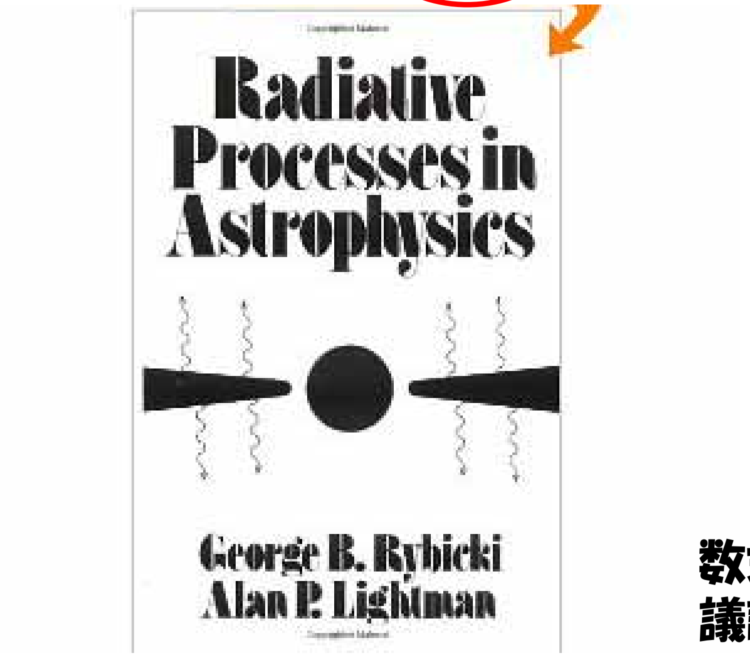
天体物理特論

浅野 勝晃

目標：天体からの放射過程を理解する

天体物理における2本柱

流体 輻射



"Radiative Processes in Astrophysics"

Rybicki & Lightman

1. 輻射輸送
2. 電磁波の基礎理論
3. 荷電粒子からの放射
4. 放射に対する相対論的効果
5. 制動放射
6. シンクロトロン放射
7. コンプトン散乱

数式の変形よりも、論理展開の把握を重視。
議論の前提、観測から導き出せる物理、適用限界などを理解する

成績評価：出席＋議論への積極性（＋レポート）

http://www.ircs.titech.ac.jp/asano/RiKKyo.pdf

天体物理を学ぶ意義

我々が住む宇宙の歴史を知る

宇宙の観測と基礎科学

1687　ケプラーの法則をニュートンが説明
1929　ハッブルの観測が宇宙膨張を示唆
1932　宇宙線の中から陽電子
1937　宇宙線の中からミューオン
1947　宇宙線の中からπ中間子
1947　宇宙線の中からK中間子
1970-　太陽ニュートリノ問題（ニュートリノ振動）
1972　BH候補天体Sco X-1
1975　暗黒物質
1978　連星パルサー（重力波の間接証拠）
1979　重力レンズ天体
1992　CMBの揺らぎ（インフレーション）
1998　加速膨張（暗黒エネルギー）

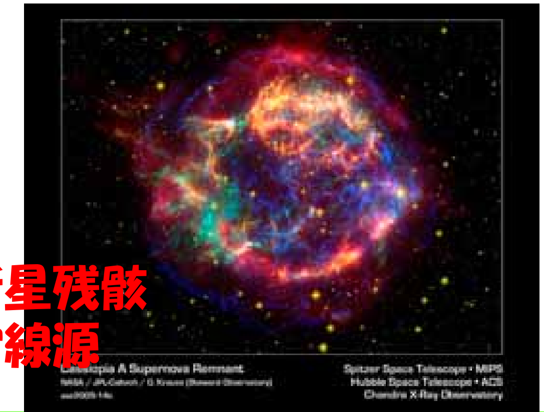
地上実験は1970年代に完成した素粒子標準理論と無矛盾。しかし、素粒子理論は宇宙観測から要求される、暗黒物質、暗黒エネルギー、インフラトンを説明しなくてはいけない。今後も宇宙の観測は基礎科学の方向性に影響を与えるかもしれない。（今以上の情報を引き出せるか？）

