と同じにはならない。

物理実験の測定では、しばしば母集団の持つ統計量を標本から推定することが行われる。例えば 1987 年に超新星爆発 1987A が発生した際に日本のカミオカンデ実験でニュートリノが 11 事象検出された^{*15}。超新星爆発で、どのようなエネルギーのニュートリノがどれだけ放出されるのかを観測から明らかにするには、11 事象という標本から、超新星爆発で放出された全てのニュートリノという母集団の性質を推定する必要がある。

抵抗の測定の例のように、すでに存在している母集団自体に値のばらつきがある場合もあれば、測定のたびにノイズが乗るなどして、同じものを測定していても測定値が揺らぐ場合もある。原因はさまざまであるが、いずれにせよ標本にはばらつきが存在する場合が多い。

2.10 誤差の伝播

前節で見た測定値の揺らぎを、測定の不確かさであると考えよう。複数の測定を用いて間接的に何か別の物理量を推定する場合、それぞれの測定の揺らぎはこの推定の結果に影響を与える。

例えば図 2.1 で見たように、製造上の理由で母集団の抵抗の値に既知のばらつきがあったとする。このとき、抵抗を一つだけ取り出し、測定することなく抵抗値 R_1 を推定しよう。この場合、推定の不確かさとして標準偏差を採用し、 $R_1 = 978.8 \pm 2.7 \Omega$ と書いて置くと便利である。

では、抵抗を 2 つ取り出して直列にした場合の合計値 $R_{\text{total}} = R_1 + R_2$ を推定してみよう。このとき推定値の不確かさをやはり標準偏差で表すことにしよう。 R_1 と R_2 は同じ確率密度関数 (図 2.1) に従う変数であるが、互いに独立である。すなわち、(所持している抵抗の数が十分大きければ) R_1 の値として何が出ようと、 R_2 の値に影響を与えない。このような状況では、 R_{total} の期待値と分散は式 (2.10) を用いて次のように計算できる。

^{*14} 標本数 (number of samples) と標本の大きさ (size of sample) を混乱する人がよくいるが、これらは異なる概念である。標本数とは、標本がいくつあるかの数である。例えば 2 人の測定者が 100 個ずつの抵抗をそれぞれ別に測定した場合、表本数は 2 であり、それぞれの標本の大きさは 100 である。

^{*15} 小柴昌俊のノーベル物理学賞 (2002) に繋がり、また後継のスーパーカミオカンデ実験では梶田隆章のノーベル物理学賞 (2015) に繋がった。2025 年現在、さらに性能を高めたハイパーカミオカンデが建設中である。

$$E[R_{\text{total}}] = E[R_1] + E[R_2] = 2 \times 978.8 \Omega = 1957.6 \Omega \quad (2.14)$$

$$V[R_{\text{total}}] = V[R_1] + V[R_2] = 2 \times (2.7 \Omega)^2 = 14.58 \Omega^2 = (3.8 \Omega)^2 = (\sqrt{2} \times 2.7 \Omega)^2 \quad (2.15)$$

したがって、 R_{total} の推定値は $R_{\text{total}} = 1957.6 \pm 3.8 \Omega$ と計算できる。このように分散の加法性という便利な性質を使うことができるため、推定値や測定値の不確かさとして標準偏差を用いるのである。原則として値の不確かさを標準偏差で表しておけば、その値を引用して別の物理量を計算する場合に、やはり標準偏差を用いて不確かさを計算することで一貫性が保てるのである。

次に、 n 個の抵抗を取り出して標本平均を計算する場合を考えよう。すなわち、 $\langle R \rangle = \frac{1}{n} \sum R_i$ である。先と同様の計算で $\langle R \rangle$ の期待値は $E[\langle R \rangle] = E[R]$ であり、分散は $V[\langle R \rangle] = n \times V[R]$ である。したがって R_i の平均値は $\langle R \rangle = 978.8 \pm \frac{2.7}{\sqrt{n}} \Omega$ になると期待される。標本平均は母平均の良い推定量であり（母平均の周りに分布する）、標本の大きさ n を増やすことで推定の不確かさを小さくできることが分かる。これにより、繰り返し測定の平均値を報告するという、中学・高校とこれまで説明なしで行ってきた慣習の根拠が理解できる。

次に、もう少し複雑な物理量の計算を考えよう。例えば抵抗 R と電流 I の測定からオームの法則 $V = RI$ を用いて電圧 V を推定するとき、 R と I の不確かさは V の不確かさへと「伝播（でんぱ）」する。これを**誤差の伝播 (propagation of error)** と呼ぶ。

より一般の場合をまず考えよう。互いに独立な測定^{*16}を n 回行ない、得られた測定値を順番に x_1, \dots, x_n とする^{*17}。これらを使って別の物理量 $f(x_1, \dots, x_n)$ を計算する。このとき、それぞれの測定値の期待値からの偏差を次のように定義する。

$$\delta x_i \equiv x_i - E[x_i] \quad (2.16)$$

また同様に f の偏差も定義し、 δx_i が十分小さいと仮定して1階の偏微分で近似する。

$$\begin{aligned} \delta f &\equiv f - E[f] \\ &\simeq \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1=E[x_1], x_2=E[x_2], \dots} \delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1=E[x_1], x_2=E[x_2], \dots} \delta x_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

x_i は独立に動くため、分散の加法性を思い出すと次の関係が得られる^{*18}。

$$V[f] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 V[x_1] + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 V[x_2] + \dots \quad (2.18)$$

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots \quad (2.19)$$

これを誤差の伝播の式と呼ぶ。

これを用いて、先述したオームの法則の例を見てみよう。 $R = 1.2 \pm 0.1 \Omega$ 、 $I = 2.3 \pm 0.3 \text{ A}$ という測定値があり、与えられている不確かさは何らかの揺らぎを標準偏差で表したものであるとする。このとき

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{\partial V}{\partial R} \delta R + \frac{\partial V}{\partial I} \delta I \\ &= I \delta R + R \delta I \end{aligned} \quad (2.20)$$

となり、分散は

$$\begin{aligned} \sigma_V^2 &= \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial I} \right)^2 \sigma_I^2 \\ &= I^2 \sigma_R^2 + R^2 \sigma_I^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

*16 「独立」であるとは、測定値 x_j が他の測定値 x_k の出方に影響を与えないという意味。

*17 取りうる測定値に番号を振ったわけではなので注意。

*18 $x_1 = E[x_1], x_2 = E[x_2], \dots$ は省略した。

となる。 R と I には測定値を、また σ_R と σ_I には測定の不確かさを代入すれば、間接的に推定した電圧 V の不確かさ σ_V が計算でき、次の計算結果を得る。

$$V = 2.8 \pm 0.4 \text{ V} \quad (2.22)$$

もし測定で V と R のみが得られており、そこから $I = V/R$ を推定する場合は、同様に考えて次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{\partial I}{\partial R} \delta R + \frac{\partial I}{\partial V} \delta V \\ &= -\frac{V}{R^2} \delta R + \frac{1}{R} \delta V \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 &= \left(\frac{\partial I}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial V} \right)^2 \sigma_V^2 \\ &= \frac{V^2}{R^4} \sigma_R^2 + \frac{1}{R^2} \sigma_V^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

単純な計算間違いを減らすため、誤差伝播の式で得られる結果の次元が推定する物理量の次元と同じであるか必ず確認するようにせよ。例えば式 (2.24) の左辺は電流の 2 乗であり、右辺第 1 項であれば電圧の 2 乗と抵抗の 2 乗の積を抵抗の 4 乗で除しているため、その次元はやはり電流の 2 乗となる^{*19}。

次節で述べるように、測定値に対する不確かさの付け方はいつも標準偏差で与えるわけではない。最小目盛の半分を不確かさとして、標準偏差を不確かさとする場合があり、これらはレポートや論文中で何を不確かさとしたのかさえ明記してあれば、目的に応じて好みに選んで良い。では、誤差の伝播はこの不確かさの表記法の選択に依存するだろうか。

式 (2.19) では標準偏差の二乗和で誤差伝播を計算した。もし σ_{x_1} の代わりに $\sqrt{3}\sigma_{x_1}$ (後述する、最小目盛の半分を不確かさとする場合と標準偏差の変換) を使用した場合、式 (2.19) は次のように書き換えられる。

$$3\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \times 3\sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \times 3\sigma_{x_2}^2 + \dots \quad (2.25)$$

両辺でどの項にも $(\sqrt{3})^2$ をかける限り、すなわち不確かさの付け方を全ての値で揃える限り、標準偏差で誤差伝播を計算しても、最小目盛の半分で誤差伝播を計算しても問題ない。

2.11 離散的な測定値の不確かさと標準偏差

前節の議論では不確かさとして標準偏差を与え、誤差の伝播も標準偏差の伝播として考えた。しかし実際の測定では測定の不確かさとして標準偏差を与える場合もあれば、ノギスでの測定のように最小読み値の半分を不確かさとして与える場合もある。後者の場合はどのように誤差の伝播を考えれば良いであろうか。

まず、ノギスのように離散的な値を取る測定^{*20}を考えよう。例えば $x = 10.350 \pm 0.025 \text{ mm}$ という測定を得たとする。このとき、真の値は 10.325 mm から 10.375 mm のどこかに存在するはずだが、どこにいるかはこの測定だけからは知りようがない。そこで、真の値はこの区間に一様な確率分布をしていると考えよう^{*21}。このとき、真の値の確率分布の標準偏差は次のように考えられる。

^{*19} 実際にこの確認作業をしてみて、右辺第 2 項の次元がおかしいことに気がついた。偉そうに書いているものの、 \LaTeX 入力の際にいつも次元の確認をしっかりとやっているわけではない。

^{*20} 現実にはほとんどの測定が離散的である。つまり、好きなだけ有効桁数を増やせる測定はなく、最小桁の大きさで離散的な値のみを取る。しかし最小桁の大きさに対して不確かさが十分大きい場合は測定値を連続量と見なせるようになる。ノギスの場合は最小桁の大きさよりも不確かさが小さいため、離散的なままの取り扱いが必要となる。

^{*21} ここで「確率」という言葉を使うが、真の値が 10.328 mm になったり 10.361 mm になったり、確率的にその値を変えるという意味ではない。我々が真の値を推測する確信の度合いが一様分布しているだけである。例えば、必ず硬貨の表が出るように投げ方の調整されたロケットアームがあるとすると、このときその調整の事実を知らない人からすると硬貨の表の出る確率は 50% であるが、実際には 100% の確率で表が出る。このとき「表の出る確率は 50%」というのは情報の確信度を指しているものであり、無限回の試行における発生頻度ではない。このように統計学で出てくる「確率」の意味は高校数学から拡張されている。