宇宙物理の現状

宇宙論：宇宙の年齢、密度、膨張則、インフレーションなど大枠は確立。
⇒初代天体形成、宇宙の再電離などへ興味は移りつつある。

天体物理：星・銀河形成、ブラックホールからのジェットなど、様々な課題が残されている。

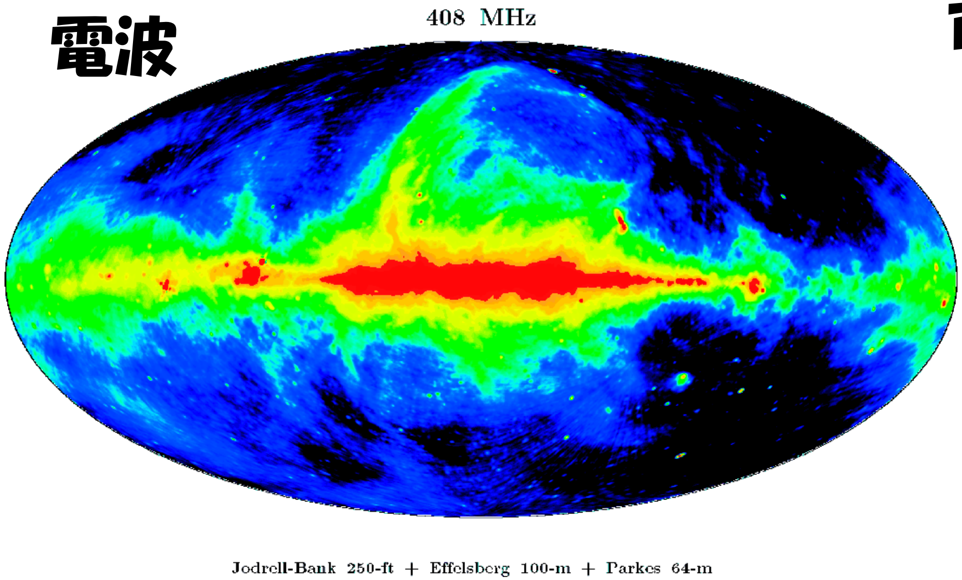
両分野共、電磁波による観測と理論の比較が主な研究手段。



超新星残骸
宇宙線源

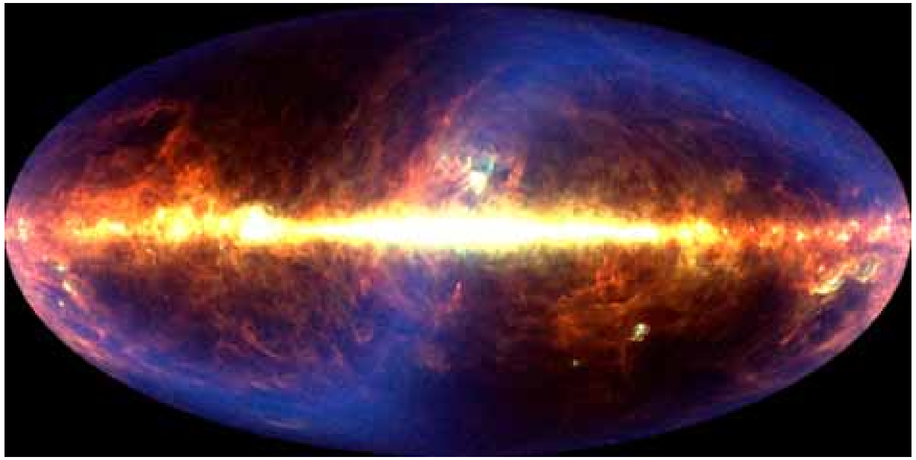
様々な波長で見た宇宙

電波

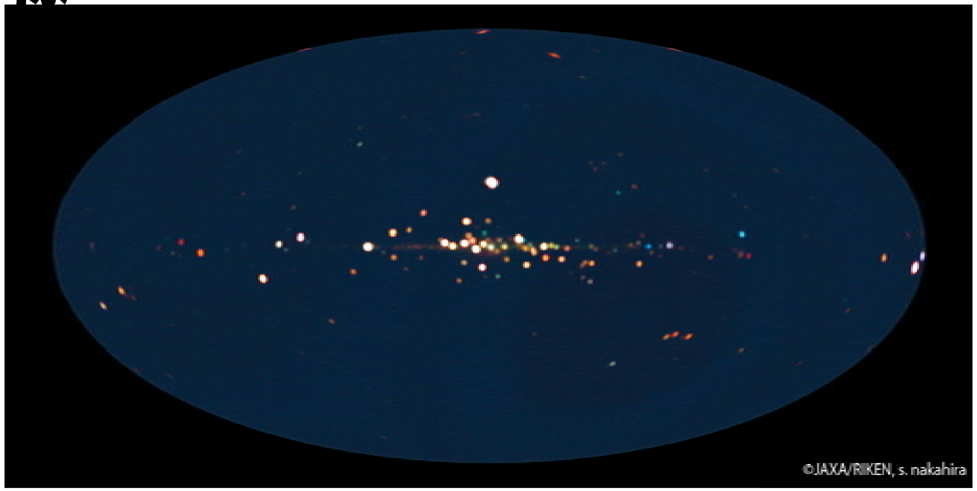


可視

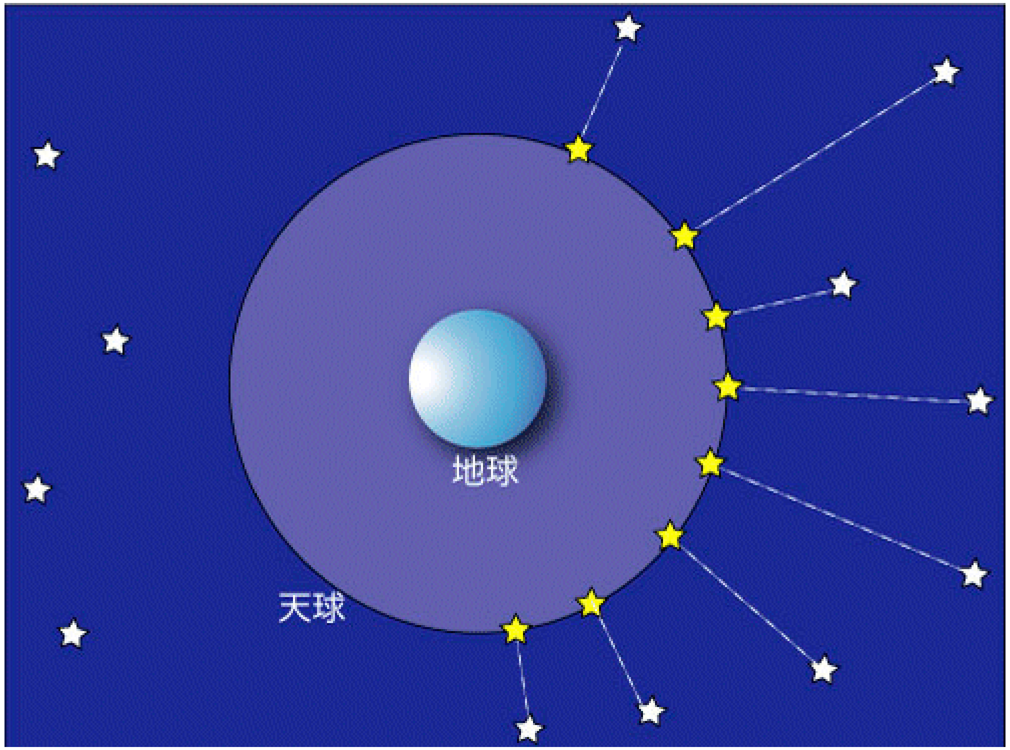
赤外



X線



全天マップ



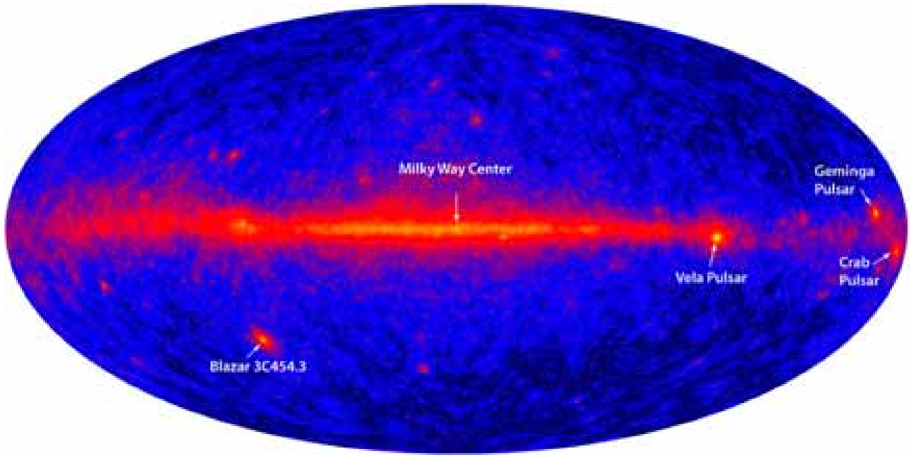
三次元分布を二次元に射影

地球（等積図法）

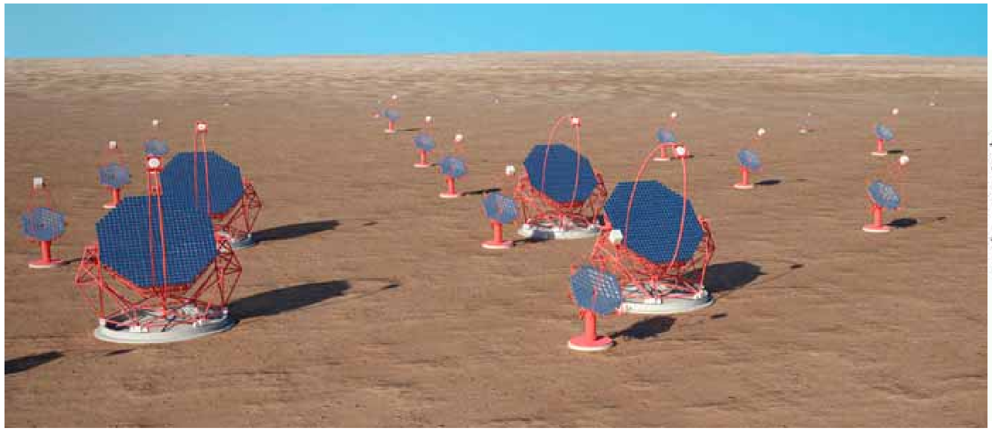
天球

電磁波で探る宇宙：将来計画の例

ガンマ線観測

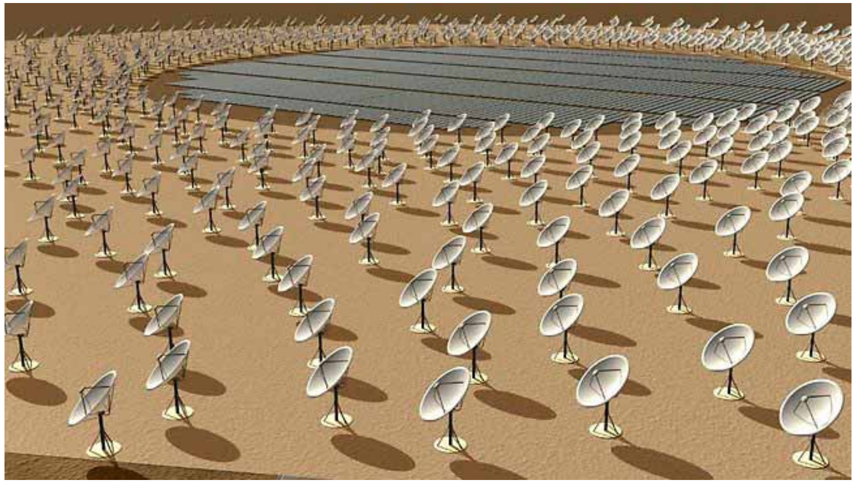


銀河中心からの暗黒物質対消滅
χ＋χ→γ＋γの兆候を探す。

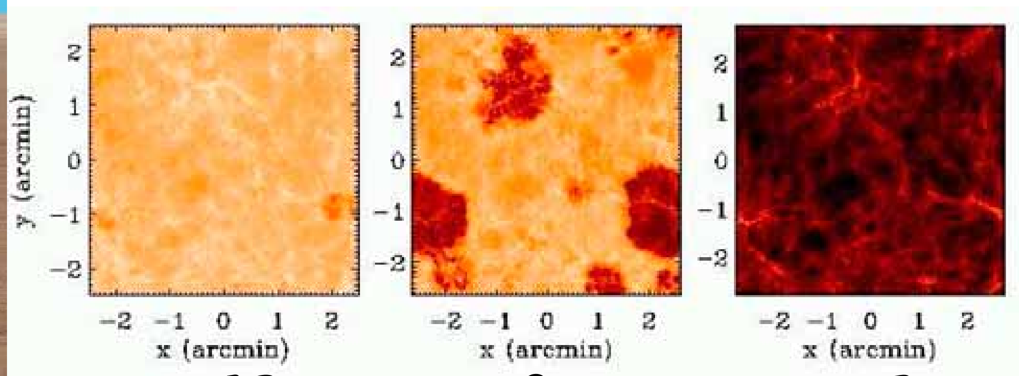


CTA（TeV領域）

SKA（電波）

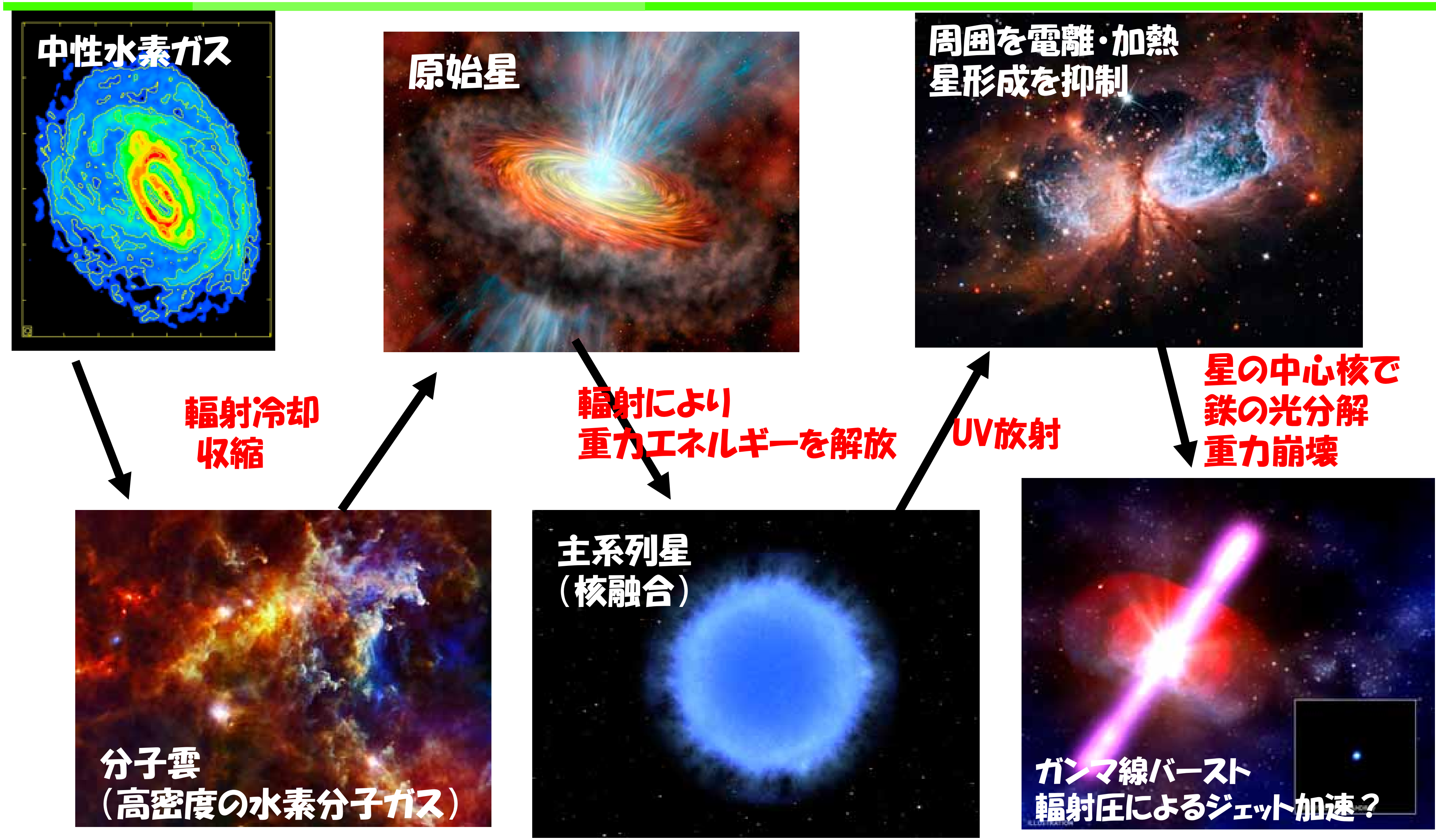


初代星からの紫外線で宇宙が
再電離していく様子を探る。



z＝12　z＝9　z＝7

天体の進化における輻射の役割



CGSガウス単位系

長さ cm, 質量 g, 時間 s

エネルギー(mc²): erg≡ g cm² s⁻²=10⁻⁷J （g=erg cm⁻² s²)

電子2つの間に働く力 $F = \dfrac{e^2}{r^2}\,[\mathrm{erg\ cm^{-1}}]$

素電荷 $e = 4.8\times 10^{-10}\,[\mathrm{erg^{1/2}\ cm^{1/2}}]$

Maxwell方程式 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_{\mathrm{e}},\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},\ \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times\boldsymbol{E}$$

電場と磁場の単位は同じ：G ≡ erg$^{1/2}$ cm$^{-3/2}$

補助単位 $\mathrm{eV} = 1.6\times 10^{-12}\ \mathrm{erg},\ \mathrm{pc} = 3.1\times 10^{18}\ \mathrm{cm}$

$\mathrm{G},\ \mathrm{Hz} = \mathrm{s^{-1}},\ \mathrm{K} = 8.6\times 10^{-5}\ \mathrm{eV},\ \mathrm{Jy} = 10^{-23}\ \mathrm{erg\ s^{-1}\ cm^{-2}\ Hz^{-1}}$

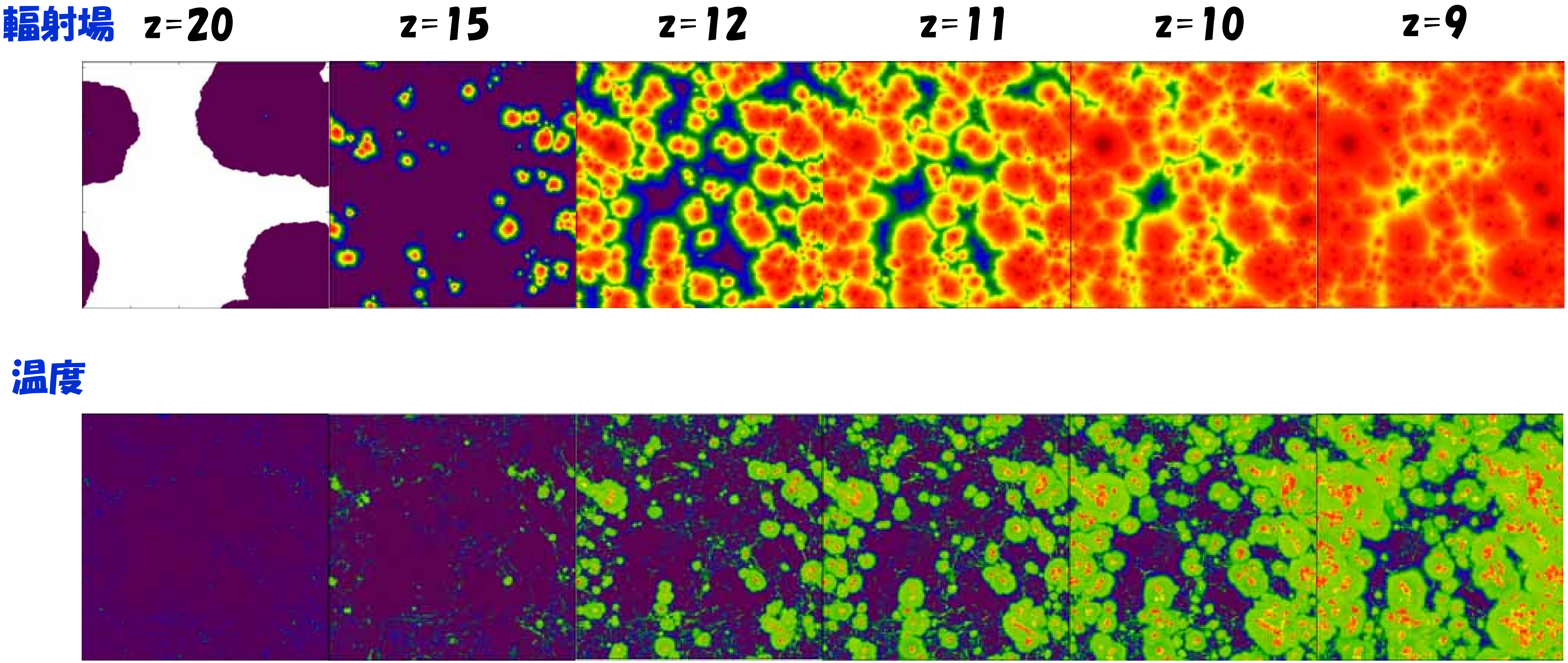
(nG, μG, mG, keV, MeV, GeV, TeV, PeV...)

1. 輻射輸送の基礎

- Intensityの定義
- 真空中でのIntensityの保存
- 輻射輸送方程式(放射、吸収、散乱)
- 光学的に深い場合
- アインシュタイン係数
- 拡散近似(Rosseland近似)

幾何光学の世界

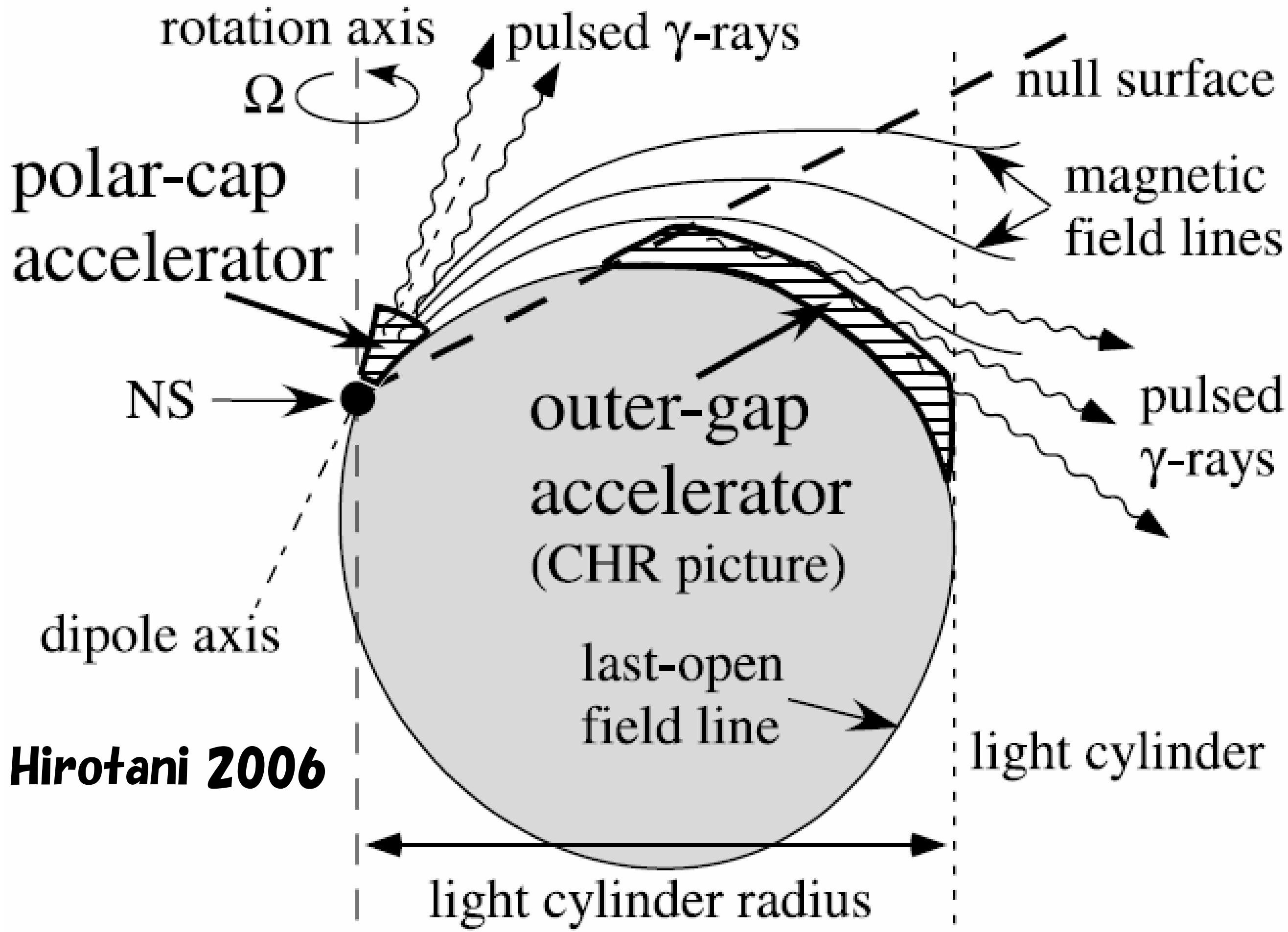
輻射輸送計算例：宇宙再電離



流体計算（宇宙膨張＋重力）＋星形成
＋放射冷却＋輻射輸送＋化学反応＋電離

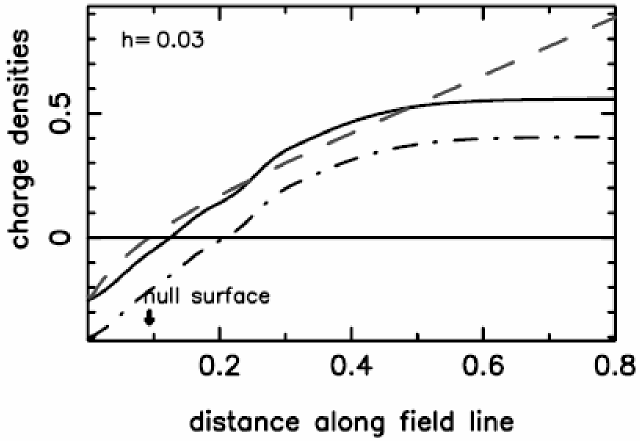
http://faculty.smu.edu/reynolds/research_lca.html