ある測定を最小目盛幅 $2d$ の測定器で行ない、測定値 $a \pm d$ という結果を得た。ここで測定の不確かさとして最小目盛幅の半分を与えている。この不確かさはあくまで $\pm d$ を超える範囲に真値が存在しないだろうという意味で与えた、保守的な不確かさである。しかし真値が存在する範囲 ($\pm d$ で一様分布) の典型的な幅ではない。そこで標準偏差を計算する。

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{if } a - d < x < a + d \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_{x_d}^{x+d} xp(x)dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} V[x] &= \int_{x_d}^{x+d} p(x)(x - E[x])^2 dx \\ &= \frac{1}{d} \int_0^{x+d} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3d} [x^3]_0^d \\ &= \frac{d^2}{3} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

もし $\pm d$ の不確かさに代わり標準偏差を不確かさとしてつけるのであれば、 $a \pm d$ は $a \pm \frac{d}{\sqrt{3}}$ と書き直される。

それでは、ノギスの2つの測定値を足し算する場合を考え、誤差の伝播を2通りの考え方で計算してみよう。2つの測定値は $L_1 = 3.45 \text{ mm}$ と $L_2 = 7.15 \text{ mm}$ とする。

1つ目の方法は、測定の不確かさとして最小目盛の半分を与え、誤差の伝播を計算する方法である。すなわち、 $L_1 = 3.450 \pm 0.025 \text{ mm}$ および $L_2 = 7.150 \pm 0.025 \text{ mm}$ と書き直される。このとき不確かさは標準偏差ではなく、100%の**信頼区間 (confidence interval)** であるから、不確かさの意味に一貫性を持たせるのであれば、誤差伝播させた後の不確かさの範囲にも真値が必ず入っていないてはならない。これを実現するには、単純に元の不確かさを足すしかない。したがって、 $L_1 + L_2 = 10.60 \pm 0.05 \text{ mm}$ となる。

2つ目の方法は、ノギスのような測定であっても測定の不確かさを標準偏差で与える方法である。すなわち、 $L_1 = 3.45 \pm \frac{0.025}{\sqrt{3}} \text{ mm} = 3.4500 \pm 0.0144 \text{ mm}$ および $L_2 = 7.15 \pm \frac{0.025}{\sqrt{3}} \text{ mm} = 7.1500 \pm 0.0144 \text{ mm}$ と書き直される。このとき誤差の伝播は式(2.19)で計算でき、 $L_1 + L_2 = 10.60 \pm 0.02 \text{ mm}$ となる。この 0.02 mm はやはり標準偏差であるため、不確かさの意味が伝播計算の前後で一貫している。

1つ目の方法では n 個の測定の足し算になると不確かさは n 倍大きくなるが、2つ目の方法では \sqrt{n} 倍しか大きくなる。前者は不確かさの最大値もしくは最小値が出続けた場合の最悪の状況を想定したものであるが、後者はさまざまな値が揺らぎとして出ることを想定しており、それらの大小が互いに打ち消し合うため、前者に比べて不確かさの増大が抑えられるのである。

第3章

交流回路と同軸ケーブルの物理

高校や大学で学ぶ物理の世界は、理想化された「摩擦はないものとする」の世界であることが多い。しかし我々が物理実験を行う現実世界の力学には摩擦が登場するし、現実世界の電磁気学で扱う電気信号は理想的な直流や正弦波でもない。そこかしこに携帯電話や Wi-Fi の電波が飛び交い、また壁から取り出せる 60 Hz や 50 Hz の家庭用交流電源も完璧な正弦波ではなくノイズが乗っている。このような環境で高速の電気信号を伝送する一つの方法として、同軸ケーブルと呼ばれる特殊なケーブルが様々な場面で用いられる。この章では同軸ケーブルを電磁気学として理解するための解説を行なう*1。

3.1 キャパシタンスとインダクタンス

高校物理で交流回路を学習する際、電源および抵抗 R に加えてコンデンサやコイルという新たな素子が登場した。これらの素子はそれぞれ**キャパシタンス (capacitance) C** 、および**インダクタンス (inductance) L** で表される特性を持つ。キャパシタンスの例として距離 d 、面積 S の平行平板コンデンサが取り上げられ、電位差 V を印加したときにコンデンサに蓄えられる電荷と電圧の関係が

$$Q = CV \quad (3.1)$$

もしくは時間微分をして

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (3.2)$$

として表されることを学んだ。またインダクタンスの例としてコイルが取り上げられ、そこに流れる電流 I の時間変化が誘導起電力を発生させ、その大きさが

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (3.3)$$

で表されることを学んだ。

これら素子に正弦波の交流電圧 $V = V_0 \sin(\omega t)$ を印加した場合、2つの微分方程式が次のように書ける*2。

$$I = C \frac{dV}{dt} = \omega C V_0 \cos(\omega t) = \omega C V_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.4)$$

$$V_0 \sin(\omega t) = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(-\frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t) \right) = L \frac{d}{dt} \left(\frac{V_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right) \quad (3.5)$$

*1 ここでの解説は様々な書籍を参考に奥村が組み立て直したものであるが、特に参考になる文献として Feynman et al. [2] を挙げる。

*2 突然ここで正弦波を取り扱うのは、フーリエ変換すればあらゆる入力電圧は正弦波の重ね合わせとして表すことができるからである。そのためある角周波数 ω に対する素子の応答さえ分かれば、それらの重ね合わせで任意の入力について考えることができる

ただし L の式では電流の初期条件がゼロであると、積分定数を無視した。また抵抗を繋いだときは単純に

$$V = RI = R \times \frac{V_0}{R} \sin(\omega t) \quad (3.6)$$

と書ける。

これら式で分かることは、正弦波の入力電圧はどの素子に接続されても正弦波の電流を生み出すということである。高校物理で習ったように C では位相が $\pi/2$ 進み、 L では逆に位相が $\pi/2$ 遅れる。これは電圧信号が時間的に先行して伝わってしまうとか遅延して伝わるという意味ではなく、単に正弦波を微分もしくは積分すると \sin と \cos の関係が変わることを示しているに過ぎないので注意せよ。

ここで位相のずれを無視すると、電圧（振幅 V_0 ）と電流（振幅 I_0 ）の関係は R 、 C 、 L に対してそれぞれ次のように表される。

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \quad (3.7)$$

$$I_0 = \omega CV_0 \quad (3.8)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L} \quad (3.9)$$

これら R 、 $\frac{1}{\omega C}$ 、 ωL を総称して**インピーダンス (impedance)** と呼ぶ。位相を無視しない場合は複素インピーダンスと呼ばれ、それぞれ R 、 $\frac{1}{i\omega C}$ 、 $i\omega L$ と表される。この導出や使い方は次節で述べる。

インピーダンスに対する一般的な日本語訳は存在しないため、それがどのようなものか想像しにくいかもしれない。「impede」という英単語は「妨げる」という意味の動詞であり、その名詞形であると考えれば、電圧に対して電流の発生を妨げる特性の大きさを指しているのだと分かる。また単位は抵抗の場合と同様にオーム (Ω) である^{*3}。

これらインピーダンスがどのような物理的性質により生じるかを考えよう。抵抗の場合は素子に電子が流れる際の、運動エネルギーの散逸であると考えると理解しやすい。電子はこの運動エネルギーを電位差による加速として受け取り、素子中のイオンとの衝突で熱エネルギー（ジュール熱）として失う。短絡している箇所に電位差があればいくらでも電子を加速できてしまうため電流も大きく流せるが、このジュール熱によるエネルギーの損失のため電流は R に反比例して抑制される。後述する表皮効果のため実際には R は周波数依存性を持つが、 ω が十分小さければ R は周波数に依存しないと見なしてよい。

キャパシタンスの場合は、電圧がかかると素子内に電場が発生するためそれに応じて両端の電荷の分布が変化する。 C が大きいほど多くの電荷を蓄えられる、すなわち電荷の移動（電流）を発生させやすくなるため、電流は C と V_0 に比例する。また同じ電圧で同じ電荷を蓄えるにしても、その電荷の移動が速ければ速いほど電流（電荷の時間微分）の値は大きくなる。すなわち、電圧の周波数 ω に比例して電流は大きくなる。まとめると、キャパシタンスの持つ電流の流しにくさ、インピーダンスは、 C と ω に反比例する。抵抗と異なり、この流れた電流は素子内で消費されることはない^{*4}。しかし電位差のある場所に電荷を移動するということはそれら電荷にエネルギーを渡したということであり、そのエネルギーは電場として素子内に蓄えられる。

最後にインダクタンスを考えよう。電源にコイルを接続するとこれは短絡した回路であるため、電源は無限大の電流を流そうとする。しかしコイルを流れる電流は磁場を生じ^{*5}、その磁場の時間変化が電流を妨げる方向に誘導起電力を生じる。これがコイルが電流に対して「impede」する物理的な理由である。コイル中の磁場と電流は比例し、また磁場の時間微分が誘導起電力に比例する。したがってコイルの電圧は電流の時間微分に比例するのである。キャパシタがエネルギーを電場と蓄えたのと同様に、インダクタはエネルギーを磁場として蓄える。

^{*3} キャパシタンスとインダクタンスの単位はそれぞれファラド (F) とヘンリー (H) で表される。また ω の単位はヘルツ (Hz) なので、 $1/\text{Hz}/\text{F} = 1/\text{Hz}/(\text{s}\Omega) = \Omega$ 、 $\text{Hz} \times \text{H} = \text{Hz} \times (\text{s}\Omega) = \Omega$ と全て同じ次元になる。

^{*4} ジュール熱を発生しないという意味。

^{*5} 回路を構成する導線自体にも電流は流れ、また電位を持つため、回路自体もキャパシタンスやインダクタンスを持つ。現実の電子回路ではこれらも無視できないし、電子回路中を伝わる光速の「遅さ」も無視できない。しかし教科書的な交流回路の説明では、これら効果を一切無視するので注意されたい。

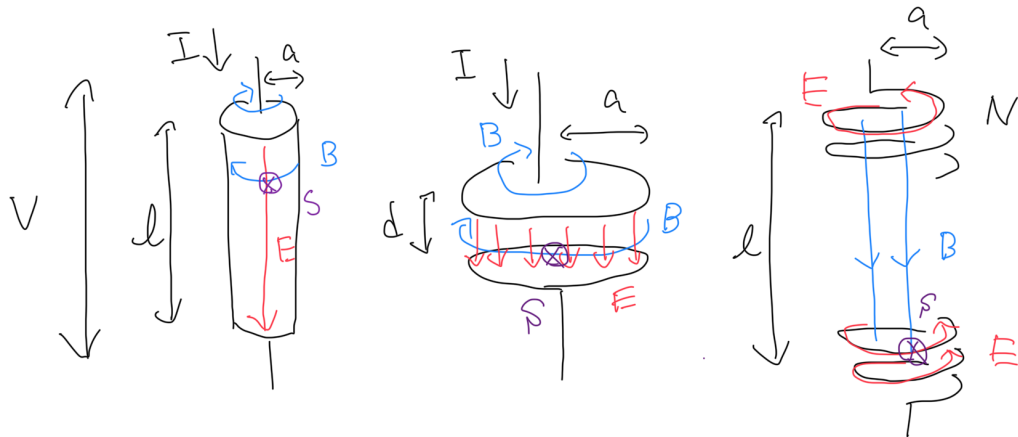


図 3.1 ポインティングベクトルによるエネルギー輸送の概念図。左から抵抗、コンデンサ、コイルを表す。

3.2 複素インピーダンス

3.3 ポインティングベクトルによるエネルギー輸送

先に説明した R で発生するジュール熱や L 、 C に蓄えられる電磁場のエネルギーはどのように電源から輸送されたのだろうか。これは、回路を流れる電流のまわりの磁場と電場が生み出したポインティングベクトルが担っている。

ポインティングベクトル \mathbf{S} は、電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} の外積で定義され、単位時間あたりに単位面積を通過するエネルギーのフラックスとして次のように表される。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (3.10)$$

ここでは簡単のため真空中の誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0 を用いる。

図 3.1 に、抵抗、キャパシタ、コイルの両端に印加電圧 $V(t)$ が与えられ、それぞれの素子を電流 $I(t)$ が流れるときにポインティングベクトルがエネルギー輸送にどのように関わるかを示す。

まず円筒状の抵抗 R の場合を考えよう (図 3.1 左)。電流と電圧の関係は

$$V(t) = RI(t) \quad (3.11)$$

で表される。このとき長さ l の抵抗内の電場の大きさ E は

$$E = \frac{V(t)}{l} \quad (3.12)$$

であり、その向きは素子に平行、また大きさは

$$E(t) = \frac{V(t)}{l} \quad (3.13)$$

で表される。また抵抗の表面に発生する磁束密度の大きさは

$$B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a} \quad (3.14)$$

である。単位時間あたりに抵抗に流れ込むエネルギーは $W(t)$ 、素子表面のポインティングベクトルを面積分すれば求まるため、

$$\begin{aligned} W(t) &= 2\pi a \times \ell \times E(t) \times \frac{1}{\mu_0} B(t) \\ &= 2\pi a \times \ell \times \frac{V(t)}{\ell} \times \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a} \\ &= V(t)I(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

と計算できる。これは抵抗で消費されるジュール熱に等しいため、ジュール熱発生元となるエネルギーはポインティングベクトルとして素子外部から素子内部へと輸送されていることが分かる。

次に半径 a (面積 πa^2) の平行平板のキャパシタを考えよう (図 3.1 中)。このキャパシタンス C は

$$C = \frac{\epsilon_0 \times \pi a^2}{d} \quad (3.16)$$

で表される。このとき電圧と充電された電荷の関係は

$$Q(t) = CV(t) \quad (3.17)$$

であり、平板間の電場の大きさ $E(t)$ は

$$E(t) = \frac{V(t)}{d} \quad (3.18)$$

である。電流 $I(t)$ の周りの磁束密度は導線から r 離れた場所で

$$B(t, r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \quad (3.19)$$

である。 d が十分小さければこの B は平行平板間でも連続になっていると見なせるため、平行平板の外縁部同士の間には存在する B は

$$B(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a} \quad (3.20)$$

と近似できる。また d が十分小さければ平行平板間の電場は一様かつ平行平板に垂直と見なせ、平行平板外縁部の電場は

$$E(t) = \frac{V(t)}{d} \quad (3.21)$$

と近似できる。したがって、単位時間あたりにこのコンデンサに流れ込むエネルギー $W(t)$ は

$$\begin{aligned} W(t) &= 2\pi a \times d \times E(t) \times \frac{1}{\mu_0} B(t) \\ &= 2\pi a \times d \times \frac{V(t)}{d} \times \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a} \\ &= V(t)I(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

と表され、ジュール熱の表式と同じになる。ただしこれは放射エネルギーとして失われるのではなくコンデンサ内に電場エネルギーとして蓄えられる。この蓄えられたエネルギー U は $W(t)$ を $t = 0$ から $t = T$ まで時間積分すれ

ば求まり、

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^T W(t) dt \\
 &= \int_0^T V(t) I(t) dt \\
 &= \int_0^T \frac{Q(t)}{C} \frac{dQ(t)}{dt} dt \\
 &= \frac{1}{2C} \int_0^T \frac{d}{dt} Q(t)^2 dt \\
 &= \frac{1}{2C} [Q(t)^2]_0^T \\
 &= \frac{1}{2C} Q(T)^2 \\
 &= \frac{1}{2} CV(T)^2
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

と見慣れた式になる (ただし $Q(0) = 0$ とした)。

最後にコイルを考えよう (図 3.1 右)。コイルの長さを ℓ 、コイルの巻き数を N 、半径を a (面積 πa^2) とする。このときインダクタンスは

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell} \tag{3.24}$$

で表される。 $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{I}$ を用いてコイル中の磁場密度 $B(t)$ を求めると

$$B(t) = \frac{\mu_0 N}{\ell} I(t) \tag{3.25}$$

となる。またコイルを構成する導線の全長は $2\pi a \times N$ と表されるため、コイルに沿って

$$E(t) = \frac{V(t)}{2\pi a \times N} \tag{3.26}$$

の電場が発生していると思わせる^{*6}。また $E(t)$ と $B(t)$ は互いに直行しており、そのポインティングベクトルはやはりコイルの中心を向く。コンデンサと同様にこのコイルに単位時間あたりに流れ込むエネルギー $W(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned}
 W(t) &= 2\pi a \times \ell \times E(t) \times \frac{1}{\mu_0} B(t) \\
 &= 2\pi a \times \ell \times \frac{V(t)}{2\pi a \times N} \times \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 N}{\ell} I(t) \\
 &= V(t) I(t)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

と表される。これもやはりジュール熱の表式と同じになる。ただしこれは熱として失われるのではなくコイル内に磁場エネルギーとして蓄えられる。この蓄えられたエネルギーは $W(t)$ を $t = 0$ から $t = T$ まで時間積分すれば求

^{*6} 完全導体中であればコイル内に電場が発生しても即座に電荷の移動が起きるため、コイル内部の電場はゼロになる。しかし実際には必ずコイルにも抵抗があるため、コイル内部にも電場があると考えて問題ないはずである。

まり、

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^T W(t) dt \\
 &= \int_0^T V(t) I(t) dt \\
 &= \int_0^T LI(t) \frac{dI(t)}{dt} dt \\
 &= \frac{1}{2} L \int_0^T \frac{d}{dt} I(t)^2 dt \\
 &= \frac{1}{2} L [I(t)^2]_0^T \\
 &= \frac{1}{2} LI(T)^2
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

と、これも見慣れた式になる（ただし $I(0) = 0$ とした）。

ここまで見てきたように、抵抗、キャパシタ、コイルのいずれの場合でも、素子に流れ込むエネルギーはポインティングベクトルとして素子外部の電磁場から素子内部へと輸送されていることが分かる。抵抗の場合はジュール熱として失われるが、キャパシタとコイルの場合はそれぞれ電場エネルギーと磁場エネルギーとして蓄えられる。これはより複雑な回路でも同様である。

コンデンサやコイルが C や L を持つのは分かりやすいが、実際の回路では導線自体がキャパシタンスやインダクタンスを持つ。例えば、2つの導体間に電位差があればその周辺に必ず電場が現れるため、導体表面でガウスの法則を適用すれば、そこには電荷が分布していることが分かる。これは何も平行平板のような特殊な形状を想定しなくても、豆電球の回路のような単純な系でもキャパシタとして振る舞うということである。表面の電場は電位差に比例し、また電荷分布は電場に比例するのだから、導体表面に分布する電荷は電位差に比例する。これは $Q = CV$ の関係式である。

また、導線に電流が流れるとその周りには必ず磁場が発生する。もし電流が時間変化すればこの磁場も時間変化し、時間変化する磁場を囲む経路ではさらに誘導起電力を生じる。この誘導起電力は注目している導線に分圧を発生させるため、回路の他の部分にある抵抗やキャパシタにかかる分圧を下げることになり、流れる電流を減らそうとする。これはコイルと同様の、磁場の時間変動を妨げようとする現象と同じであり、ただの導線であってもインダクタンスを持つことを意味する。導線に発生する分圧は起電力に比例し、起電力は磁場の時間変化に比例し、磁場の時間変化は電流の時間変化に比例するのだから、これも $V = LdI/dt$ の関係式が成り立つ。

3.4 伝送線

前節の議論も含め、教科書で回路を考える場合に回路の大きさは無視される場合が多い。すなわち、電源電圧が変化したという情報は瞬時に回路全体に伝わるという暗黙の了解がある。また電源から回路中の素子にどのようにエネルギーが輸送されるのかも説明されない教科書が多く、そもそもマクスウェル方程式などの取り扱いがあっても交流回路に全くページの割かれていない教科書も多い。

しかし実際の回路は有限の大きさを持ち、電源電圧やスイッチの操作という情報は、接続された素子まで瞬時に伝わらない。また閉回路に流れる電流 I はスイッチが閉じられるとぐるりと一周するように思い描くかもしれないが（例えば乾電池の陽極から I が流れ始め、回路を一周すると陰極に戻ってくる）、実際には $+I$ の電流と $-I$ の電流が対となって反対向きに流れるのである。加えて、電流を担うのは自由電子の動きであるが、電磁波によって運ばれる情報は電子の移動速度とは別物であり、電源から出た電子が光速で回路中をぐるりと回るわけでもない*7。