輻射輸送計算例:パルサー磁気圏

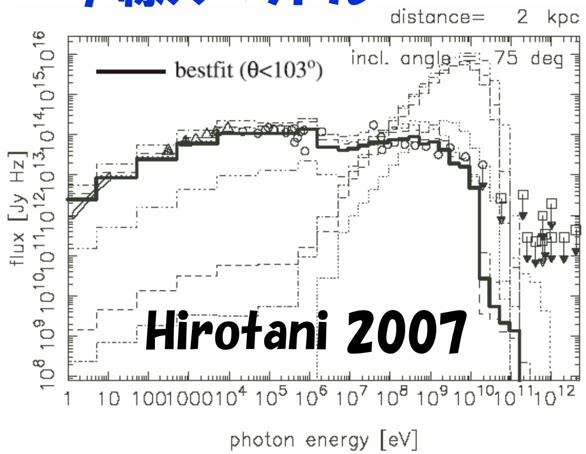


Hirotani 2006

電荷密度



γ線スペクトル

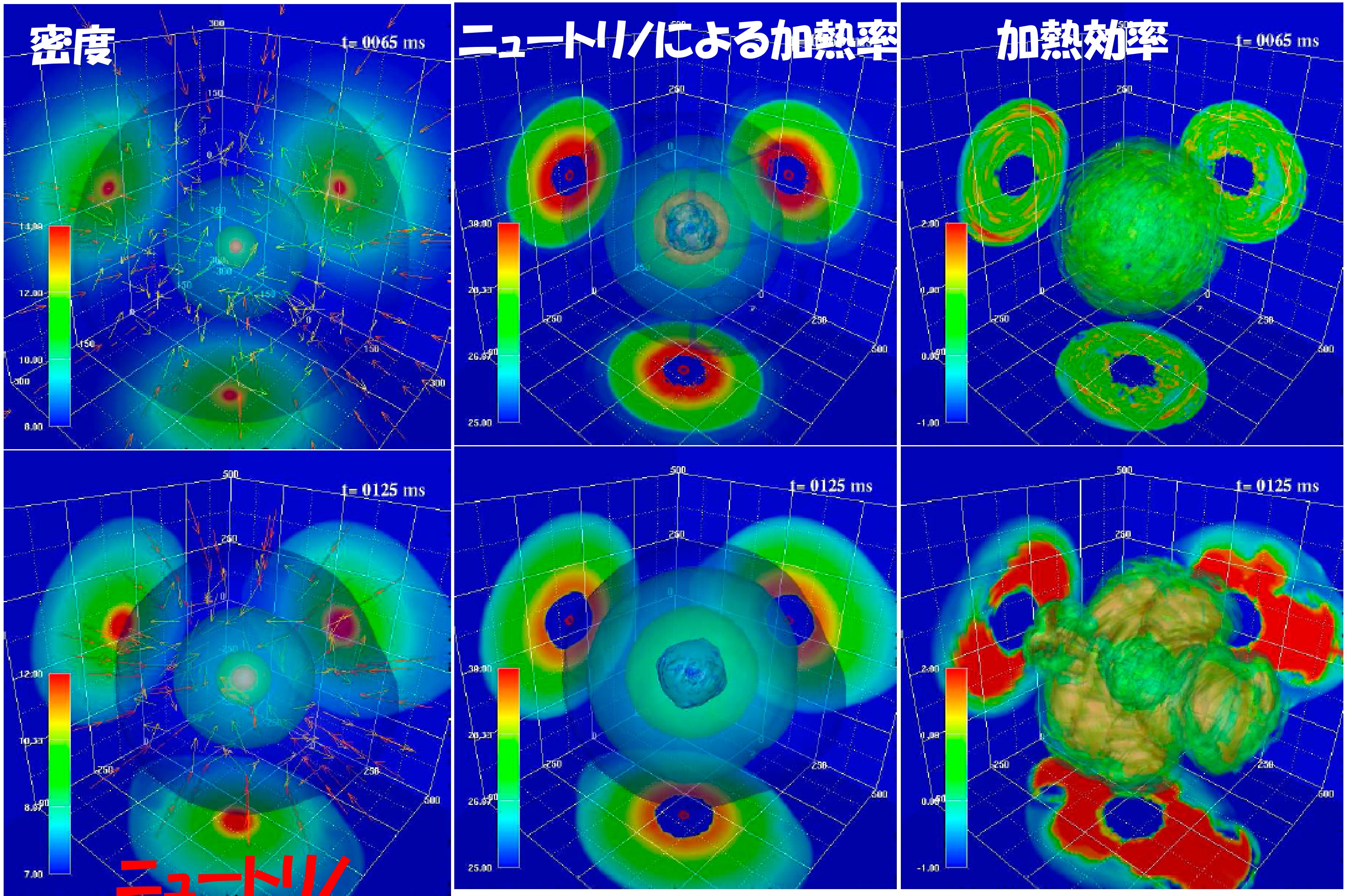


Hirotani 2007

一般相対論＋Boltzmann eq.(プラズマ)＋電磁場＋γ線放射＋輻射輸送

$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$

輻射輸送計算例：超新星爆発



ニュートリノ
~~輻射~~輸送

テクニックは同様

Takiwaki+ 2012

Intensity

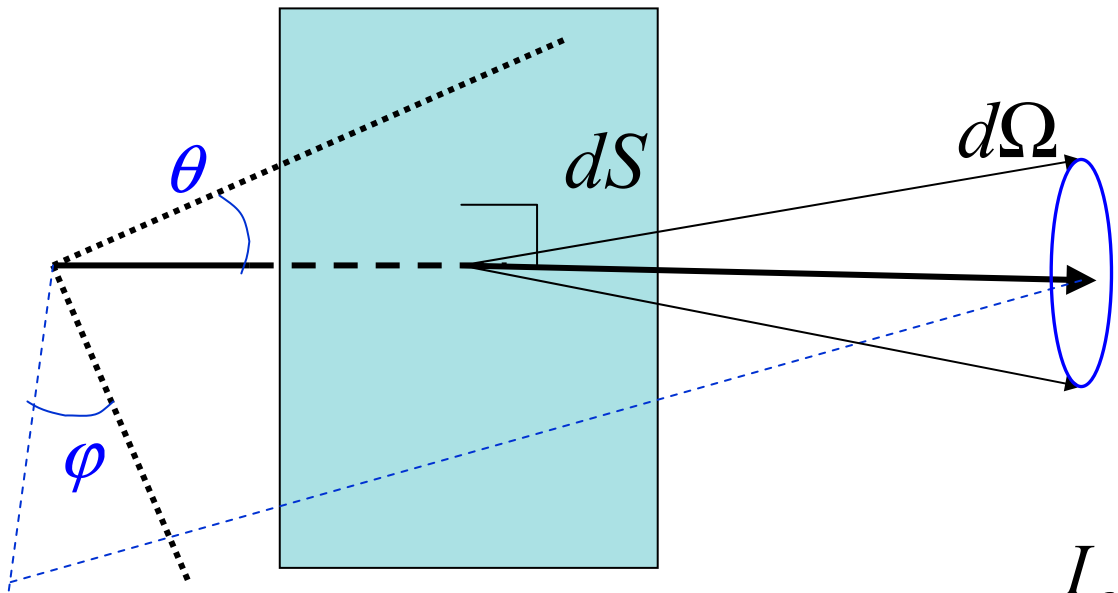
光子の属性

1. エネルギー(振動数)
2. 軌道(飛んでいく方向)
3. 偏光(ここでは扱わない)

$$\boldsymbol{\Omega} = (\theta, \varphi) \quad \boldsymbol{x} = (x, y, z)$$

$$I_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{dE}{dS \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu}$$

$$[\mathrm{erg\ cm^{-2}\ s^{-1}\ sr^{-1}\ Hz^{-1}}] = [\mathrm{erg\ cm^{-2}}]$$

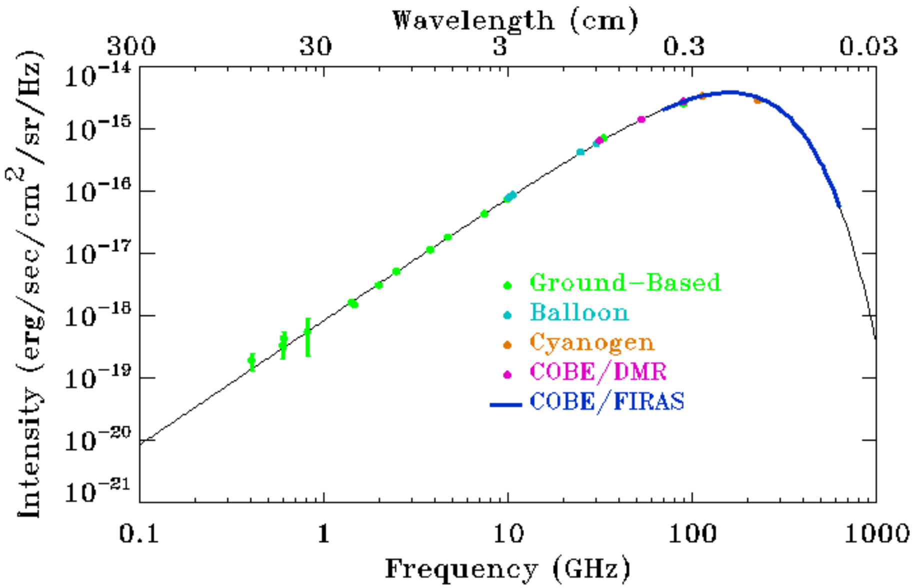


個数	$n_\nu(\mathrm{x}, \Omega) = \dfrac{I_\nu}{h\nu}$
エネルギー	$I_\nu \propto \nu n_\nu$
??	$\nu I_\nu \propto \nu^2 n_\nu$

$$I_\varepsilon = \frac{dE}{dS \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\varepsilon} [\mathrm{cm^2\ s^{-1}}]$$

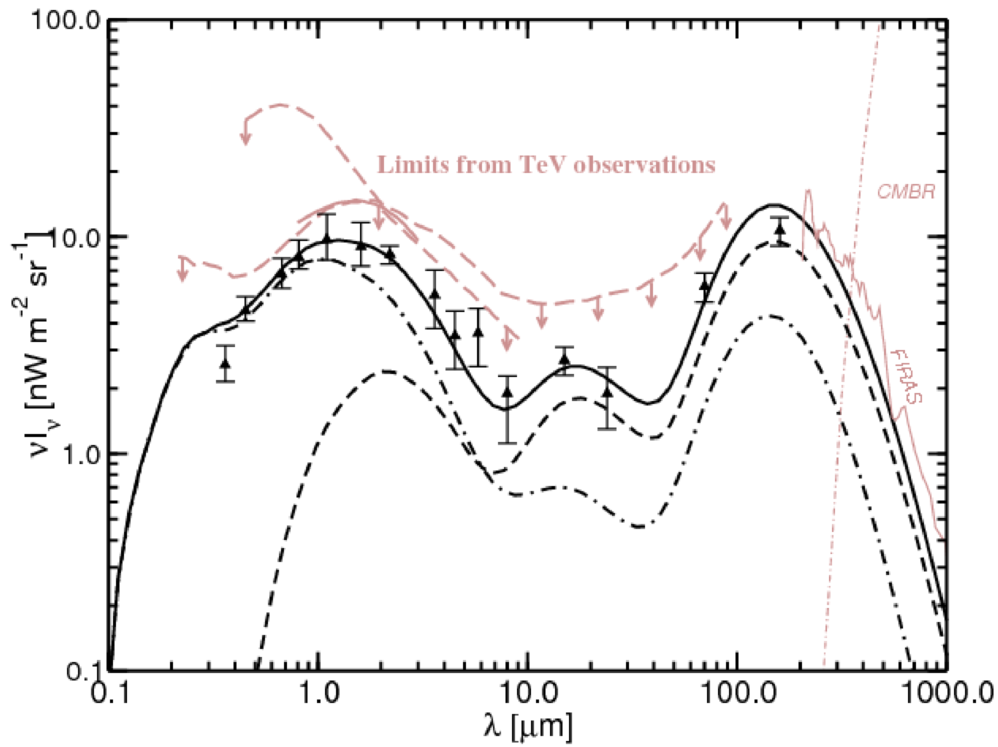
観測されたIntensityの例

CMB(cosmic microwave background)

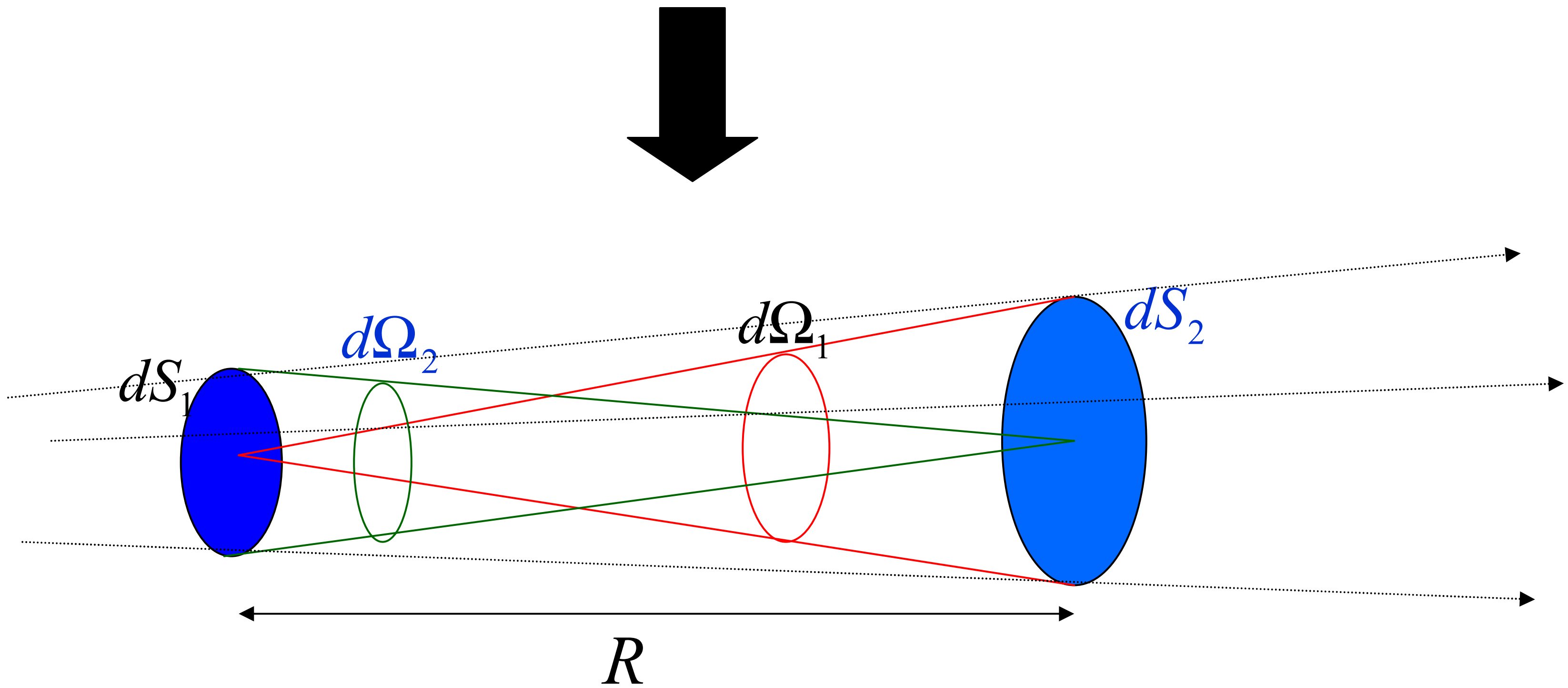


美しいプランク分布

EBL(extra-galactic background light)

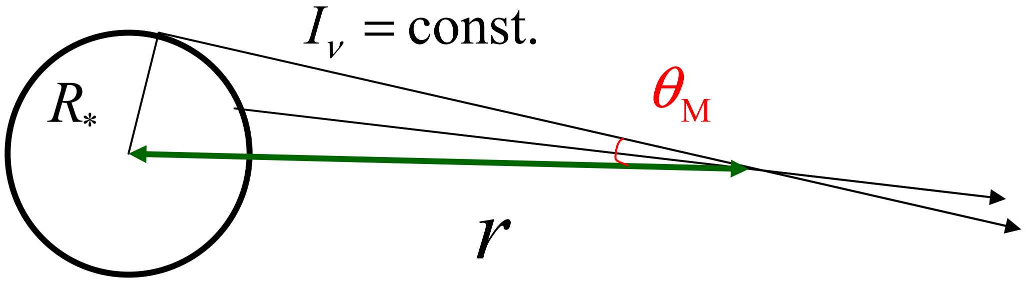


Intensityの保存



真空中では $\dfrac{dI_\nu}{dx} = 0$

IntensityとFlux

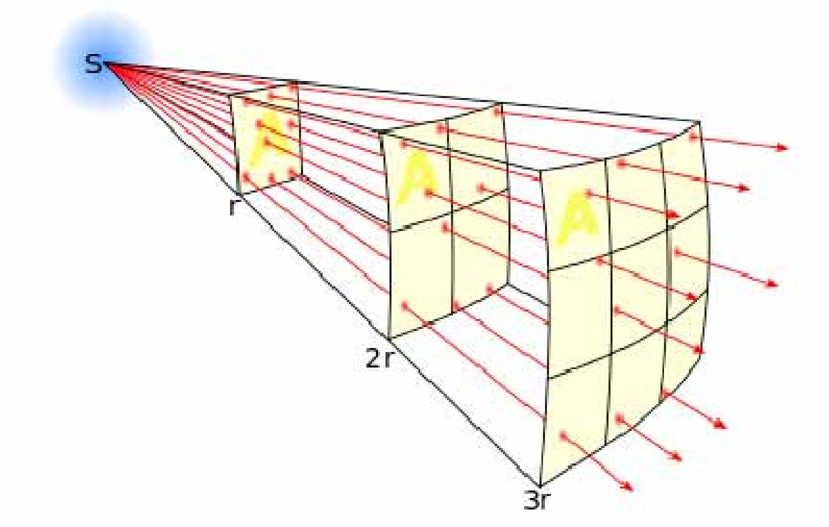


Flux

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta_\nu d\Omega = \pi I_\nu \left(\frac{R_*}{r}\right)^2$$

θ_Mが望遠鏡の角分解能(angular resolution)より小さい時は点源。Fluxしかわからない。

$$1' = 1^\circ / 60,\ 1'' = 1' / 60$$



Intensityは"光線"、Fluxは光線の"本数密度"

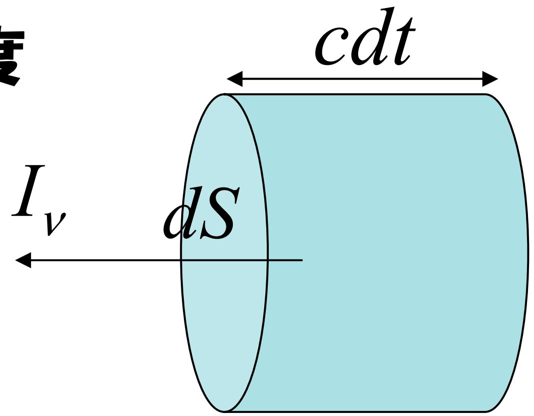
HST

VLA　0.05"

Chandra
0.5"

エネルギー密度・ガス中の光子

エネルギー密度



$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu,\ J_\nu \equiv \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega$$

平均Intensity

Intensityは真空中では一定。

Intensityに影響を与える因子
- 放射（光子生成）
- 吸収（光子消滅）
- 散乱（方向の変化）

輻射輸送方程式

光子に対するボルツマン方程式

$$\frac{dI_\nu}{dx} = \underset{\text{放射}}{j_\nu} - \underset{\text{吸収}}{n\sigma_{\mathrm{abs},\nu} I_\nu} - \underbrace{n\sigma_{\mathrm{sct},\nu} I_\nu + n\sigma_{\mathrm{sct},\nu} J_\nu}_{\text{散乱（等方散乱近似）}}$$

ガス数密度 n

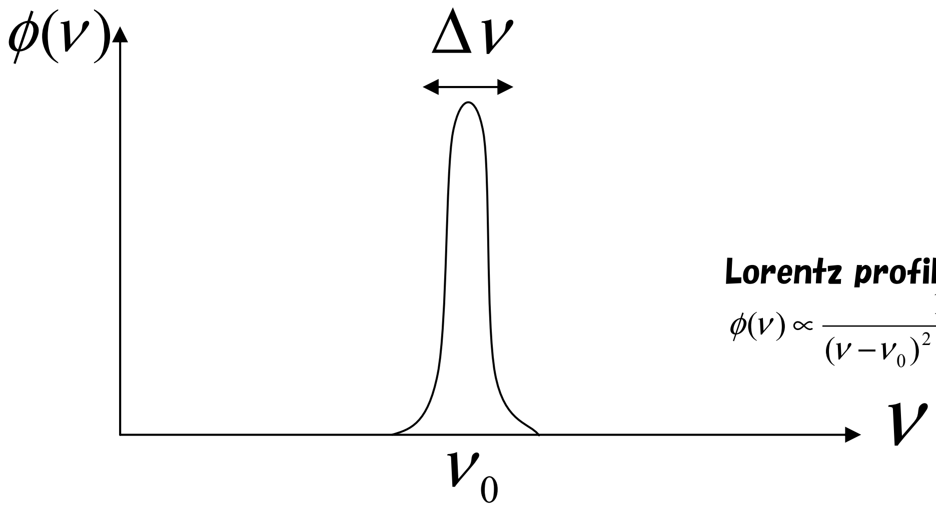
等方放射の時
emission coefficient $j_\nu = \frac{1}{4\pi} \times n \times \frac{dE}{dt d\nu}$

吸収係数 $\alpha_\nu \equiv n\sigma_{\nu,\mathrm{abs}}$　平均自由行程 $l_\nu \equiv \frac{1}{\alpha_\nu}$

光学的深さ（optical depth） $\tau_\nu \equiv \int \alpha_\nu dx$

source function $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$

Einstein coefficient



Lorentz profile

$$\phi(\nu) \propto \frac{1}{(\nu-\nu_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

line profile function　次元: ν^{-1}

有効平均Intensity

$$\bar{J} \equiv \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu$$

状態1-2間の遷移

自発的遷移確率　A_{21}

吸収遷移確率　$B_{12}\bar{J}$

誘導遷移確率　$B_{21}\bar{J}$

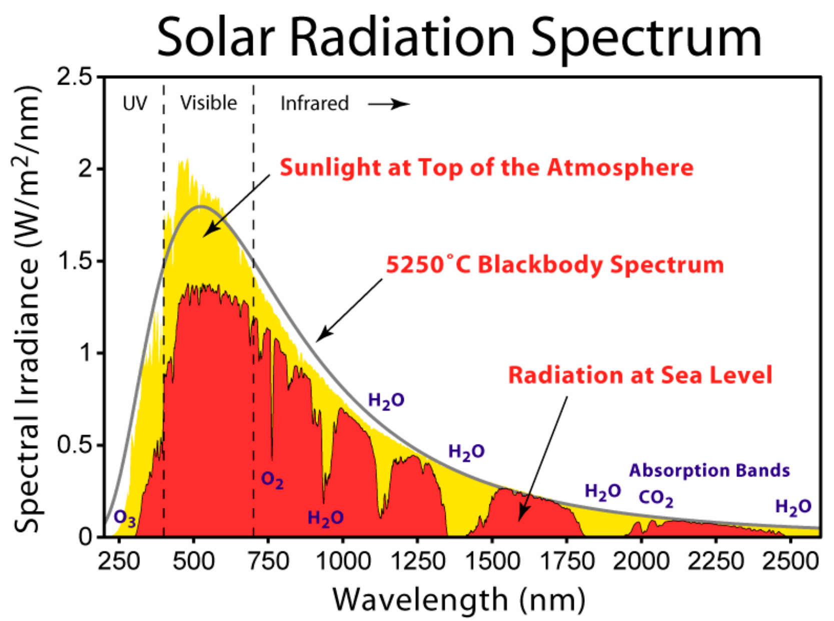
Einstein relation

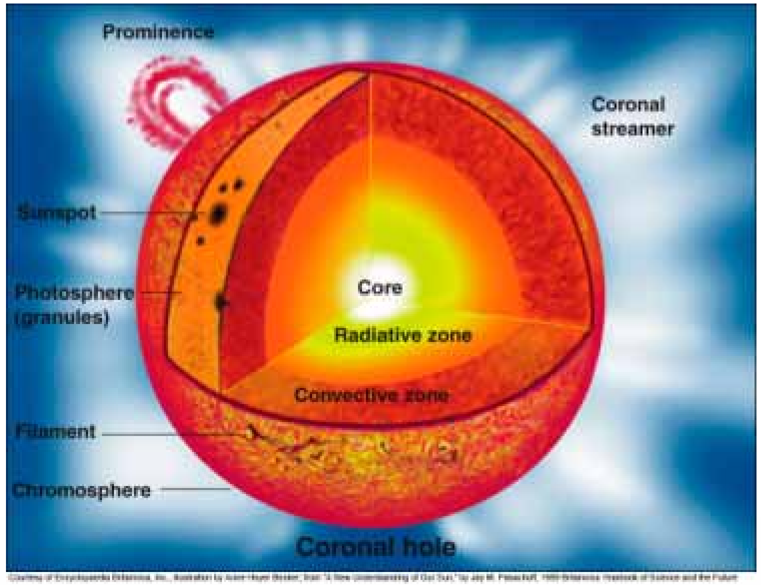
$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \quad A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

g_1:**状態1における統計的自由度**

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu) \qquad \alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu)\left(n_1 B_{12} - n_2 B_{21}\right)$$

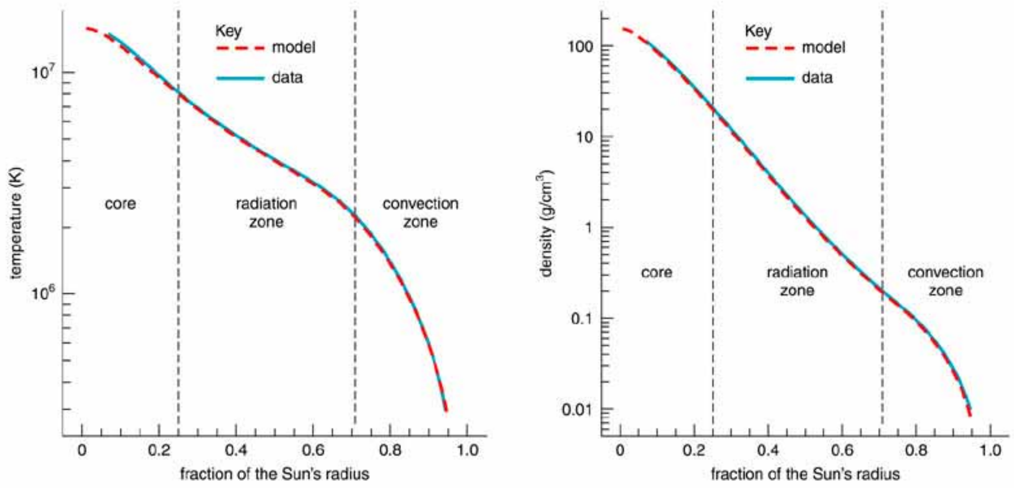
星の構造と輻射輸送





$$\frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2}\rho,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3\alpha_{\mathrm{R}} L}{64\pi r^2 \sigma_{\mathrm{SB}} T^3}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi r^2 \dot{\varepsilon}_{\mathrm{n}}$$



2. 電磁波の基礎理論

- 電磁場のエネルギー
- Poynting Flux
- スペクトラム分解
- 偏光
- ベクトルポテンシャル
- ゲージ

電磁場の復習

マックスウェル方程式（1864）

ガウスの法則 $\nabla \cdot E = 4\pi\rho_{\mathrm{e}}$ －① （1835）

磁束の保存則 $\nabla \cdot B = 0$ －② （1861）

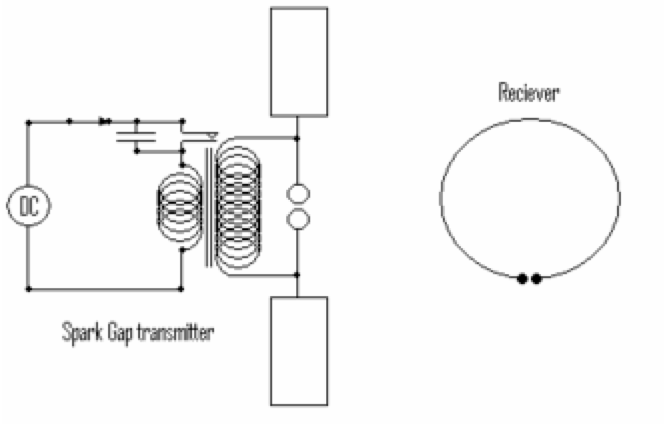
ファラデーの法則 $\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$ －③ （1831）

アンペールの法則 $\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \times B - \frac{4\pi}{c} j$ －④ （1826）

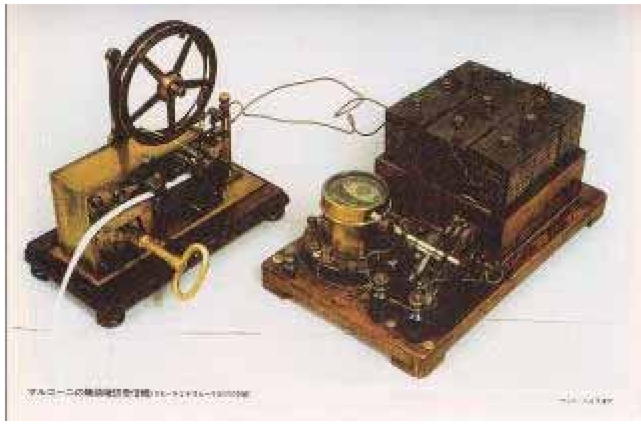



電磁波の歴史

1864 マックスウェル方程式
1868 マックスウェルによる電磁波の予言
1879 マイケルソンが光速を測定
1887 マイケルソン・モーリーの実験
1888 ヘルツが電波の発信に成功
1895 レントゲンがX線を発見
1896 ベクレルがγ線を発見
1900 プランクの光量子仮説
1901 マルコーニが大西洋横断無線通信に成功
1905 アインシュタインの特殊相対性理論
1920 アメリカでラジオ放送開始
1927 ディラックによる電磁場の量子化
1940 アメリカで電波航法システム、レーダーの実用化
1948 シュウィンガー・朝永・ファインマンの繰り込み
1954 ヤン・ミルズのゲージ場
1960 アメリカでレーザーの発明
1967 ワインバーグ・サラムの電弱統一理論