*7 地震が伝わるのは地面自身の遠方への移動ではないのと同様である。

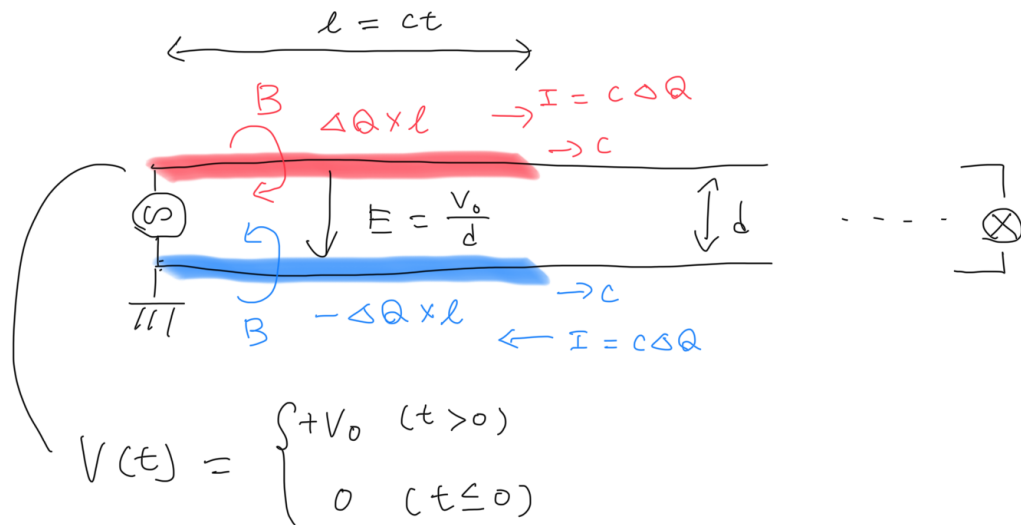


図 3.2 伝送線の概念図。

このような電流の動きと光速による遅延を意識するため、伝送線と呼ばれる回路を考えよう。最も単純な伝送線は、図 3.2 に示すように、抵抗の無視できる 2 本の平行な導線が長く伸びている構造である。(議論としてはここで不要だが) 伝送線の右端には豆電球が繋がれており、左端には電源が繋がれている。この電源は

$$V(t) = \begin{cases} +V_0 & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases} \quad (3.29)$$

で時間変化する^{*8}。また $t = 0$ の初期状態では、伝送線内に電荷の偏りはなく中性であるものとする。

$t = 0$ で電源電圧を変化させたとき、導線間には電位差が生じるため電場が作られる。この電場は上の導線から下の導線に向かい、導線表面に電荷を誘導する。この電荷は突然そこに現れるわけではなく、電源から供給されたものであり、全体としては電気的に中性を保っている。電荷は導体上を広がろうとするため右側へ移動するが、 $t > 0$ で電源の持つ電位差は一定であるため、電源からは電荷が供給され続ける。この電荷は $l = ct$ の距離で単位長さあたり ΔQ の分布を持つ^{*9}。

電荷分布は光速 c で右に移動する。すなわち上の導線には右側に $+I = c\Delta Q$ を、下の導線には左側に $+I = c\Delta Q$ もしくは右側に $-I = -c\Delta Q$ の電流を生じる。この電流は図 3.2 に示すように導線の周りに磁場を生じるため、電荷が右側に進むとともに、電場と磁場が導線に垂直な形を保ちながら伝播していく^{*10}。電場と磁場が一体となって光速で右に移動するため、それに応じて電荷分布がついてくると考えても良いし、磁場の時間変化と誘導起電力と電荷分布の変化はマクスウェル方程式を満たすように生じると考えても良い^{*11}。

このような伝送線を高周波信号（例えば USB ケーブルの接続によるコンピュータと周辺機器の通信）に使用するとどうなるだろうか。現実の世界には大量の電波が飛び交っているため、平行導線間には時間変化する電場や磁

^{*8} 電圧が不連続に変化する、すなわち時間変化が無限大になる現象は現実には起きないが、ここでの訂正的な議論には大きく影響しないため無視する。

^{*9} ΔQ は計算でき、単位長さあたりのキャパシタンスが $\Delta C = \Delta Q/V$ と定義される。

^{*10} したがってポインティングベクトルは右向きとなり、電磁場が右向きにエネルギー輸送することが分かる。

^{*11} いくつかの電磁気学の教科書ではマクスウェル方程式を因果関係のように解釈するものがある。この視点に立つと「磁場の時間変化が誘導起電力を生じて新たな電荷を誘導し、電荷の誘導と電荷分布の変化が電流となり、その電流が新たに磁場を生じる」という因果関係の連鎖として解釈することも可能である。しかしマクスウェル方程式は電荷と電流、電場と磁場がどのように微分方程式で関係しているかを示しているだけであり、因果関係（どちらかが原因でどちらかが結果）があると主張しているわけではない。同様に $F = ma$ の式も「力という原因があって加速度が生じる」という因果関係として見ることも可能だが、単に両辺が等しいという自然を表しているに過ぎないと考えることもできる。このような因果関係の議論は、例えば常定 [3] を参照されたい。

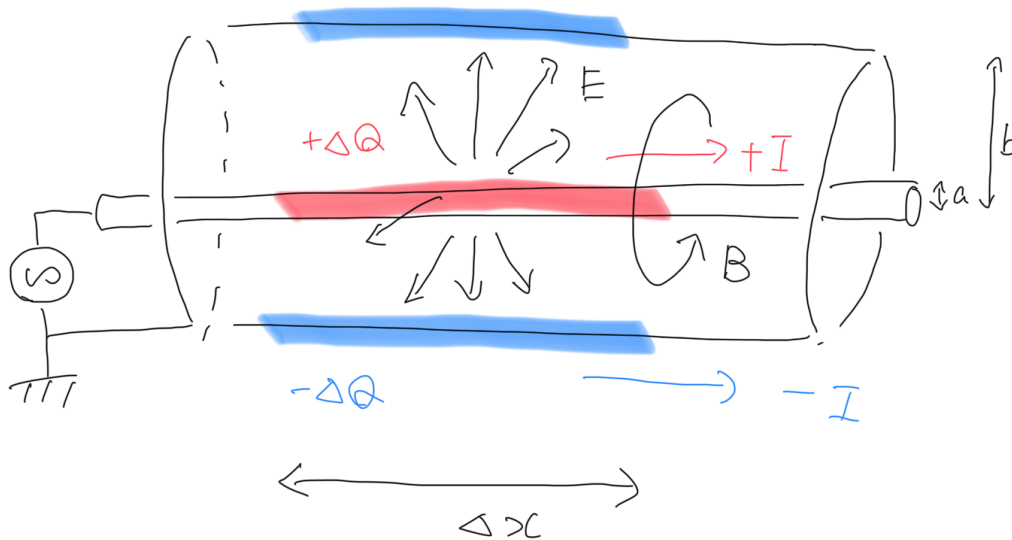


図 3.3 同軸ケーブルの概念図。

場が通り抜けることになる。これらは電磁場の誘導を導線上で発生させるため、講義で平行導線を使って実演して見せたように、元々の高周波信号にノイズを発生させてしまう。これを防ぐには、何かしらの方法で外部からの電磁波を遮蔽する必要がある。

また高周波信号（電圧の時間微分が大きい信号）を伝送する場合、電磁場の時間微分が大きくなるため周辺に電磁波を放射させやすくなる。これは元の信号のエネルギーを損失するため、周波数依存性のある信号の損失を招く（信号波形から高周波成分が失われる）ことになる。これを防ぐには、今度は電磁波を外部放射させない工夫が必要になる。

加えて、伝送線をさまざまな環境で使用するには構造が丈夫である必要がある。図 3.2 のように単純に 2 本の導線を並べただけでは、導線同士が接触して短絡したり、導線が断線したりする可能性が高い。

これらの諸問題を解決するのが、次節で説明する同軸ケーブルである。

3.5 同軸ケーブル

同軸ケーブルは図 3.3 に示すように、半径 a の内部導体と半径 b の外部導体と同軸上に配置された伝送線の一種である。外部導体は接地されて使われることが多く、内部導体と外部導体の間には誘電体（ポリスチレンなど）が充填されている。同軸ケーブルは外部導体自身が静電遮蔽によって電磁波を透過しないため、外部からの電磁ノイズに強いという性質を持つ。また内部導体と外部導体で逆向きの電流を流すため、同軸ケーブルの外には磁場が現れず電磁波を外部に放射しにくく、エネルギー損失や高速信号の波形変化も起きにくい。また充填された誘電体が導体の同軸構造を保つため潰す力に対して丈夫だけでなく、多くの場合細い内部導体と網線状の外部導体によって構成されるためケーブル全体の曲げにも強い。前節の単純な伝送線と比べ、同軸ケーブルは高周波信号の伝送に有利である。

3.5.1 同軸ケーブルのキャパシタンスとインダクタンス

このケーブルの内部導体と外部導体に電位差 V がかけると導体間には電場が発生し、両者の表面に電荷が誘導されキャパシタンスとして機能する。それでは同軸ケーブルの単位長さあたりのキャパシタンス C を計算してみよう。

中心軸から距離 r ($a < r < b$) 離れた場所の電場の大きさ $E(r)$ は、ガウスの法則を用いて

$$\frac{\Delta Q}{\varepsilon} = 2\pi r \cdot \Delta x \cdot E(r) \quad (3.30)$$

と書ける。ここで ε は誘電体の誘電率、 Δx はケーブルの部分長、 ΔQ はその部分に誘導される電荷である。これを变形すると

$$E(r) = \frac{\Delta Q}{2\pi r \cdot \varepsilon \cdot \Delta x} \quad (3.31)$$

が得られるので、電位差 V はこれを $r = a$ から $r = b$ まで積分することで求まる。

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b E(r) dr \\ &= \int_a^b \frac{\Delta Q}{2\pi r \cdot \varepsilon \cdot \Delta x} dr \\ &= \frac{\Delta Q}{2\pi \varepsilon \cdot \Delta x} \int_a^b \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\Delta Q}{2\pi \varepsilon \cdot \Delta x} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (3.32)$$

C は単位長さあたりのキャパシタンスなので、いつもの $Q = CV$ の関係式を単位長さあたりの $\Delta Q = C\Delta x \cdot V$ と書き換えれば、次の関係が得られる。

$$C = \frac{\Delta Q}{V \cdot \Delta x} = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln(b/a)} \quad (3.33)$$

次に同軸ケーブルのインダクタンスを考えよう。インダクタンスとは $V = LdI/dt$ の関係式を満たす量であったが、電流に対して $U = \frac{1}{2}LI^2$ のエネルギーを磁場として蓄える量とも言い換えられる。同軸ケーブルに電流 I が流れるときの周辺磁場はアンペールの法則により

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (3.34)$$

と表され (ただし μ は誘電体の透磁率)、誘電体以外の場所では $B = 0$ である。単位長さあたりの磁場のエネルギー ΔU は

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_a^b \frac{B(r)^2}{2\mu} \cdot 2\pi r \cdot \Delta x dr \\ &= \int_a^b \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\mu I}{2\pi r} \right)^2 \cdot 2\pi r \cdot \Delta x dr \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi} \Delta x \int_a^b \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi} \Delta x \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (3.35)$$

と計算できるため、単位長さあたりのインダクタンス L は

$$L = \frac{2\Delta U}{I^2 \cdot \Delta x} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (3.36)$$