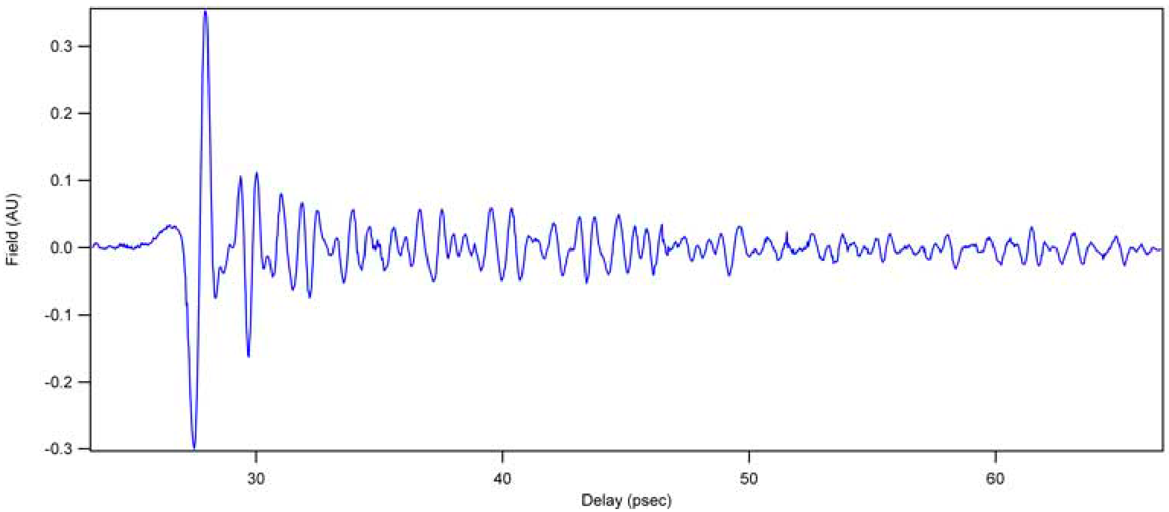
ヘルツの実験のセットアップ

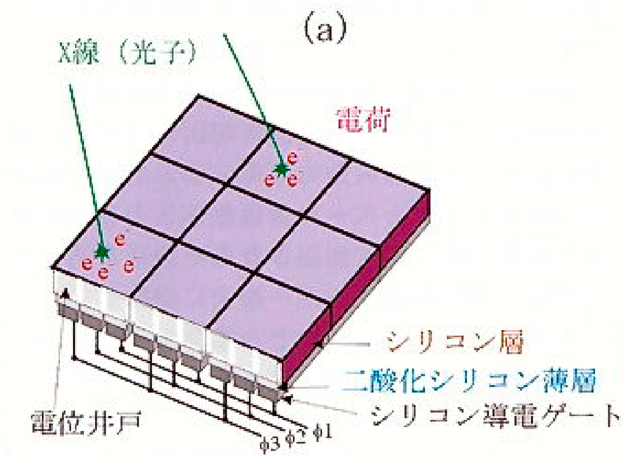


マルコーニの受信機
（彼の発明ではない…）

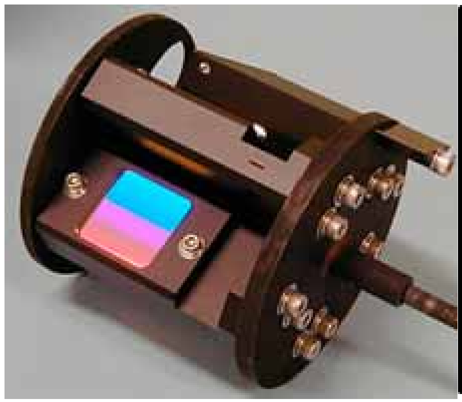
スペクトルの取得

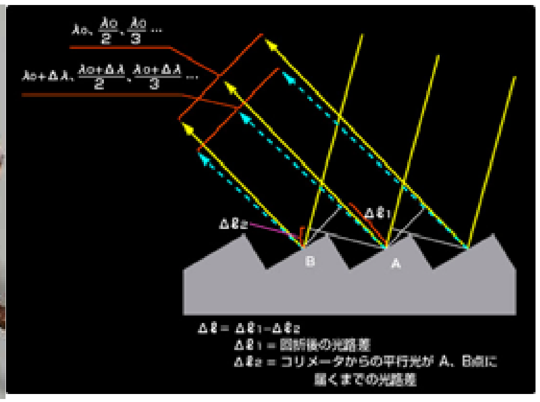
電場の変動の一例

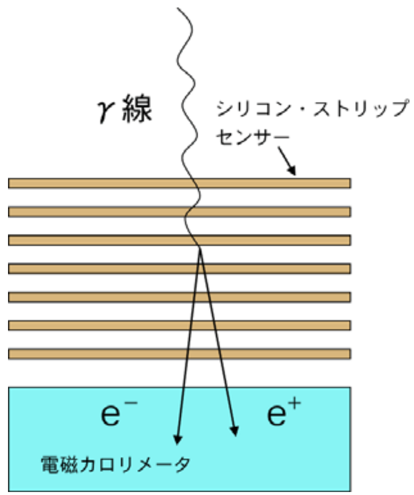


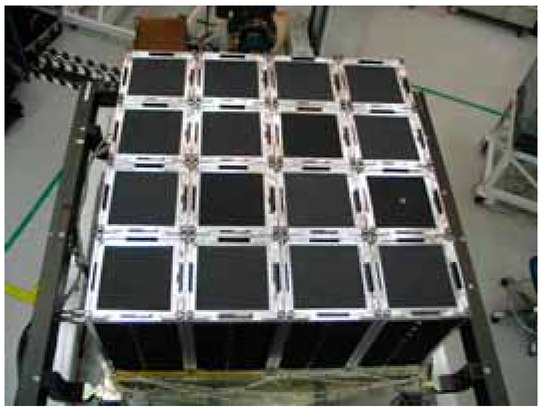


X線はCCDで光子一個一個のエネルギーを直接測れる。





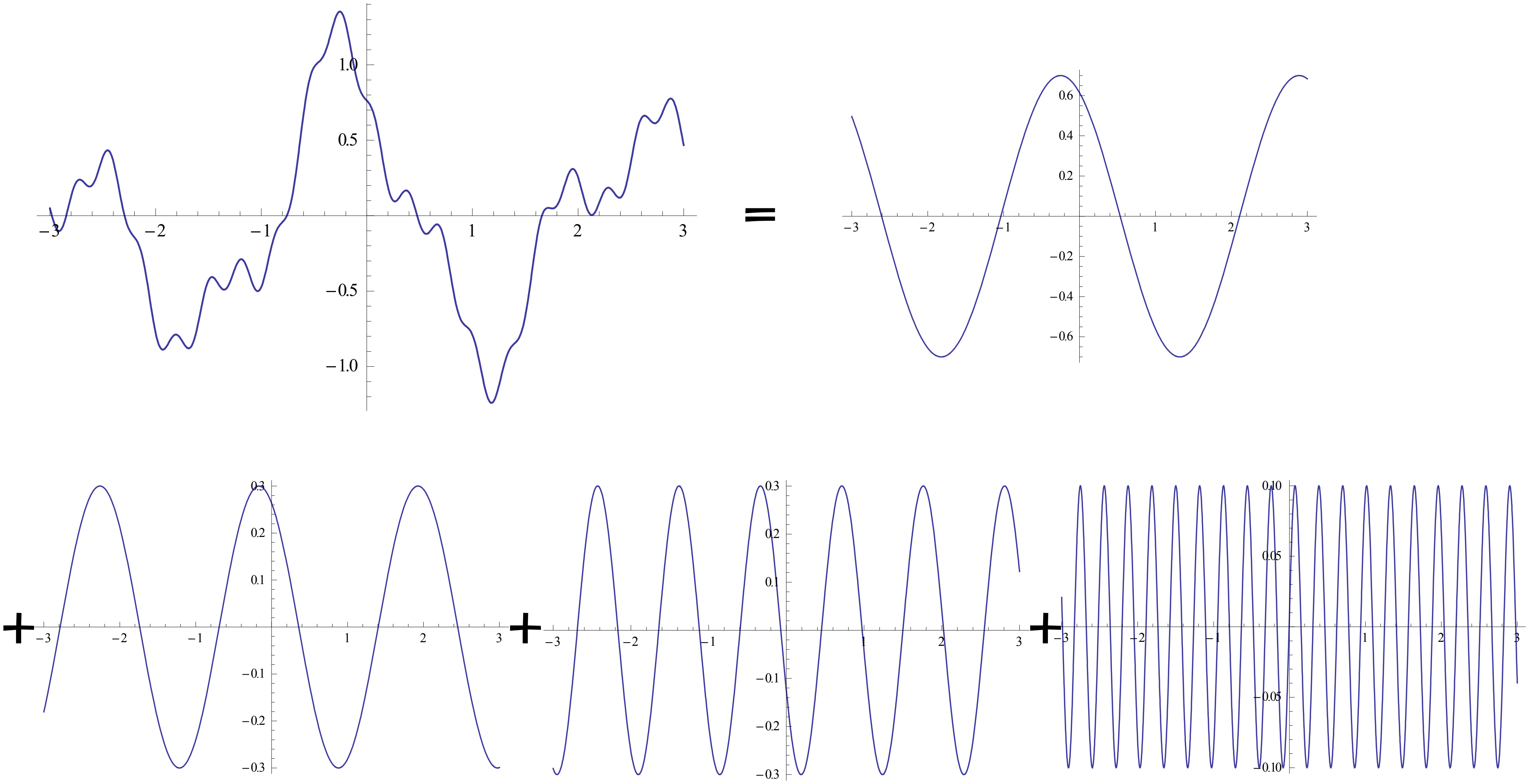




可視ではグレーティングで反射・干渉させることで、分光する。

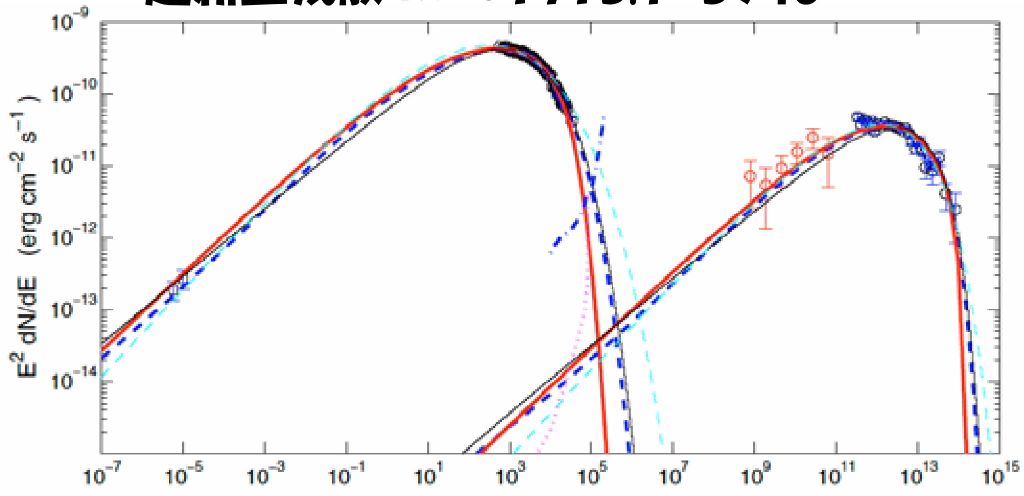
γ線は電子・陽電子のエネルギーを積算する。

フーリエ分解

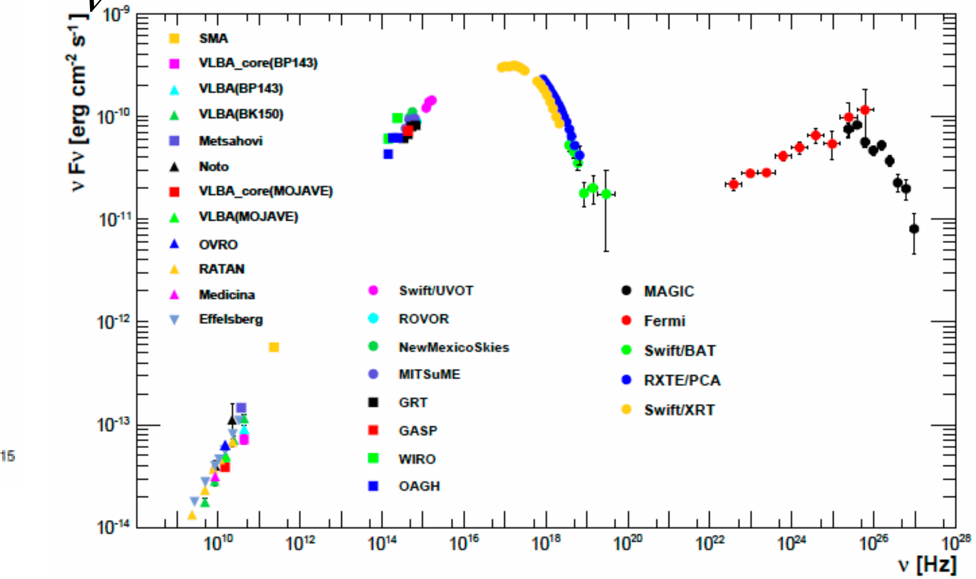


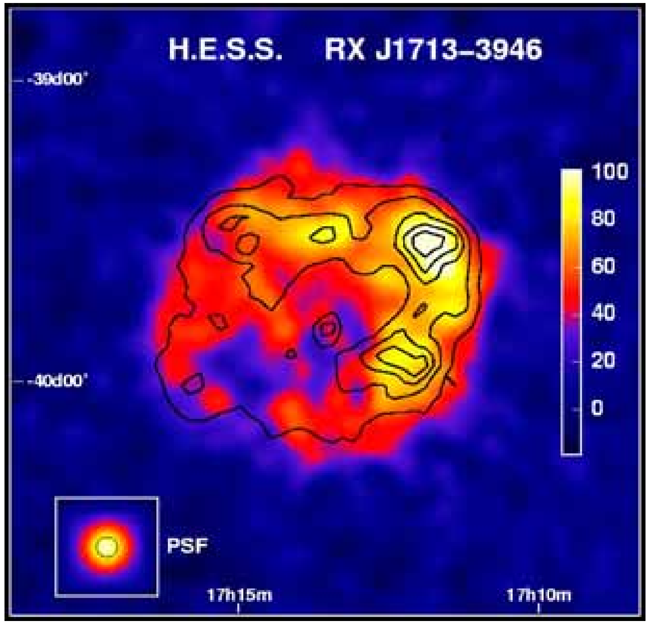
高エネルギー天体のスペクトル

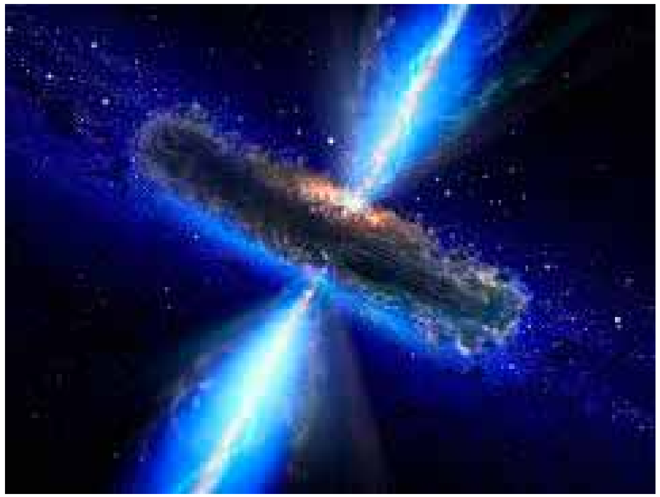
超新星残骸 RX J1713.7-3946



活動銀河核ジェット Mrk421

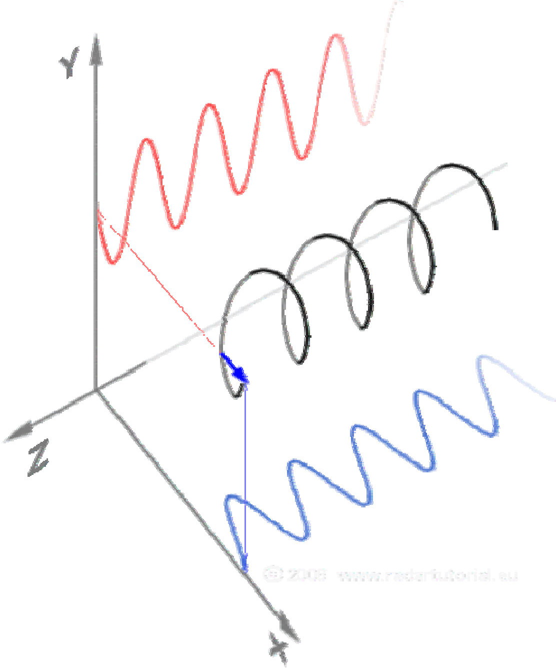






想像図

偏光



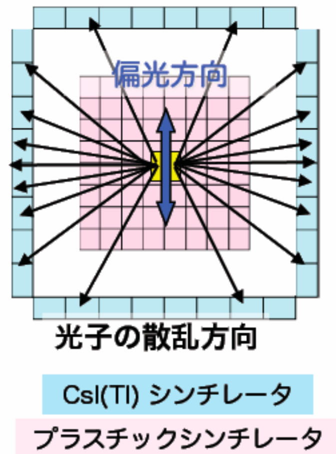
偏光フィルタ

右円偏光　左円偏光

望遠鏡性能の指標

- 測光：感度・限界等級
- 撮像：角度分解能
- 分光：波長分解能、帯域
- 時間分解能（変動天体）
- 視野
- 指向速度（突発天体）
- 偏光

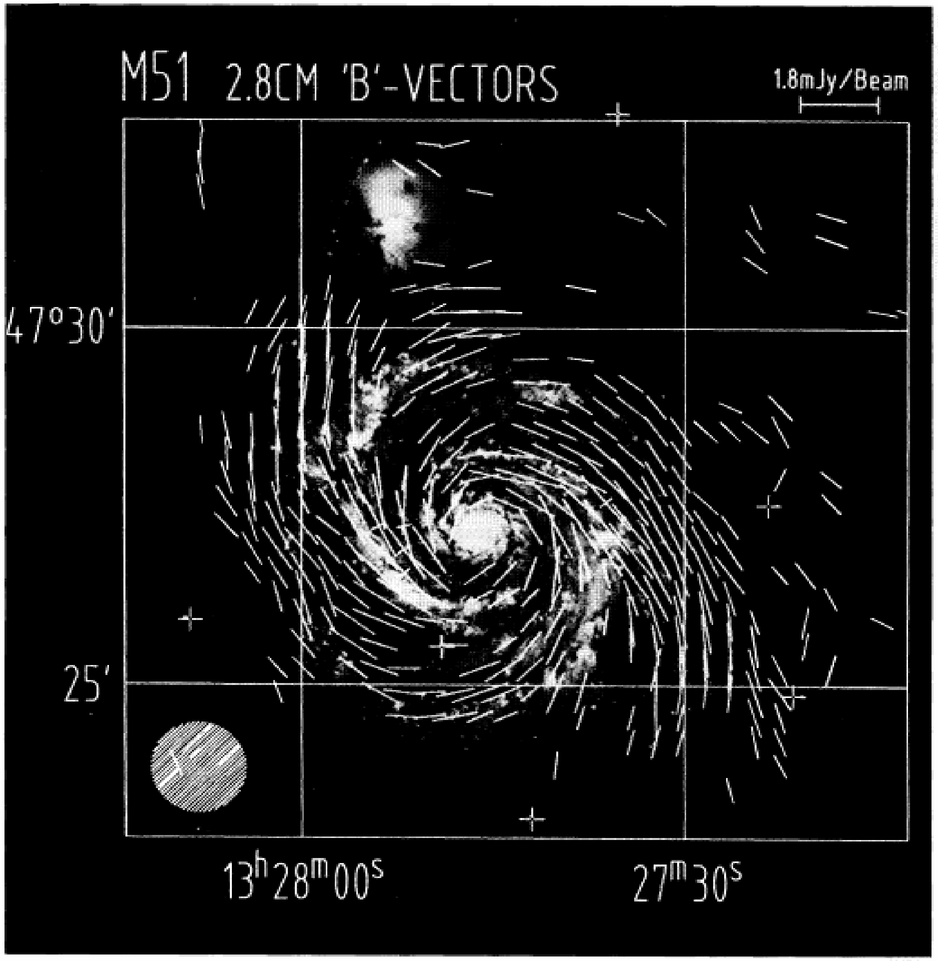
コンプトン散乱角の
偏光方向依存性を利用した、
硬X線偏光検出



偏光観測

銀河磁場

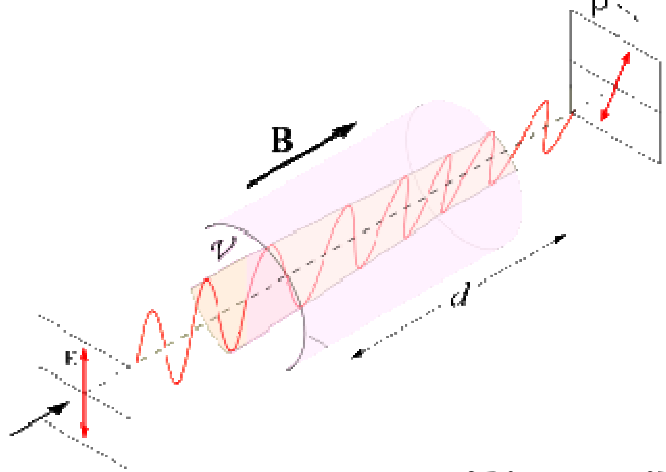
シンクロトロン放射は磁場に垂直方向に



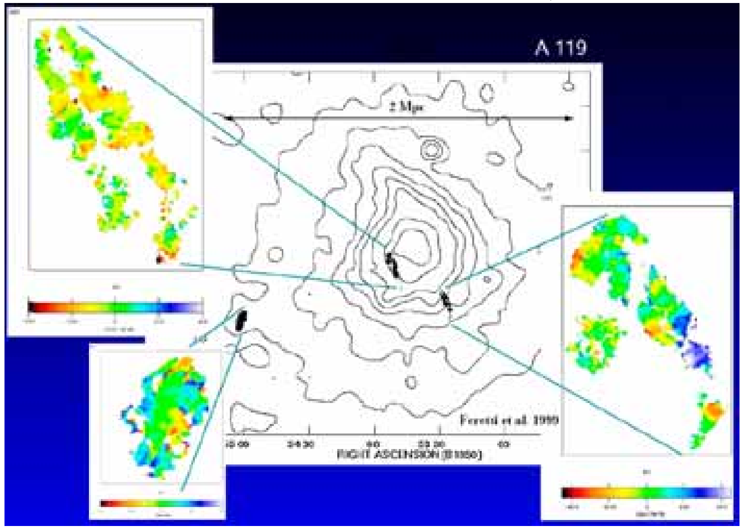
Neininger (1992)

ファラデー回転

プラズマ中の磁場により偏光方向が回転

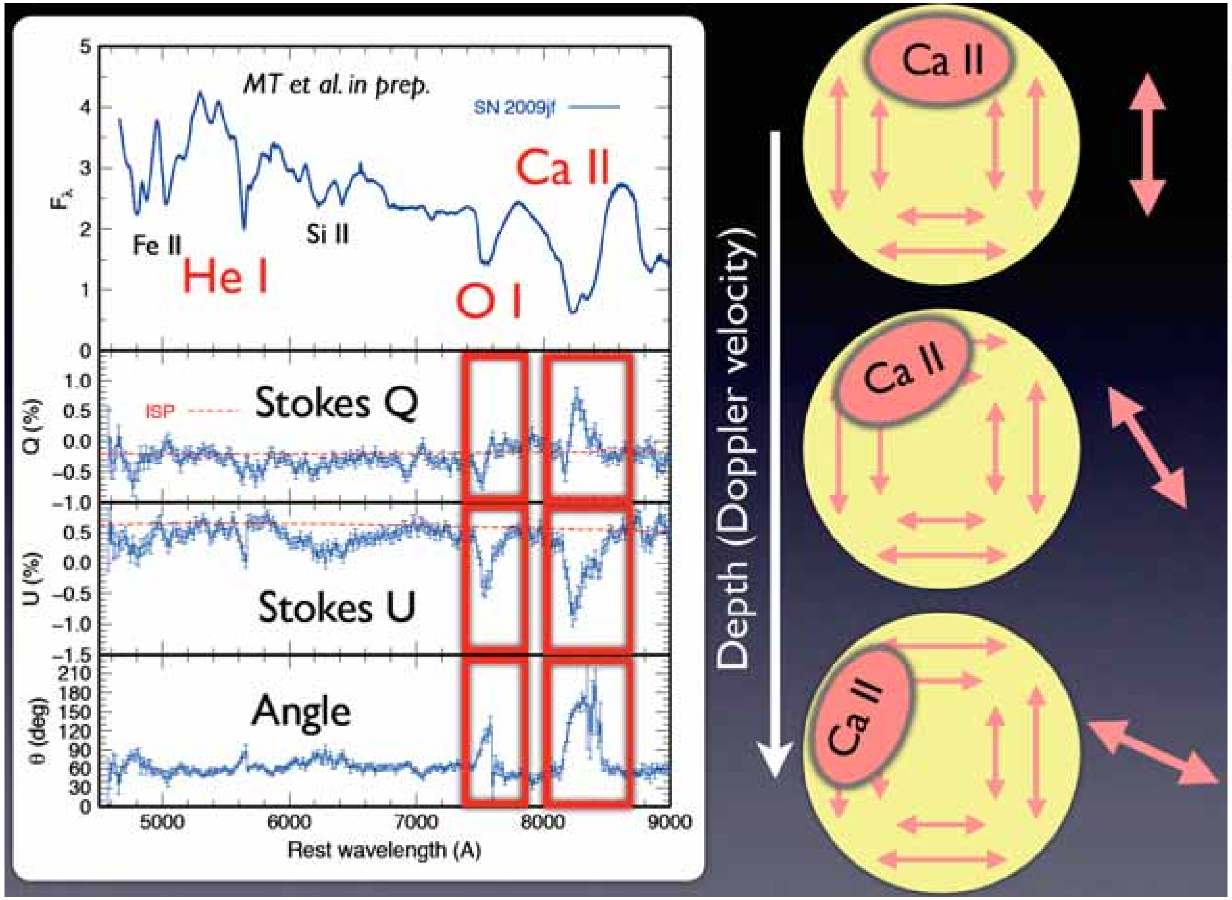


銀河団の磁場測定



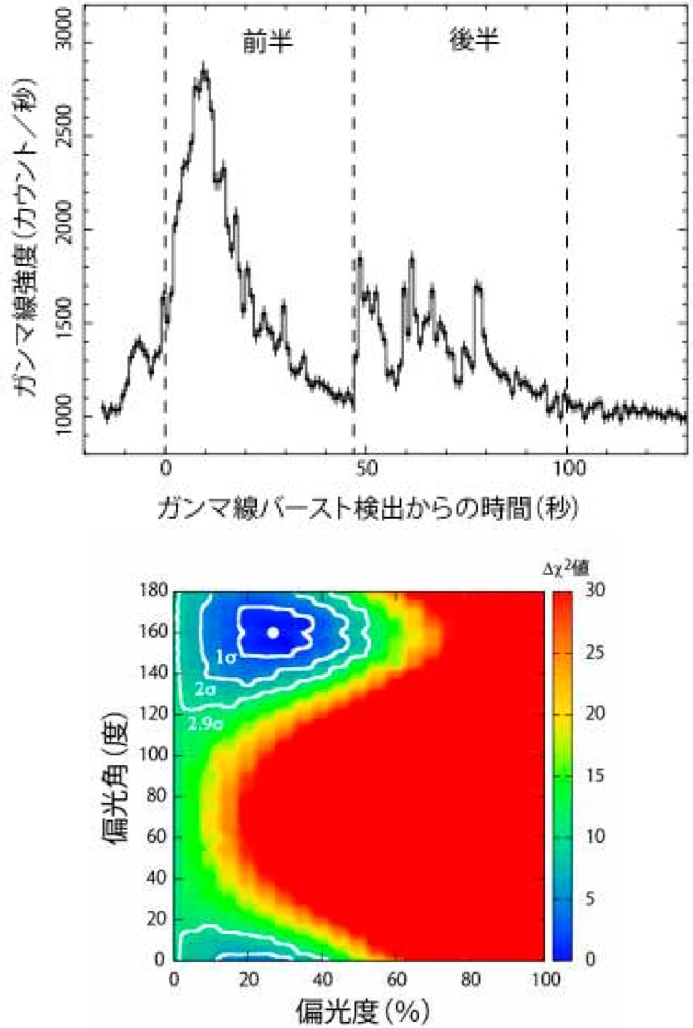
高エネルギー天体

超新星爆発



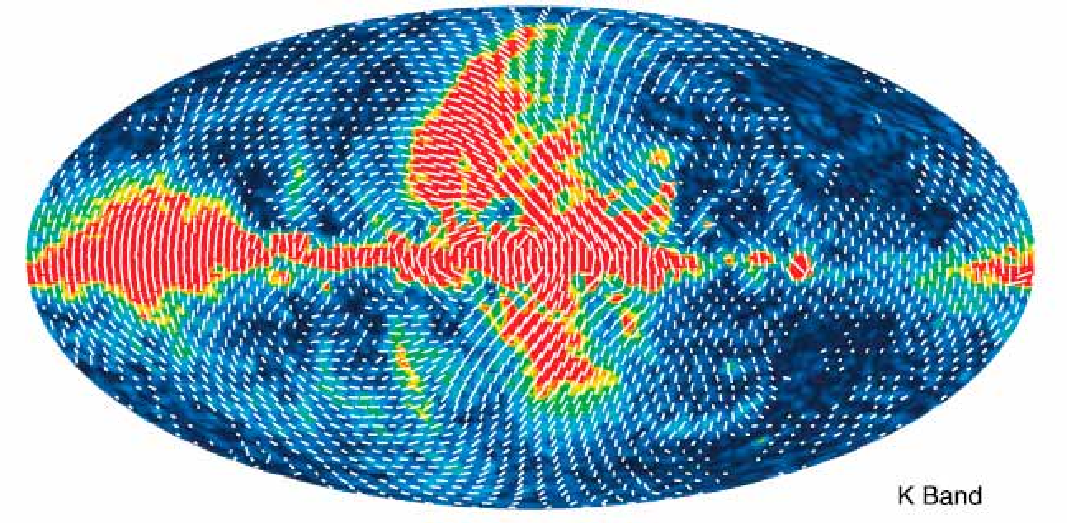
© 田中雅臣氏

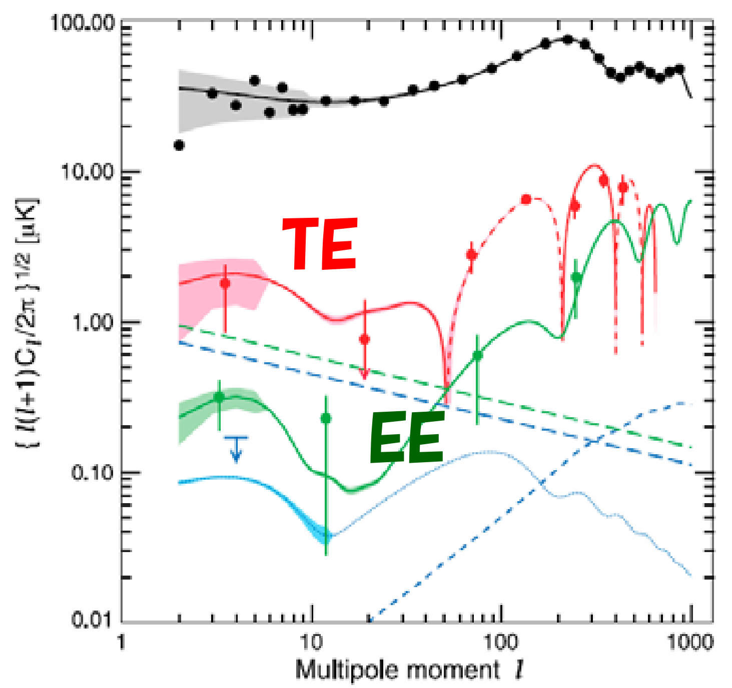
ガンマ線バースト

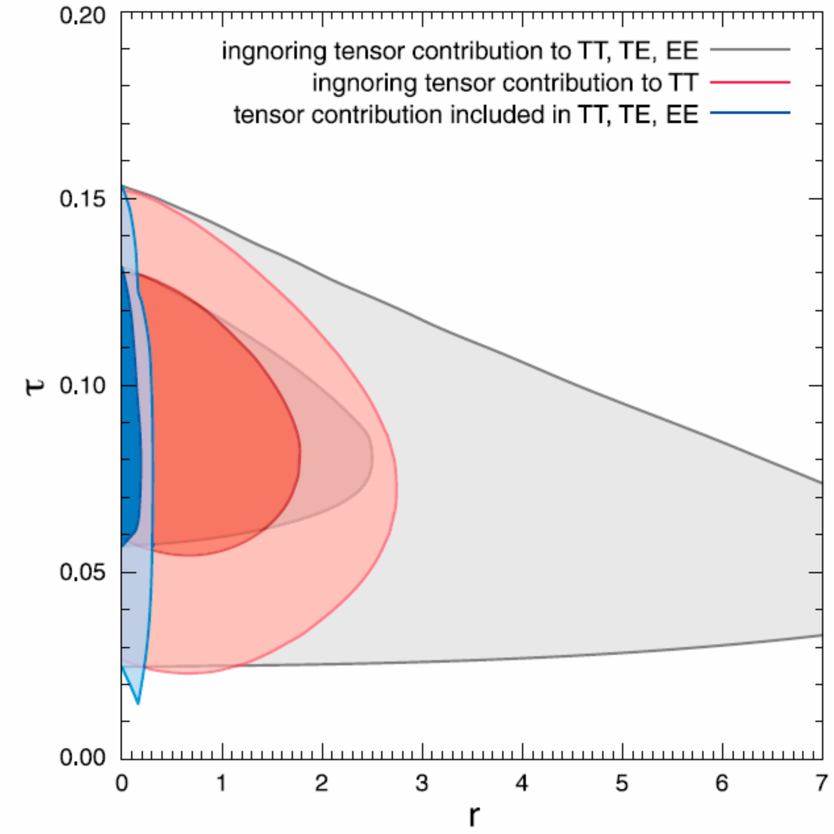


© 米徳氏

CMB偏光観測







宇宙の再イオン化、インフレーションのモデルに制限

ベクトルポテンシャル

$$A^{\mu} = (\phi, \boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \ \ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

定義から

$\boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E}}$ **と** $\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0}$ **は自明。**

$F^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}$ **及び** $j^{\mu} = (c\rho_{\mathrm{e}}, \boldsymbol{j})$ **として**

"運動方程式" $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}$ **は**

$$\Delta\phi + \frac{1}{c}\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -4\pi\rho_{\mathrm{e}}$$

$$\Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$$

$$\Rightarrow$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_{\mathrm{e}}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$$

ゲージ不変性

Dirac方程式

$$\left(i\hbar c\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-mc^{2}\right)\psi=\underline{e\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi}$$

相互作用項:ゲージ対称性から自動的に決まる

ゲージ変換

$$\psi\rightarrow\psi'=\exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}\chi(x^{\mu})\right)\psi,\ A^{\mu}\rightarrow A'^{\mu}=A^{\mu}+\partial^{\mu}\chi(x^{\mu})$$

に対して不変

電弱相互作用:SU(2)にこれを拡張
強い相互作用:SU(3)に拡張

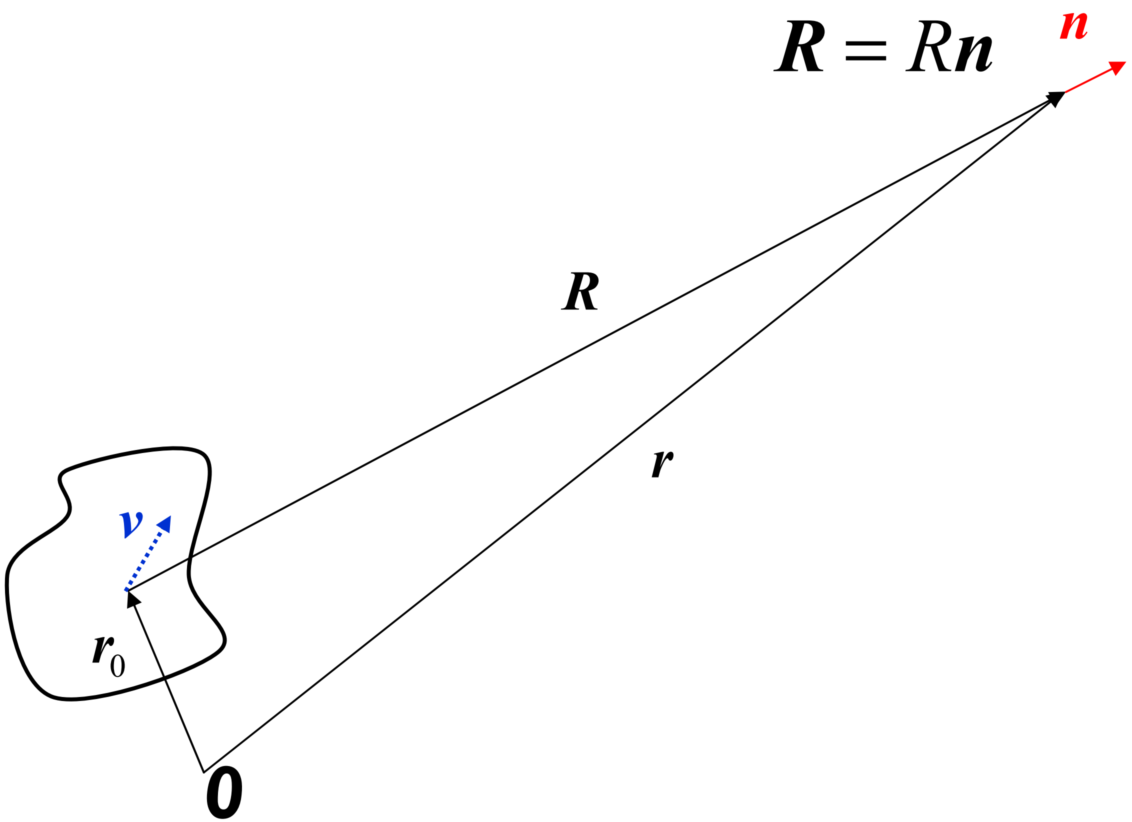
重力場

$$x^{\mu}\rightarrow x'^{\mu}=x^{\mu}+\xi^{\mu},\ g^{\mu\nu}\rightarrow g'^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}+g^{\mu\sigma}\xi^{\nu}_{,\sigma}+g^{\lambda\nu}\xi^{\mu}_{,\lambda}-\xi^{\lambda}g^{\mu\nu}_{,\lambda}$$

3. 荷電粒子からの放射

- Lienard-Wiechartポテンシャル
- 双極近似に基づく放射
- トムソン散乱
  - 断面積
  - 偏光

遅延ポテンシャル



時刻tにおけるrでの電磁場は、

時刻 $t-\dfrac{R}{c}$ におけるr₀での

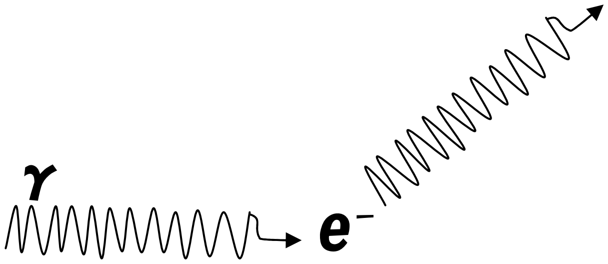
電荷の運動で決まる。

$t_{\rm ret} \equiv t - \dfrac{R}{c}$ として

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{R(t_{ret}) - \dfrac{\boldsymbol{v}(t_{ret})\cdot\boldsymbol{R}(t_{ret})}{c}}, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{q\boldsymbol{v}(t_{ret})}{c\left(R(t_{ret}) - \dfrac{\boldsymbol{v}(t_{ret})\cdot\boldsymbol{R}(t_{ret})}{c}\right)}$$