と求まる。

すなわち、同軸ケーブルはキャパシタンスとインダクタンスの両方を持った伝送線であり、抵抗は存在しない (導体の抵抗が無視できる) もの、非ゼロのインピーダンスを持つ回路として振る舞うはずである。

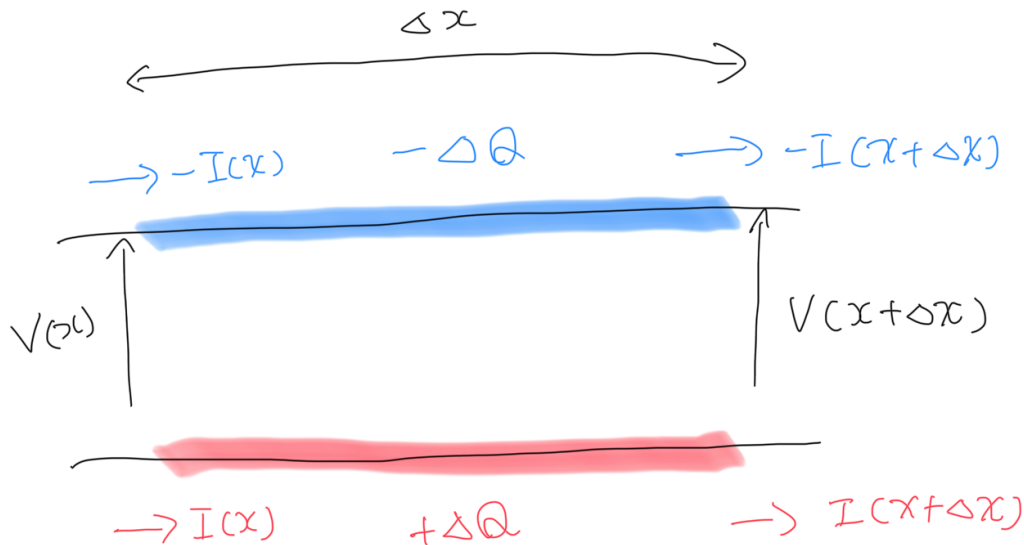


図 3.4 同軸ケーブルの素片中の電圧と電流の伝播の概念図。

3.5.2 同軸ケーブル中の信号の伝播

このようなケーブル内の電圧や電流の伝播が、先に述べたように（媒質中の）光速で進むということを波動方程式を解いて確かめよう^{*12}。図 3.4 のように同軸ケーブルを単純化した系の長さ Δx の素片を考える。ある時刻 t における左側の電位差を $V(x)$ 、右側の電位差を $V(x + \Delta x)$ とし、この素片には $V(x)$ の作る電場によって電荷 ΔQ が誘導されている^{*13}。またこの素片には左側から電流 $I(x)$ が流れ込み、右側から電流 $I(x + \Delta x)$ が流れ出ているとする。 I の値が負であれば、流出と流入は入れ替わる。

このとき、この素片のインダクタンスが作る起電力は x と $x + \Delta x$ の間で電圧降下として現れるため、

$$V(x + \Delta x) - V(x) = -L\Delta x \frac{\partial I}{\partial t} \quad (3.37)$$

と書ける。またこの素片に誘導された電荷 ΔQ は

$$\Delta Q = C\Delta x V(x) \quad (3.38)$$

と書ける。ここで電流とは単位時間あたりの電荷の流れであることを思い出すと、この素片における電荷保存則は

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial t} = C\Delta x \frac{\partial V}{\partial t} = I(x) - I(x + \Delta x) \quad (3.39)$$

となる。これら式で $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を考えると微分に書き直すことができるため、

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.41)$$

^{*12} この計算は光速を導出するわけではなく、あくまで確認である（矛盾しないことを確かめている）ことに注意してほしい。同軸ケーブルのキャパシタンスもインダクタンスも全てマックスウェル方程式にしたがっている話であり、これに従う電磁場は全て同じ微分方程式の解であり、その伝播速度は必ず光速になる。

^{*13} Δx が十分小さければ ΔQ は一様に分布していると考えて良いことに注意。

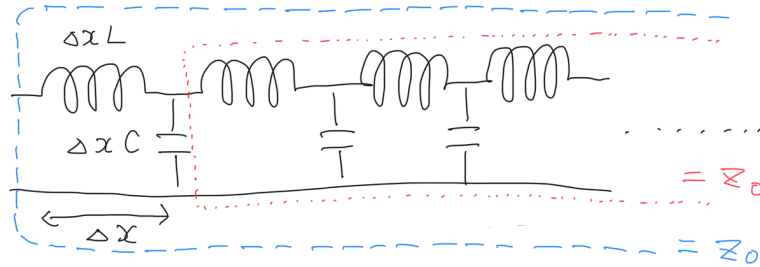


図 3.5 半直線状の同軸ケーブルの等価回路。

という偏微分方程式が得られる。前者を x もしくは t でさらに微分し $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$ の項を消すと

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (3.43)$$

の 2 階偏微分方程式が得られ、これらはいわゆる波動方程式の形をしている。この方程式の解は $V(x \pm vt)$ および $I(x \pm vt)$ の形をしていることが知られているので、同軸ケーブル内の電圧と電流は空間分布の形を保ったまま速さ $v = 1/\sqrt{LC}$ で右側もしくは左側に伝播することが分かる。

ここで、先に求めた同軸ケーブルの単位長さあたりのキャパシタンス C とインダクタンス L を用いて v を計算すると、

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.44)$$

となる。これは誘電体中の光速に等しいことが分かる。

3.5.3 同軸ケーブルのインピーダンス

ある電圧が同軸ケーブルにかかるると電荷 $\pm\Delta Q$ が誘導され、その電荷は電場と磁場を伴いながら光速で伝播する。この電荷はキャパシタンスに比例するのだから無限大には当然ならず、また光速も誘電体の性質で決まるため有限である。すなわち、同軸ケーブル中の電流は無限大にはならない。一方で同軸ケーブル中には（理想的には）抵抗がないため、インピーダンスを持たない抵抗ゼロの回路であれば無限大の電流が流れるはずである。この矛盾は、現実のケーブルは必ずインピーダンス、すなわち電流の流しにくさという性質を持つことで説明できる。

それでは、同軸ケーブルの複素インピーダンス Z_0 を求めてみよう。図 3.5 に示すように、同軸ケーブルを微小なコイルとコンデンサによってモデル化する。微小な長さ Δx ごとに $L\Delta x$ と $C\Delta x$ を持つ素片が半無限に接続されており、この回路全体の複素インピーダンスが Z_0 であるとしよう。このとき、図 3.5 の赤点線で囲んだ部分の複素インピーダンスは Z_0 であり、またこれに Δx の素片を一つ追加した青破線で囲んだ回路も、やはり半直線であるので複素インピーダンスは Z_0 である。

複素インピーダンスは合成できることを知っている。そこで青破線で囲んだ回路のインピーダンス Z_0 は、 $\Delta x L$ のコイルと並列で接続され、さらにそれらが $\Delta x C$ のコンデンサと直列に接続されていると考え、赤点線で囲んだ回路のインピーダンス Z_0 の合成として計算すると、

$$Z_0 = i\omega\Delta x L + \frac{1}{\frac{1}{i\omega\Delta x C} + \frac{1}{Z_0}} \quad (3.45)$$

と書ける。ここで ω は入力正弦波の角周波数である。この式を Z_0 について解くと、

$$Z_0^2 + (-i\omega\Delta x L)Z_0 - \frac{\Delta x L}{\Delta x C} = 0 \quad (3.46)$$

となる。これを解いて $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を考えると

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i\omega\Delta xL \pm \sqrt{-(\omega\Delta xL)^2 + 4L/C}}{2} \\
 &= \sqrt{\frac{L}{C}} \\
 &= \frac{\ln b/a}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\
 &= \frac{\ln(1/0.2785)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{2.26\varepsilon_0}} \\
 &= 50 \Omega
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

が得られる。ここで最後の数値計算で実際と同軸ケーブルの構造とポリエチレンの誘電率 2.26 を用いた。このように、素粒子物理や宇宙物理で使われる同軸ケーブルではインピーダンスが 50Ω になるよう設計されたものが使われている。

すでに計算で分かったように、同軸ケーブルはその長さによらずインピーダンスが一定という面白い性質がある。これは電圧を一度印加させて電流を発生させれば、ケーブルの長さによらず電流が減衰することなく一定方向に伝播し続けることを意味している。また途中式に存在した角周波数 ω も Z_0 には現れなかったため、同軸ケーブルのインピーダンスは周波数依存性を持たない。

Z_0 が実数であるということは、実数の $V(x, t)$ と $I(x, t)$ に対して $V = Z_0 I$ が常に成り立つということであり、単位時間あたりのエネルギー輸送である $VI = Z_0 I^2$ も抵抗のみを繋いだ回路と同様の形を持つ。しかし同軸ケーブルはエネルギーをジュール熱として消費しないため、送られてきたエネルギーはキャパシタンスとインダクタンスに静電エネルギーとして蓄えられる。

それでは節 3.3 で計算したのと同様に、同軸ケーブル中のエネルギー輸送を担うポインティングベクトルの計算を試みよう。図 3.3 に示した $E(r)$ と $B(r)$ は直交しているので、 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$ の向きは図中右向きになる。これを半径 $r = a$ から $r = b$ まで積分しよう。

$$\begin{aligned}
 \int_a^b S(r) \cdot 2\pi r dr &= \int_a^b \frac{E(r)B(r)}{\mu_0} \cdot 2\pi r dr \\
 &= \int_a^b \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{CV}{2\pi r \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r dr \\
 &= \frac{CVI}{2\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{1}{r} dr \\
 &= \frac{CVI}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a} \\
 &= VI \\
 &= Z_0 I^2
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

ここから、同軸ケーブルを通過するエネルギー輸送は $Z_0 I^2$ であり、同軸ケーブルと同じ大きさのインピーダンスの抵抗に信号を入力した場合の消費エネルギーと同じであることが分かる。

3.5.4 終端抵抗

同軸ケーブルに信号を伝播させた場合、もちろん半直線のケーブルがいつまでも続くわけではなく、通常の用途であればオシロスコープなどを接続する。オシロスコープは言わば時間変化を見ることのできる電圧計であるため、オシロスコープを同軸ケーブルに接続することによって回路に影響を与えてはならない。すなわち、オシロスコー

プの内部インピーダンスは無量大と見なせる程度に十分大きくなってはならない*14。

それでは、図 3.3 の同軸ケーブルの右端にインピーダンス $Z_L = \infty$ のオシロスコープを接続した場合を考えよう。これは何も接続しない状態に等しく、つまり図 3.2 に描かれているように右側に何も存在しない、すなわち同軸ケーブルが半直線ではなく線分の状態である。このとき、同軸ケーブル中を伝わってきた電磁場はどのような振る舞いをするであろうか。