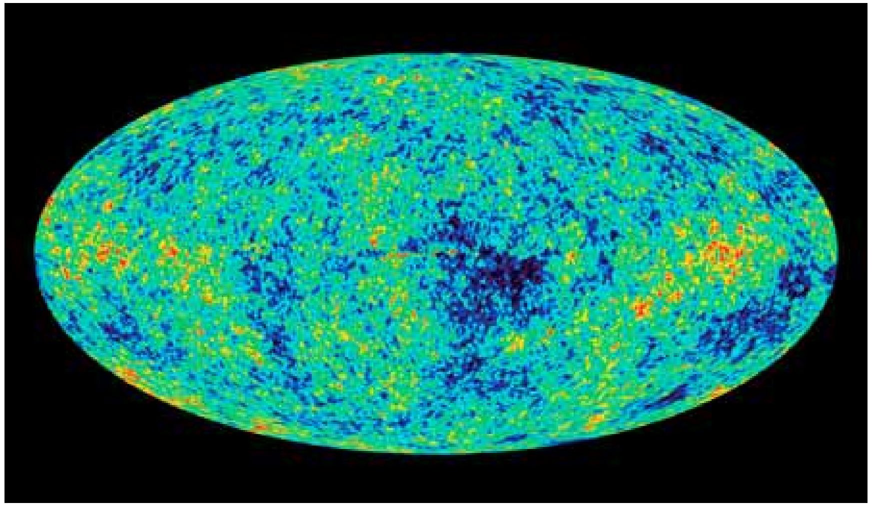
トムソン散乱

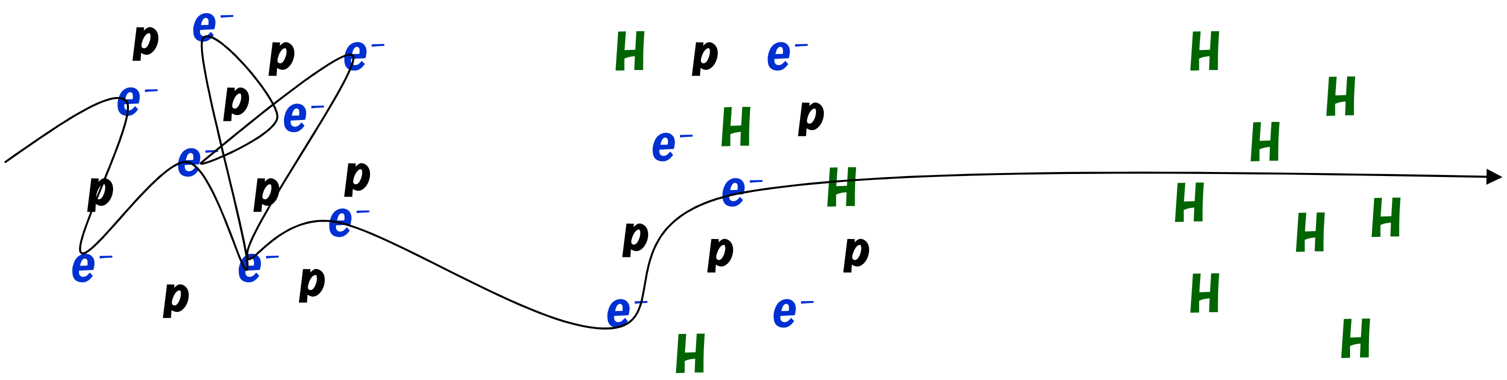
1906 Nobel prize
(電子の発見etc)



電子への反作用は無視

マイクロ波宇宙背景放射(CMB)

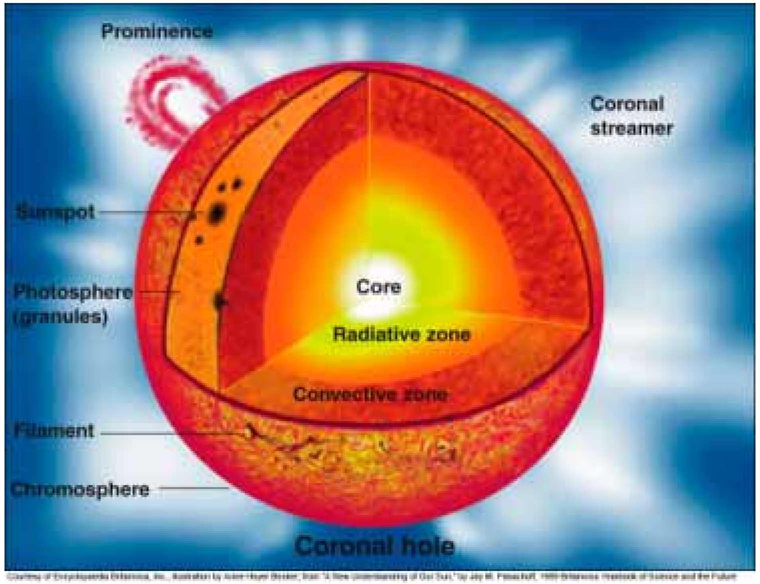




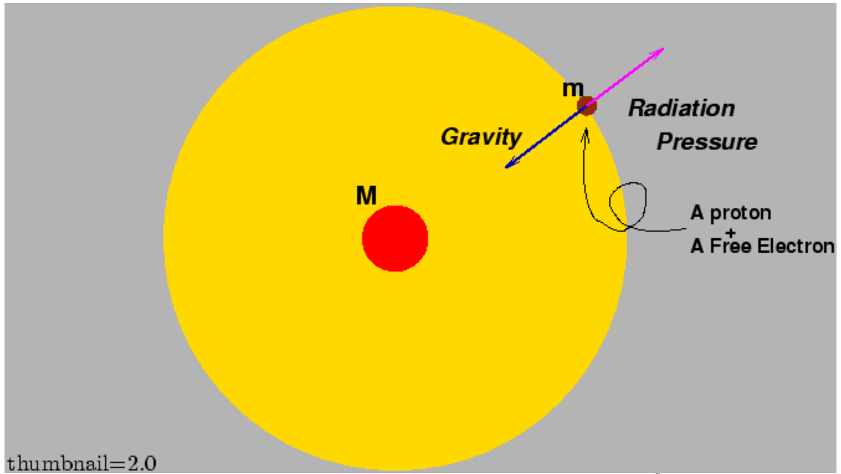
CMB: 電離度が下がり、光が直進できるようになった時の光

トムソン散乱が本質的な現象

星の中の輻射輸送



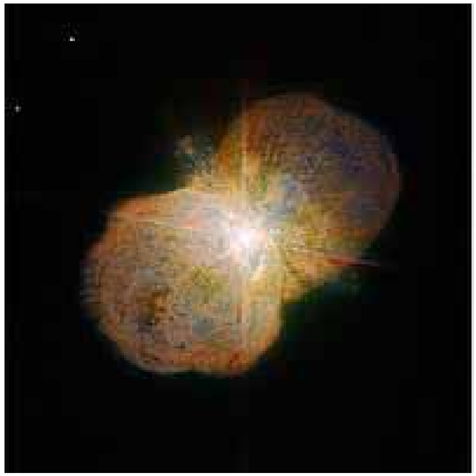
エディントン光度

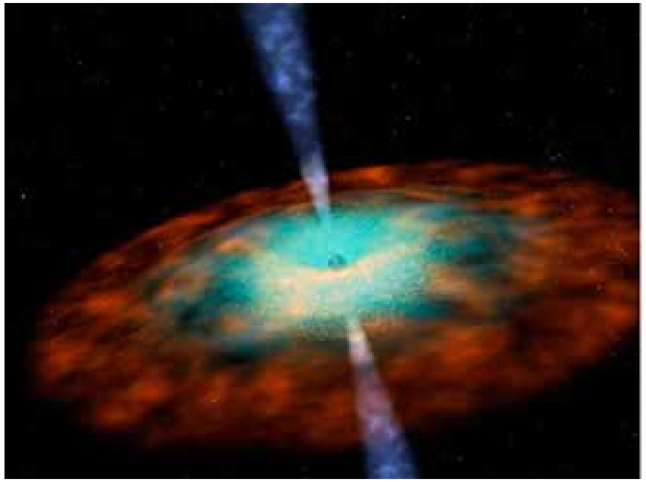


$$L_E = \frac{4\pi c G m_p}{\sigma_T} M = 1.25\times 10^{46}\left(\frac{M}{10^8 M_{sun}}\right) \mathrm{erg\ s^{-1}}$$

イータ・カリーナ　輻射圧による質量放出

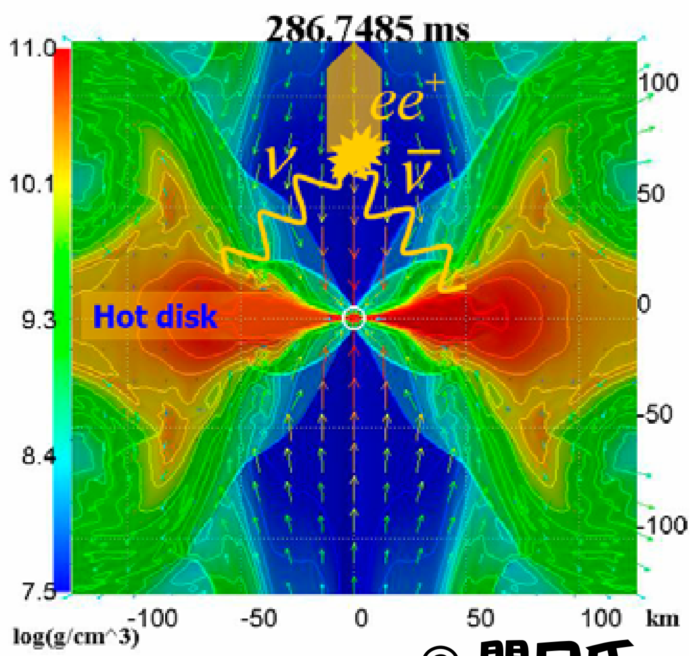
ブラックホールからの放射の限界光度を与える。





ガンマ線バースト

Fireball



© 関口氏

温度数MeVの電子・陽電子・光子からなるプラズマが形成される。

電子・陽電子の数は熱平衡から決まり、

$$n_{\pm} = \frac{3}{\pi^2}\zeta(3)\left(\frac{T_0}{\hbar c}\right)^3 \simeq 1.0 \times 10^{33}\left(\frac{T_0}{2.8\mathrm{MeV}}\right)^3 \mathrm{cm}^{-3}$$

トムソン散乱に対する光学的深さは、

$$\tau_{\mathrm{T}} = n_{\pm} R_0 \sigma_{\mathrm{T}} \simeq 6.9 \times 10^{15}\left(\frac{R_0}{100\mathrm{km}}\right)\left(\frac{T_0}{2.8\mathrm{MeV}}\right)^3$$

↓

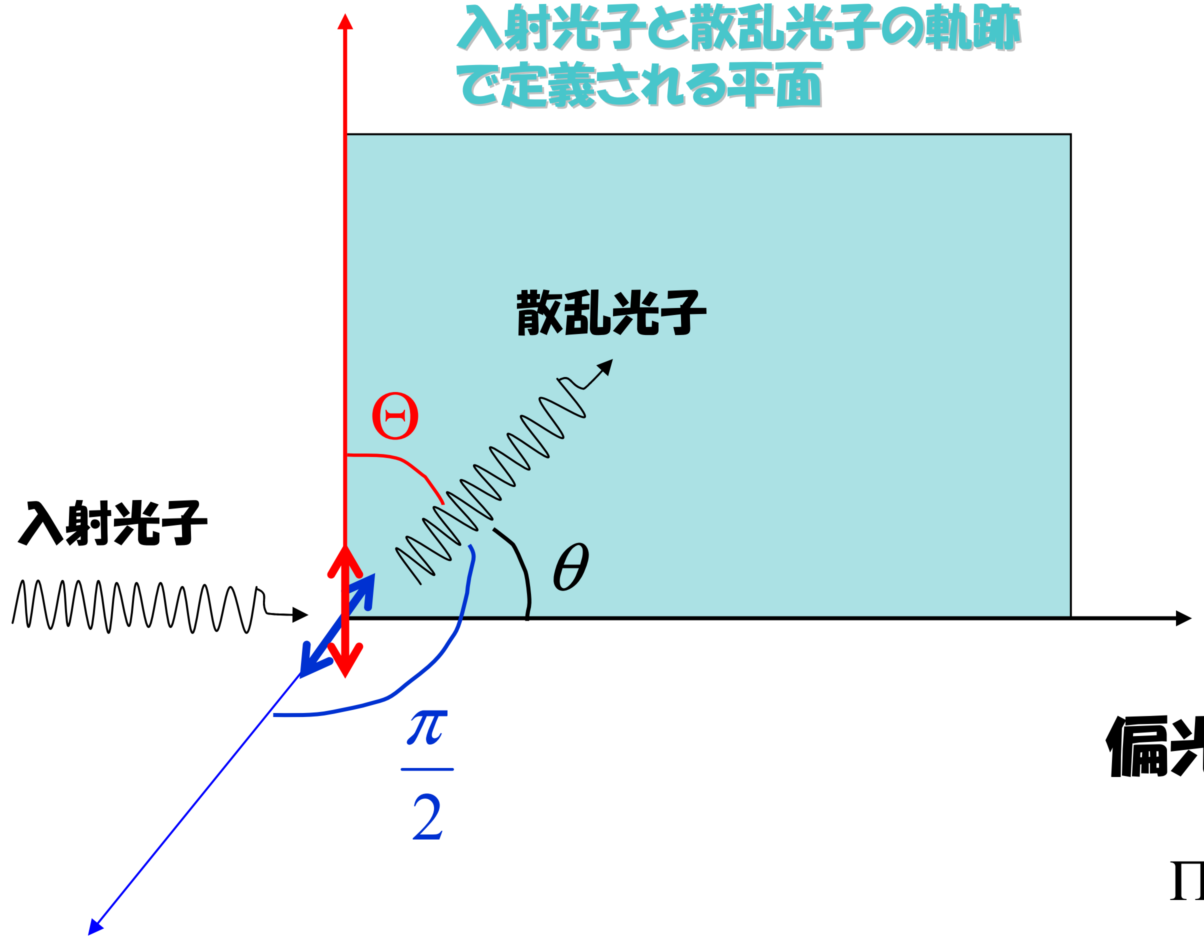
電子・陽電子・光子は一体化し、一流体として振舞う

相対論的ガスの状態方程式 $P = e_{\mathrm{rad}}/3$

↓

加速膨張 $\Gamma \propto R$

トムソン散乱による偏光



入射光が偏光してなければ、
青い方向に電場が振動する確率と、赤い方向に電場が振動する確率は1：1

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{T}}}{d\Omega}(\Theta)_{\mathrm{unpol}} = \frac{1}{2}\left[\frac{d\sigma_{\mathrm{T}}}{d\Omega}(\Theta) + \frac{d\sigma_{\mathrm{T}}}{d\Omega}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]_{\mathrm{pol}}$$

$$= \frac{1}{2} r_{\mathrm{e}}^2 \left(\sin^2\Theta + 1\right) = \frac{1}{2} r_{\mathrm{e}}^2 \left(1 + \cos^2\theta\right)$$

青方向の偏光光子Intensityが最大で、I_{max}とすると、最小になる赤方向のIntensityは$I_{min}/I_{max} = \cos^2\theta$となる。

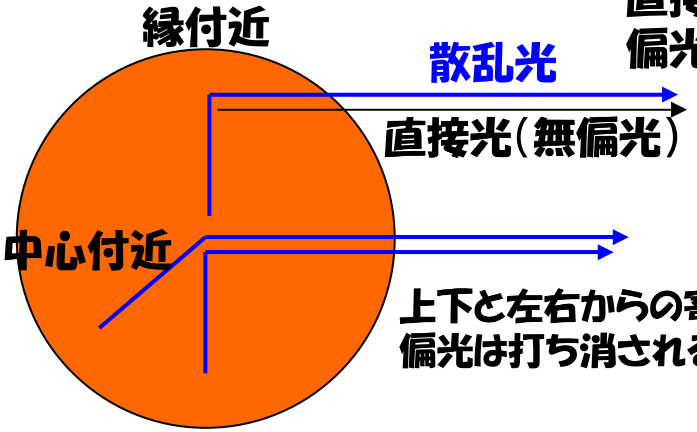
偏光度

$$\Pi = \frac{I_{\mathrm{max}} - I_{\mathrm{min}}}{I_{\mathrm{max}} + I_{\mathrm{min}}} = \frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$から測ると偏光度は100%