電流 I は右側に導体が存在しないため、そのまま右に進み続けることはできない。電流が右に進めないため、電流の周りに存在する磁場もケーブルの右側には存在できない。また導体上にあった電荷分布もケーブル右側には存在できないため、電流だけでなく電磁場もこれ以上右には進めなくなる。

もし電流や電磁場がここで停止すると、ポインティングベクトルの持つエネルギーはケーブル右端に蓄えられることになるが、一定の電流が流れ続けていると右端でエネルギー無限大となる。これは物理的に起こり得ないため、電流と電磁場はケーブル右端で反射され、 $V(x - vt)$ で進んできた波動が $V(x + vt)$ の解を使って左側に戻っていくことになる。これは波の反射における開放端反射に相当する。

この状態でオシロスコープで電圧測定を行おうとすると、入射波と反射波の重ね合わせを観測することになってしまい、電圧が 2 倍になってしまう。また反射波はケーブル左端に戻ってきてしまうため、左端に接続された装置に影響を与えてしまったり、再度反射されればケーブル内で往復し続ける可能性がある。

このような事態を防ぐため、図 3.3 の右端、内部導体と外部導体の間には同軸ケーブルのインピーダンスと同じ大きさの**終端抵抗 (terminator)** $R = Z_0$ を接続するのが一般的である。終端抵抗には左から流入する $+I$ と $-I$ が打ち消し合うため、電氣的に中性になる。また $VI = Z_0 I^2$ のエネルギー輸送は RI^2 のジュール熱として消費されるため、ケーブルに反射波が発生しない。

*14 インピーダンスが無量大というのは、絶縁されている状態と同じである。すなわち同軸ケーブルから見ればオシロスコープが繋がっているのか繋がっていないのか区別のつかない状態である。

第 4 章

微分積分回路

補遺

A 中学・高校教科書での単位の扱い方

物理学科の学生が例えば光速 c を書く際に、 $c = 3.00 \times 10^8$ だったり $c = 3.00 \times 10^8 \text{ [m/s}^2\text{]}$ としてしまう事例を頻繁に見かける。これはおそらく、大学受験の物理では物理量を表す変数に具体的な数値を代入する問題が少なく、また高校での物理の指導でも単位の書き方などに注意が払われていないことが原因ではないかと考えられる。物理量というのは次元を持つものであり、数値部分だけでなく必ず単位を伴う。また単位の書き方は国際単位系 (SI) で定められているため、 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}^2$ という世界標準の書き方で書くのが物理論文では一般的である。

一方、日本の教育で最初に文字式を扱うのは中学 1 年生の数学であり物理ではない。そこでは図 A.1 に例を挙げると、文字 a に kg という単位は含まれておらず、あくまで数値部分のみを表す役割を果たしている。そのため物理の学習においても、文字には数値のみを含む、単位は含まないという数学の考え方が持ち込まれてしまっている可能性がある。

一方図 A.2 に示すように、同じく中学校の理科の教科書では物理量には単位が含まれることが教えられてはいる。しかしこの例では次元などの説明をするわけではなく、「単位がふくまれる」という説明以外に丁寧な書き方はされていない。 $V \text{ [V]}$ や $R \text{ [}\Omega\text{]}$ のような単位を括弧で囲む書き方についても、あくまで「ここでは説明のために単位も示している」とされている。しかし単位についてあまり意識せずこのような表記に触れると、先の数学の教科書の例と同様だと思い込んでしまい、 V 、 R 、 I には数値部分のみが保持されると勘違いするのは仕方がないかもしれない。また単位の書き方に $[\]$ が使われているため、物理量の単位は丸括弧や角括弧で囲むものと勘違いがさせている可能性がある。

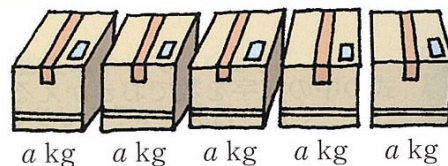
さらに図 A.3 に、高校の物理教科書でどのように単位が書かれているのかの例を示す。これを見ると中学理科と同様 (ただし同じ東京書籍である)、距離 L を表す際に「単位を明確にするため、 $[\text{m}]$ のように括弧をつけ」と注意書きがある。これはあくまで L の次元がなんであるかを意識させるためであって、物理学としては特殊な表記法である。数学のように L に次元を持たせずただの数字のみを入れろとか、単位は括弧で囲めという指導ではないことに注意が必要である。あくまで「斜体アルファベットで物理量 (数値と単位) を表す」のが基本である。

しかし、物理量や次元といったものに不慣れなうちにこのような中学・高校での記法を目にしてしまうと、物理

例 1 1 個 $a \text{ kg}$ の荷物 5 個の重さは、

$$(a \times 5) \text{ kg}$$

と表すことができる。



問 5 例 1 で、荷物が 1 個 12 kg のときの重さの合計を求めなさい。

図 A.1 中学数学の教科書での単位の記述例 (学校図書『中学校 数学 1』の p. 70 から引用) [4]

ここがポイント

オームの法則の式

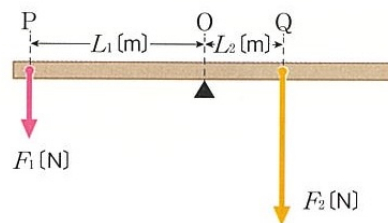
● 電圧 V [V] = 抵抗 R [Ω] × 電流 I [A] ($V = R \times I$)

● いっぱんに、 V 、 R 、 I などの変数には単位がふくまれるが、ここでは説明のために単位も示している。

図 A.2 中学理科の教科書での単位の記述例（東京書籍『新編 新しい科学 2』の p. 258 から引用）[5]

A 回転運動と力のモーメントのつり合い

物体の回転を考えるために、図6のような軽くて変形しない棒(剛体棒)の点Oを支点としてその両側に力を加えて、棒を回転させる場合を考えよう。点Oから距離 L_1 [m] の点Pに F_1 [N] の力と、点Oからの距離 L_2 [m] の点Qに F_2 [N] の力を、それぞれ棒に垂直にはたらかせ



▲図6 てこが水平につり合うときのきまり $F_1L_1 = F_2L_2$ では、棒は傾かない。

① 斜体アルファベットで物理量(数値と単位)を表している(⇒ p.470)が、本書では単位を明確にするために、(m)のように括弧をつけて示している。また、計算式の数値では単位を省略しているものもある。

図 A.3 高校物理の教科書での単位の記述例（東京書籍『改訂 物理』の p. 9 から引用）[6]

量には常に単位がくっついているものであるという原則を意識しないまま物理学科に進学してくるのかもしれない。これは単に高校までの教育が不十分であっただけであるから、物理学科進学後は十分に注意を払ってもらいたい。

B 質問と回答

B.1 2025 年度

不確かさが大きい場合の誤差伝搬 (10/14 講義)

Q.

講義では誤差伝搬の二乗和の式を導出する際に、それぞれの測定値に伴う不確かさが十分小さいと仮定し、テイラー展開の一次までを考慮して二次以降は無視していた。もし測定に伴う不確かさが大きく、二次以降を無視できない場合はどのように考えれば良いのか。

A.

2つの考え方が思いつきます。1つ目は、講義で扱ったのと同様に偏微分を用いて二次の項も取り込む方法です。 $f(x_1, x_2)$ を考えるとして、

$$V(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 V(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 V(x_2) \quad (\text{B.1})$$

が一次までの場合でしたが、二次まで考慮すると

$$V(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 V(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 V(x_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)^2 V(x_1)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)^2 V(x_2)^2 \quad (\text{B.2})$$

という式が出てくると思います。この計算を使用するのがひとつの考え方です。

2つめの考え方は、モンテカルロ法 (乱数を用いて解析的には計算しない方法) です。それぞれの測定値 x_1 と x_2 の周りに、不確かさがどのような確率分布 (ガウス分布など) をしているかを仮定し、 x_1 と x_2 の値をその分布の中でランダムに多数の組み合わせを生成します。その値に基づいて $f(x_1, x_2)$ を全ての組に対して計算し、 f がどのような確率分布をとるかを得ます。 f の不確かさとして、この確率分布の標準偏差を採用するというやり方が考えられます。

後者のやり方のほうが、 x_1 や x_2 の不確かさの確率分布がどのような形状でも取り扱え、また解析的に計算できないような状況でも適用することが可能です。一方でモンテカルロ法を走らせるための計算機コスト (CPU 処理時間) が発生するので、状況によって使い分けるのが良いと思います。

デジタルのテスターの利点 (10/14 講義)

Q.

講義で使用したアナログテスターと別にデジタルテスターを少しだけ実演していたが、測定精度以外でデジタルテスターを使用する利点は何か。

A.

測定値がデジタル表示されるため測定者によって読み取り方が変わることがなく、実験の再現性を担保しやすい。また目盛りを人の目で読むよりも分解能が高いのが一般的なため、2つの乾電池の電圧の差の測定なども簡単になる。また計算機に USBなどで接続して測定結果を取り込むことも機種によっては可能なため、繰り返し測定、長時間測定、データ解析などが簡単になる。

繰り返し測定の回数の考え方 (10/14 講義)

Q.

測定値に揺らぎがある場合、同一の測定をくり返すと標本平均がより良い母平均 (真の平均) の推定値になることは講義で理解した。では、実際の測定ではどれくらい測定を繰り返すのが適切なのか。

A.

講義で扱ったように、平均値の推定の不確かさは σ/\sqrt{n} で計算できるため、測定回数 n を大きくすればするほど不確かさは小さくできます。しかし多くの場合で測定時間は n に比例するため、時間的な制約、実験費用の制約が効いてくる場合がほとんどです。例えば生物の実験では、この n はマウスの匹数に該当するかもしれません。その場合、むやみにマウスを殺してしまうのは避けるべきという倫理的問題も関係してきます。

また、 n を大きくしても \sqrt{n} でしか結果が良くなっていかないため、10 倍小さい不確かさにしようと思うと n を 100 倍にしなくてはなりません。どんどん効率は悪くなっていきます。

さらに、 σ/\sqrt{n} がいくら小さくなったところで、物差しがそもそも不正確であるなどの系統誤差を小さくすることはできません。したがって、繰り返し測定での測定の不確かさよりも系統誤差が大きくなるような n の領域では、 n を増やすことよりも系統誤差をいかに低減するかに注力したほうがよいでしょう。

測定方法による揺らぎや誤差の違い (10/14 講義)

Q.

式だけで見ると同じものだけど、測定方法によってゆらぎや誤差が異なることはあるのでしょうか。(原文ママ)

A.

これは質問の意図がいまいち分からなかったため、また講義のときにでも質問してください。

想像で書きますが、 $1.00 \pm 0.05 \text{ mm}$ のような表記があった場合に、 $\pm 0.05 \text{ mm}$ の部分に数値だけからは読み取れない情報は存在するか、という質問だと仮定します。不確かさの与え方として、最大最小を与える場合（ノギスで目盛の半分を与えるなど）や標準偏差を与える場合があります。これは数値だけでは測定者が何を意図しているか分からないため、測定者が論文やレポートでどのように不確かさを与えたかを明記する必要があります。詳しくは TACT の講義補足資料を参照してください。

電子の運ぶエネルギー (10/21 講義)

Q.

エネルギーを運ぶのはポインティングベクトルであって電子ではないという説明をもう少し詳しく。

A.

講義では少し説明不足だったかもしれません。電子の移動 (= 電流) が発生するとその周りに磁場が発生し、電場とのクロス積でポインティングベクトルが生じ、これが電磁場のエネルギー輸送を担います。このエネルギーは回路中の抵抗でジュール熱として消費されたり、キャパシタやインダクタにエネルギーとして蓄えられます ($1/2LI^2$ や $1/2CV^2$)。電流の周りに生じる磁場を考えているので、もちろん電子の移動 (電荷の移動) が起きないとこのポインティングベクトルも生じないため、そういう意味では電子がエネルギーを運んでいると言っても良いのかもしれませんが、電子の持つ運動エネルギーは十分に小さく (電子が光速で移動しているわけではない)、エネルギー輸送を運動エネルギーという形で行なっているわけではないという意味で、電子はエネルギーを運んでいないと説明しています。

補足資料の補足 (10/21 講義)

Q.

notes_v20251016.pdf の p5 に「 $1 \times 10 \pm 1$ や 1.00 ± 1 と書いてしまったときの違和感」とあるが、前者に対して違和感があるというのが分からない。この記述は何かおかしいのか。

A.

「 $1 \times 10 \pm 1$ 」を ①「 1×10 」と ②「 ± 1 」に分解しましょう。①のほうは有効数字が 1 桁しかありませんので、2 桁目が四捨五入されていると考えれば 5~15 を表す、つまり 10 ± 5 を表していると考えられます。しかし ②はこ

れより小さい不確かさを表しているため、測定値の表記自体の持つ不確かさと、測定に起因する不確かさの整合性がありません。不確かさが本当に ± 1 の小ささなのであれば、①は有効数字 2 桁にして、11 なり 13 なり、1 の位まで記入できるはずですが。「 1.00 ± 1 」のほうは逆に、不確かさが ± 1 もあるのだから、1.00 のように小数点第二位まで正確に記述することはできないはずだ、と考えることになります。

定常電流の場合のポインティングベクトル (10/21 講義)

Q.

豆電球の回路に定常電流が流れている場合、磁場の時間変動によって電場は発生しないので、ポインティングベクトルはゼロにならないか。

A.

定常電流 I が発生していると、その周りに右ネジの法則で静磁場が発生します。このとき、電源の $+V$ と豆電球の間の導線の電位は常に $+V$ 、電源の GND (グラウンド) 側と豆電球の間の電位は常にゼロになります。また電源の電位差 V は、豆電球 (抵抗) での電圧降下と等しくなります。このとき、 $+V$ 側の導線とゼロ側の導線の間は電位差 V が発生していますので、電場が発生しています。この電場は導線から垂直に出ており (導体表面から出る電場は放線方向を向いている)、導線を取り囲む磁場と (導線近傍では) 垂直ですので、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ が非ゼロになります。これが定常電流のときのポインティングベクトルです。

オシロスコープの仕組み (10/28 講義)

Q.

オシロスコープは 1 ns レベルの短い時間をどのように正確に計測しているのか。

A.

オシロスコープにはクロック生成用の素子が内蔵されており、それを使用して 1 ns 刻みなどに電圧測定する仕組みになっています。クロックとはコンピュータの CPU などでも「クロック周波数」と性能指標が使われるように、2 つの基準電圧の間を行ったり来たりする矩形波のことです。この素子を使って、例えばオシロスコープでは 1 GHz の周波数で矩形波が生成されています。オシロスコープに入力された電圧の時間情報は、このクロックにしたがってデジタル・アナログ変換 (Analog-to-Digital Conversion、ADC) されます。この ADC の回路はオシロスコープの種類によって様々だと思いますが、1 GHz のクロックが内部で使われていれば、1 GHz で ADC が動作しアナログの入力信号がデジタル化されます。さらにその出力をオシロスコープ内部のメモリ上へ転送し、書き込みし続けます。この際、無限の時間を記録することはできませんので、例えば 1000 個の電圧値を記録できるようなメモリを使用します。1 番目から 1000 番目まで電圧をデジタルデータとして書き込み続け、1000 番目に達すると 1 番目に戻って過去の電圧の記録値を上書きしていきます。オシロスコープのトリガー閾値を超える電圧入力があったとき、この時刻の前後前後 500 ずつの電圧を時間の関数として画面に表示します。オシロスコープの縦軸のスケールを変える動作は、入力電圧と ADC の間にある増幅器 (アンプ) の増幅率を変化させることに相当しています。また横軸の時間スケールを変える動作は、上記クロックの周波数を変更することに相当しています。これにより、様々な入力電圧の範囲、時間スケールの範囲でアナログ信号を可視化することができるのです。例えば [CQ 出版の解説](#)などが参考になるとと思います。

オシロスコープの読み取り方 (10/28 講義)

Q.

オシロスコープの波形から数値を読み取る時、目分量で読み取るのによいのか。誤差が大きくなってしまわないか。

A.

目分量で読み取ると、どの程度の粗さで読むかによって当然誤差が大きくなります。今回の講義中にはプロジェクトで映した波形を見て、私も「大体パルスの幅は 50 ns とか 60 ns くらいですね」のように発言していたと思います。このパルスの幅が正確にどの程度かをちゃんと評価し、またその幅を使って何か目的となる物理の議論をするためには、もちろんより定量的な読み取りが必要になります。ただし今回の場合は、1つ目のパルスと2つ目のパルスが同じような形であり、反射成分を見ているという説明に対する実験的な傍証を与えるために観察していますので、そこまで定量的な評価は必要ありません。もしより精確に波形を読み取る場合は、例えば台形状の波形の場合に信号幅をどのように定義するか（例えば半値全幅 = 最大と最小の半分の電圧における幅を見る）、オシロスコープの線の描画の太さをどのように扱うか、最大値と最小値を読み取る時にノイズによる揺らぎをどのように扱うかなど、考える必要があります。また時間情報や電圧情報をより細かく読み取るためには、縦軸や横軸のスケールを変更するのも有効な手段です。

1/e (11/11 講義)

Q.

なぜ指数関数の特徴量として $1/e$ になる値を使うのか。

A.

指数関数は一般に $y = A \exp(-x/B)$ と書くことのできる関数です。その形状を特徴づけるのは変数 A と B であり、($x > 0$ の場合) A は関数の最大値、また B は最大値が $1/e$ にまで減る x の値から得られます。

接地 (11/11 講義)

Q.

接地（アース）とは何か、改めて説明してほしい。

A.

導体が帯電した場合、ガウスの法則によって導体表面には必ず電場が発生します。もしくは電位の異なる導体間には電場が発生し、導体表面にはガウスの法則を満たすように電荷が分布します。分かりやすい例が、冬の乾燥した時期に帯電した人間の体とドアノブの間の電位差ではっせりする静電気です。我々が何か電圧や電流の測定をするとき、測定の基準となる電圧が上がったり下がったりしてしまうと電圧の測定結果が不安定になります。測定装置のあらゆる場所に金属が使われているため、これら導体に電荷を生じて部品ごとに電圧が異なる状況は好ましくないわけです。ここで $Q = CV$ の関係式を思い出しましょう。もし容量の十分大きい C を測定系内に用意でき、その C にあらゆる同電位になってほしい部品を接続しておけば、 C が十分大きいので、どれだけ大きい Q を帯電してしまったとしても V は小さくなります。すなわち、帯電しても測定系の電位の変化が無視できます。このような C を装置ごとに用意するのは大変ですので、そうだ、地球に接続してしまえばよいじゃないか、というのが接地の考え方です。測定系の基準電圧にしたい部分（例えばオシロスコープと同軸ケーブルの接続では同軸の外部導体）を全て地球とショートさせてしまえば、余計な電荷は地球に流れ込んでくれますので、測定系に影響を与えません。ずーっと地面に触れ続けていれば静電気が生じないのと同様です（靴底で人体と地球が絶縁され、数時間に1回しかドアノブに触れないため放電します）。

似た用語に「グラウンド (ground, GND)」があります。これは測定系の基準電位のことです。これを地球にしたものがアースです。

洗濯機などの家電でアース線が存在するのは、万が一漏電が発生し濡れている家電筐体の電位が人体の電位よりも高くなってしまうと、そこを触れた人体を経由して家電と地球の間に電流が発生して感電するのを防ぐためです。より抵抗の低いアース線を接続することで、電流がアース線経由で地球に流れ込みます。

携帯電話 (11/25 講義)

Q.

なぜ「スマホ」ではなく「携帯電話」と呼ぶのか気になります。

A.

これは質問ではないかもしれませんが、意図的に「スマホ」という言葉を使わないようにしているので説明します。(「あ、こいつは思想の面倒臭いやつだな」と分かると思います。) 一つ目の理由は、日本語で言えるものはカタカナ語を使わずに可能な範囲でなるべく日本語で言おうという思想を持っていることです。smart phone に該当する日本語がないため、最も適切な言い換えである「携帯電話」という言葉を使っています。二つ目の理由は、Apple「信者」だからというものです。携帯電話に全面タッチパネル液晶を採用したものが iPhone であり、その登場時に smart phone という言葉は一般的ではありませんでした。その後多くの携帯電話端末の製造元が iPhone を模倣した製品を販売し始め、それを smart phone と呼び始めました。しかし iPhone は iPhone であって、smart phone ではありませんので、携帯電話端末全般を総称して「スマホ」と呼びたいと思いません。そのため、さらに注意して聞いてもらおうと、講義中に「iPhone や携帯電話で」のような表現をしていることもあると思います。三つ目の理由は、別に smart だと思ってもいけない粗悪な端末も含めて smart という褒め言葉を使いたくないからです。

微分・積分回路 (11/18 講義)

Q.

微分・積分回路の説明で「 Q/C を無視 → 低・高周波を選択的に通す」という論理展開の部分が分からなかったので、補足説明が欲しい。

A.

まず積分回路のほうから説明します。251111ExpPhys_Lecture6.pdf の 7 ページ目を参照してください。

$$V_{\text{in}} = \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} \quad (\text{B.3})$$

$$V_{\text{out}} = \frac{Q}{C} \quad (\text{B.4})$$

を考えます。もし V_{in} の時間変化が十分大きい場合、すなわち角周波数 ω が大きい場合、右辺第 1 項も十分大きくなるため、 Q/C は無視できるはずですが、異なる言い方をすると、 Q/C が無視できるほど大きい ω の場合のみを考えます。そうすると上式は

$$V_{\text{in}} = \frac{dQ}{dt}R \quad (\text{B.5})$$

$$V_{\text{out}} = 0 \quad (\text{B.6})$$

と近似できますので、出力である V_{out} はゼロ、すなわち、高周波の入力を積分回路は通さないということになります。次に ω が小さい場合を考えると、今度は dQ/dt が小さいはずですので、

$$V_{\text{in}} = \frac{Q}{C} \quad (\text{B.7})$$

$$V_{\text{out}} = \frac{Q}{C} \quad (\text{B.8})$$

という式に近似できます。これは低周波の極限の状態、すなわち電圧一定の入力を素通りさせるという状態を示します。これら 2 つの特性を合わせて、高周波は通さない、低周波は通すという選択的な振る舞いをするという定性的な説明に繋がります。

この低周波や高周波というのをより定量的に考える基準が、スライドの $RC\omega \ll 1$ とか $RC\omega \gg 1$ に相当します。次に微分回路ですが、これは積分回路の R と C の位置を入れ替えただけですので、同様の議論が成り立ちます。

NAND 回路中のトランジスタの電流 (12/2 講義)

Q.

今回扱った NAND 回路では、大きな電流が発生するのは入力 A、B ともに 5V になっている状態のときのみか。

A.

1) $A = B = 5\text{V}$ の場合 251202ExpPhys_Lecture8.pdf の 21 ページ目にあるように、 $I_{\text{total}} = 3.2\text{mA}$ 、 $I_C \approx 5\text{V}/470 = 10.6\text{mA}$ となるため、14mA 程度が合計で流れます。

2) $A = 5\text{V}$ 、 $B = 0\text{V}$ の場合 23 ページ目の状態となり、実効的な等価回路をかなり簡略化することができます。B のダイオードの電位差を 0.6V と考えると、 $4.4\text{V}/1\text{k} = 4.4\text{mA}$ 流れます。Out = 5V となるので、470 の抵抗には電流が生じません。

したがって、大きな電流が発生するかという質問が I_C についての質問であれば、1) のときのみが該当します。もし質問が回路全体の電流の話であれば、1) でも 2) でも 3 倍程度しか電流の差は生じません。

理論値と実測値のずれ (12/2 講義)

Q.

NAND 回路の振る舞いの理論値と実測値の差の原因は何か。温度や回路自体の精度が関係するのか。

A.

最大の要因は、トランジスタやダイオードの電位差が導通時に 0.6V で一定になると近似していることです。251202ExpPhys_Lecture8.pdf の右図に示したように、ベース・エミッタ間電圧が 0.6V 付近になるとベース電流が急激に上昇しますが、これは連続関数です。一方で講義の計算では、これが 0.6V で垂直に不連続に立ち上がる（電圧一定であるものの、流れる電流は周辺に接続された他の素子の状況により任意の電流値を取れるという意味）と近似しました。そのため D の電圧の実測値は 0.6V ではなく 0.77V になっていました。

もう少し詳しく現実の様子を考えてみましょう。この図から読み取ると、ベース電流 I_B はおよそ 1mA になると期待されます（温度 25°C を仮定）。D に繋がった 1k 抵抗には、電位 0.77V がかかっているため、0.77mA 流れます。そうすると先の 1mA と合計しておよそ 1.8mA の電流が C の上側の抵抗にも流れるため、ここで 1.8V の電圧降下が起きます。したがって、C の電圧は $5 - 1.8 = 3.2\text{V}$ になるはずですが、実測では 1.84V しかありませんでした。したがって左側の 1k には実際には 3.16mA 流れているはずですが。

C と D の電位差は $1.84 - 0.77 = 1.07\text{V}$ ですので、それぞれのダイオードには 0.54V 程度の電位差になっており、これも 0.6V とは異なります。ただし、0.54V の電位差では 3.16mA も流れないはずですので（ダイオードの測定の回の実測では 0.6V で 1.2mA）、上記の計算のどこかで間違いがあるのだと思います。

可能性としては、ベース電流をグラフから読み取るのに 25°C を仮定しましたが、実際には発熱により 35°C 程度まで上昇していた可能性があります。そうすると 2mA 程度のベース電流になっていたのかもしれませんが。

以上のように、温度依存性が大きく、かつ非線形の応答をする素子の場合には、講義でやったような「理論」計算はあくまで大雑把な近似であると考えておいてください。

回路図における電源電圧の書き方 (12/2 講義)

Q.

例えば今回の NAND 回路の回路図にあるように、電源として 5V とだけ端子の先に書かれており、電源の回路記号（干みみたいなもの）が接続されていないものを頻繁に見かける。実際の回路はどうなっているのか。

A.

5V のように書かれているものは単に電源部分を省略して書いてあるだけで、電源も回路図中に書き込もうと思えば、おっしゃる通り電源の回路記号も記入する必要があります。

しかし実際の電子回路では、NAND 回路の電源部分に直接低圧電源などの装置が接続されているわけではなく、例えばノイズを抑えるためのフィルター回路（微分積分回路の回を参照）などが接続されている場合もあり、単に電源記号だけでは表せなくなります。そのため、「何が繋がっているか分からないけれど、ともかく理想的な 5V の一定電圧に保たれている」程度の緩い考え方で、5V ととだけ略記しています。

ダイオードの振る舞い (12/2 講義)

Q.

NAND 回路の出力が 5V になる場合（課題の表で 2~3 行目）に D の電圧が 0V になるのは、ダイオード内に電流が流れなくても電圧降下は起きるといふ解釈で良いのか。

A.

これはダイオード内で電圧降下が起きていると考えるべきではありません。この場合、C の電圧が 0.6V 程度になるため C-D 間のダイオードには電流が流れません。したがって D に接続された抵抗にも電流が流れないため、1k 抵抗での電圧降下はゼロとなり、D の電位は GND と等電位 (= 0V) になります。

C-D 間の電圧は約 0.6V ですから、この電位差を電圧降下と考えたということだと思いますが、電圧降下というのは通常の抵抗を電流が流れた際に発生させる電位差（電子が得る電位ポテンシャルが抵抗素子中で熱として失われる量に等しい）のことです。もし連結させた 2 つのダイオードに全く電流が流れていない状態であれば、そこは絶縁体が入っている状態、もしくは C-D 間が全く接続されていない状態と同様ですので、電圧降下だとは考えません。

ただし、ダイオード間に十分な電位差が与えられていなくても、ごく僅かな電流は流れます。つまり低い電圧を印加したダイオードは非常に大きな抵抗（ただし非線形な抵抗）と考えることもできますので、その場合は微小電流が大抵抗で起こした電圧降下だと説明しても良いかもしれません。

0.6V という値の要因 (12/2 講義)

Q.

Si ダイオードに電流が流れ始める 0.6V という印加電圧の値はどのような性質によるものか。

A.

0.6V というのは、P 型半導体と N 型半導体の接合をした際に生じる電位障壁に由来します。0.6V の電位差を与えると電子がこの障壁を超えるのに十分なエネルギーを得るため、PN 接合を乗り越えて電流が流れるようになります。この 0.6V という値はシリコンの物性で決まっているため、他の結晶を使った半導体では値が異なります。

量子コンピュータとの違い (12/2 講義)

Q.

量子コンピュータでの論理演算とはどのように違うのか気になった。

A.

私も詳しくありませんが、講義で扱った「古典的な」論理回路では入出力に重ね合わせの状態は存在しません。すなわち、入出力の電圧の高い・低い の 2 種類のどちらかしか選択できません。一方で量子コンピュータではこの重ね合わせの状態が可能ですが、観測時には 0 か 1 のどちらかになります。

時定数 (11/18 講義)

Q.

微分積分回路に現れる時定数とは何を表しているのか。

A.

時定数とは、時間的に変化する物理現象などを指数関数で表せるときに出てくる定数のことです。例えば

$$f = A \times \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{B.9})$$

や

$$f = A \times \left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right\} \quad (\text{B.10})$$

という式の τ が時定数です (t は時間)。

微分積分回路では R と C の直列回路を作りますが、その両端に電圧を印加した際に R と C それぞれの分圧は時間変化します。これは、 C に電荷が貯まるには R を流れる電流を時間積分する必要があるためであり、直列回路の印加電圧を急激に上昇させても C の分圧はすぐに印加電圧には達さず ($t = 0$ で $Q = 0$)、まずは電流による R の分圧 ($t = 0$ で $V = RI$) が支配的になるという定性的な理解ができます。

このとき講義で扱ったように R と C の分圧は指数関数でそれぞれ減少、増大します。また $\tau = RC$ になることが計算から分かります。

停止した粒子 (12/9 講義)

Q.

物質中に入射してエネルギーを失った粒子は、その後どうなるのか。消失するのか。

A.

消失するものとしなないものがあります。消失するものは、対消滅を起こす粒子もしくは崩壊する粒子です。消失しないものは、運動エネルギーを失っても存在し続ける安定した粒子です。

前者には例えば以下のものがあります。

- 陽電子 (電子と出会うと対消滅し、2体のガンマ線になる)
- 中性子 (他の原子核に捕獲されない場合、ベータ崩壊して陽子、電子、ニュートリノになる)
- ガンマ線 (エネルギーをコンプトン散乱や光電吸収で電子に渡し、最終的に消失する)

後者には例えば以下のものがあります。

- 陽子 (周囲の電子を奪って水素原子となり、その後なんらかの反応を周囲の物質と起こすはず)
- 電子 (原子核に束縛され、全体として電子が多い状態になるため、その後電荷として移動するはず)

Q.

A.

B.2 2024 年度

B.3 2023 年度

参考文献

- [1] Taylor, J. R. (2000) 『計測における誤差解析入門』, 東京化学同人, 林茂雄・馬場涼訳.
- [2] Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (1971) 『ファインマン物理学 IV』, 岩波書店, 戸田盛和訳.
- [3] 常定芳基 (2024) 『電磁気学基礎論』, 共立出版.
- [4] 池田敏和他 (2025) 『中学校 数学 1』, 東京書籍, 平成 6 年 2 月 16 日検定済.
- [5] 永原裕子他 (2025) 『新編 新しい科学 2』, 東京書籍, 令和 6 年 3 月 11 日検定済.
- [6] 三浦登他 (2021) 『308 改訂 物理』, 東京書籍, 平成 29 年 2 月 27 日検定済.