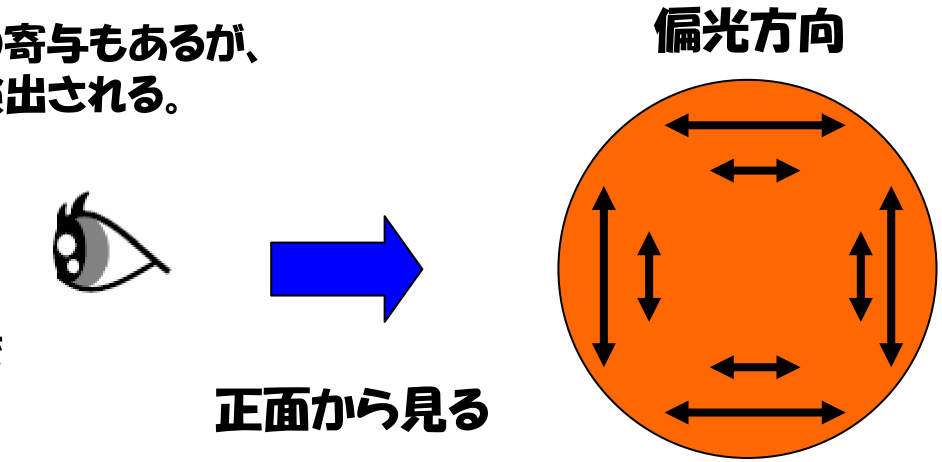
トムソン散乱による偏光

球対称のガスからの放射



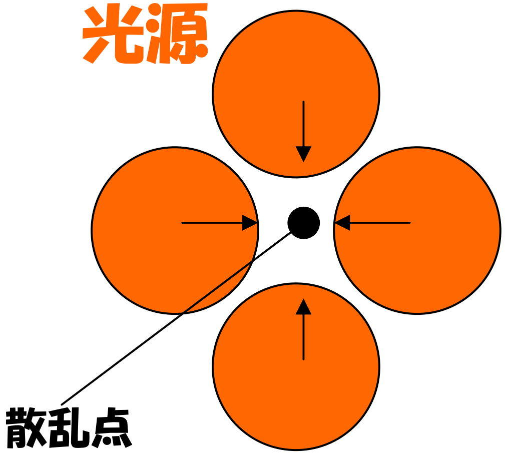
直接光の寄与もあるが、
偏光が検出される。

上下と左右からの寄与で
偏光は打ち消される。

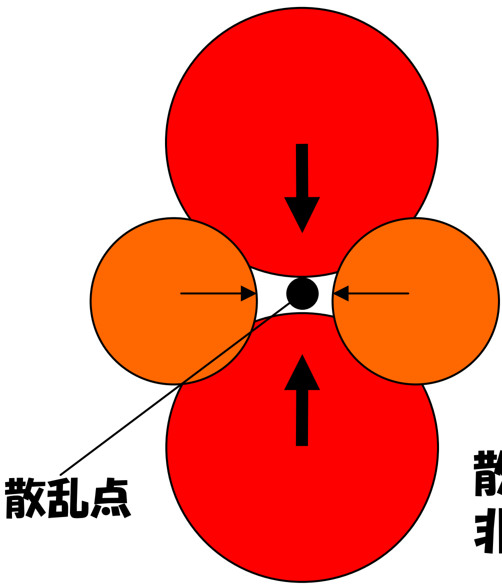


角度分解して観測できれば、縁
付近で偏光が受かる。
点源としてまとめて測ると、打消
しあって偏光はゼロ。

光源



打消しあって偏光ゼロ



散乱で偏光を作るには
非等方性が必要。

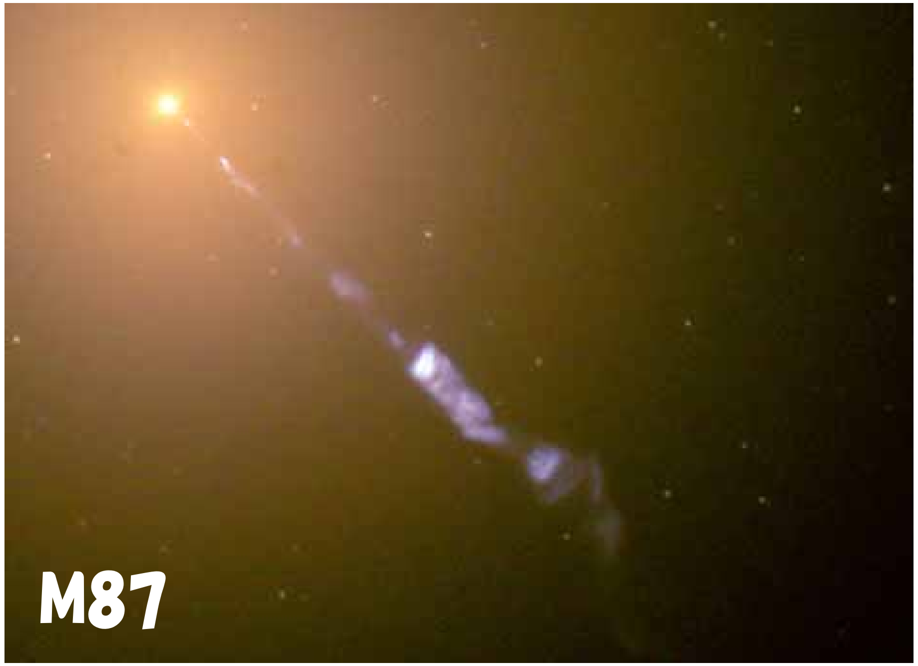
4. 放射に対する相対論的効果

- ローレンツ変換
- ローレンツ収縮・時間の遅れ
- 相対論的ビーミング
- 相対論的粒子からの放射
- 光子の放出時間と観測時間の違い
- その他重要な変換

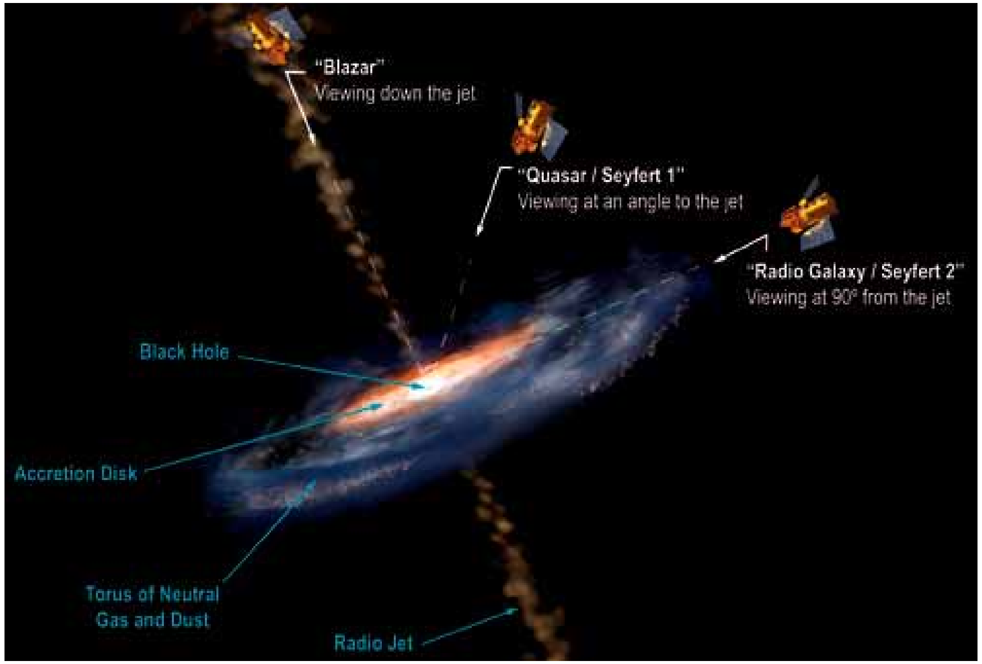
特殊相対論の復習

相対論的ビーミング

銀河中心BHからの相対論的ジェット



想像図



ローレンツ因子

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx 10$$

Q.なぜ反対側のジェットは見えないか？
A.相対論的ビーミング

超相対論的エネルギーの粒子

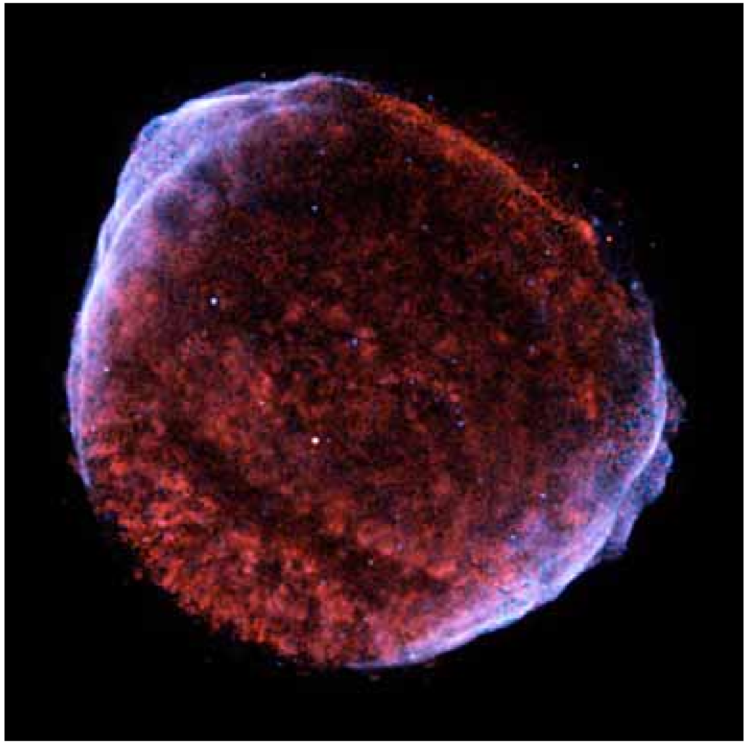
太陽の表面温度
～1eV << $m_e c^2$
非相対論的

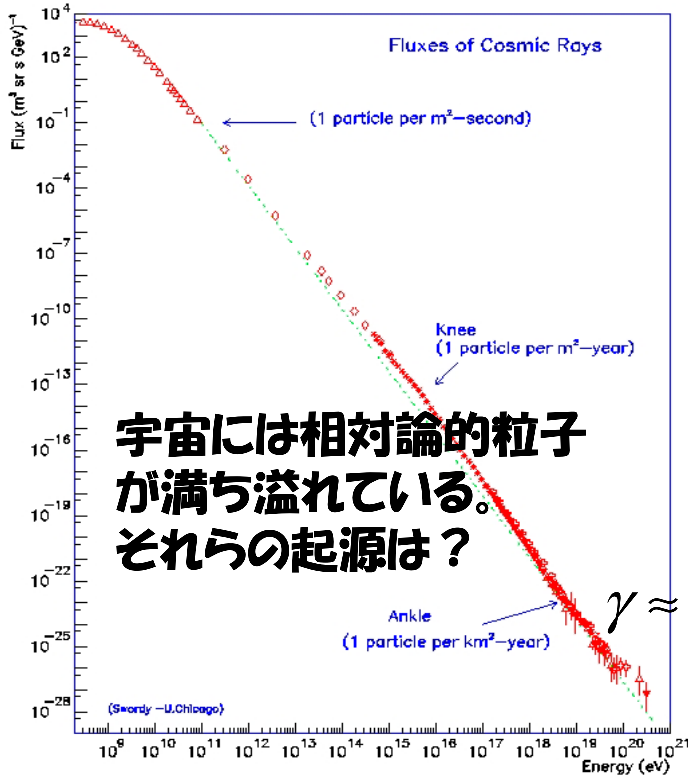
X線のエネルギー ～ keV
Q. 電子のエネルギーも同程度？
A. ×

典型的にはTeV >> $m_e c^2$
ローレンツ因子 $\gamma \approx 10^6$

放射に対して相対論的効果を考慮しなくてはいけない。

西暦1006年に爆発した
超新星残骸のX線画像





宇宙には相対論的粒子
が満ち溢れている。
それらの起源は？

$\gamma \approx 10^{11}$

“ベクトル”量の例

座標 $dx^\mu = (cdt, d\boldsymbol{x})$

電磁場ポテンシャル $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$

電流 $j^\mu = (\rho_e c, \boldsymbol{j})$

波数 $k^\mu = \left(\dfrac{\omega}{c}, \boldsymbol{k}\right)$

四元速度 $u^\mu = (\gamma c, \gamma \boldsymbol{v})$

運動量 $p^\mu = mu^\mu = \left(\dfrac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right)$

微分 $\partial^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

平坦な時空では

$A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$ に対し $A_\mu = (A^0, -\boldsymbol{A})$

ミュー粒子の観測

宇宙線＋大気原子核→π、γ線、電子・陽電子

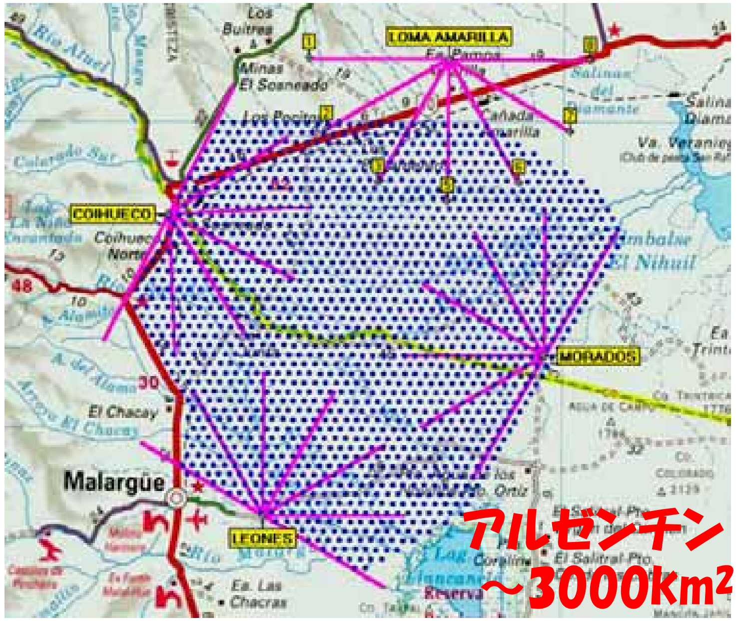
$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

ミューオン Flux～100 m^{-2} s^{-1}

質量～100MeV（電子～500keV）
静止系での寿命～2×10^{-6} s

$$\mu^+ \to e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

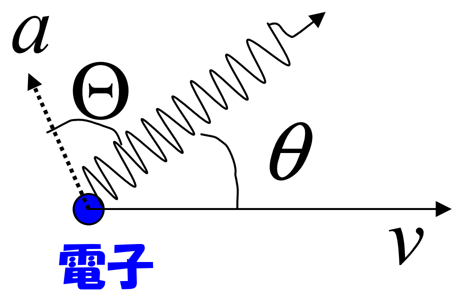
Pierre Auger Observatory



相対論的電子からの放射

電子のローレンツ因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\ \beta = \frac{v}{c},\ \delta = \frac{1}{\gamma(1-\beta\mu)}$$



観測時間間隔

$$\boxed{dt_{\rm obs} = (1-\beta\mu)dt = \gamma(1-\beta\mu)dt'}$$

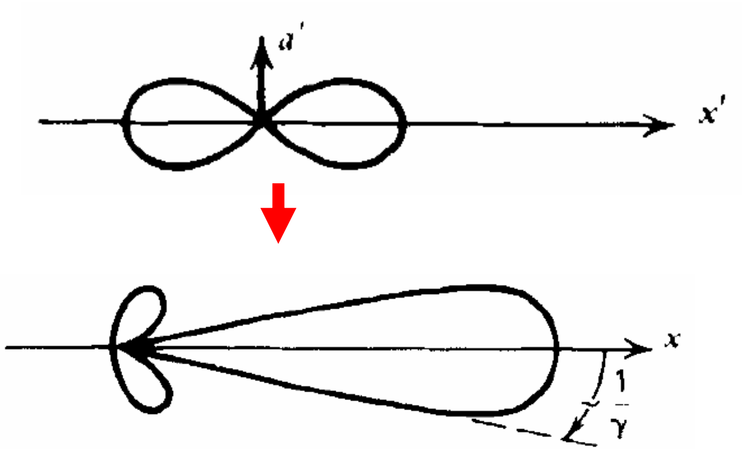
総エネルギー放射率

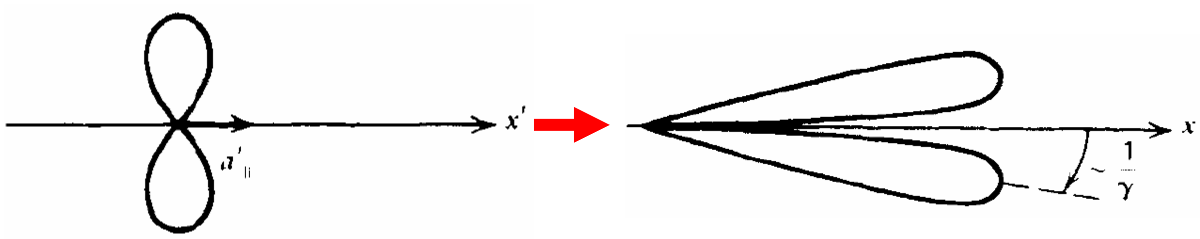
$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE'}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3}a'^2 = \frac{2e^2}{3c^3}\gamma^4\left(a_\perp^2 + \gamma^2 a_{//}^2\right)$$

角度分布

$$\frac{dE}{dt_{\rm obs}d\Omega} = \frac{1}{(1-\beta\mu)}\frac{dE}{dtd\Omega} = \delta^4\frac{dE'}{dt'd\Omega'}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{a_\perp^2 + \gamma^2 a_{//}^2}{(1-\beta\mu)^4}\sin^2\Theta'$$





重要な関係

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}},\ \beta = \frac{V}{c},\ \delta = \frac{1}{\Gamma(1-\beta\mu)}$$

ローレンツ収縮 $L_{//} = \dfrac{L'_{//}}{\Gamma}$

時間の拡張 $dt = \Gamma dt'$

速度 $v_{//} = \dfrac{v'_{//} + V}{1 + \dfrac{V v'_{//}}{c^2}},\ v_{\perp} = \dfrac{v'_{\perp}}{\Gamma\left(1 + \dfrac{V v'_{//}}{c^2}\right)}$

光線の角度 $\mu = \dfrac{\mu' + \beta}{1 + \beta\mu'},\ d\Omega = \dfrac{d\Omega'}{\Gamma^2 (1+\beta\mu')^2}$

振動数 $\nu = \Gamma(1 + \beta\mu')\nu' = \delta\nu'$

分布関数 $f = f'$

密度 $n = \Gamma n'$

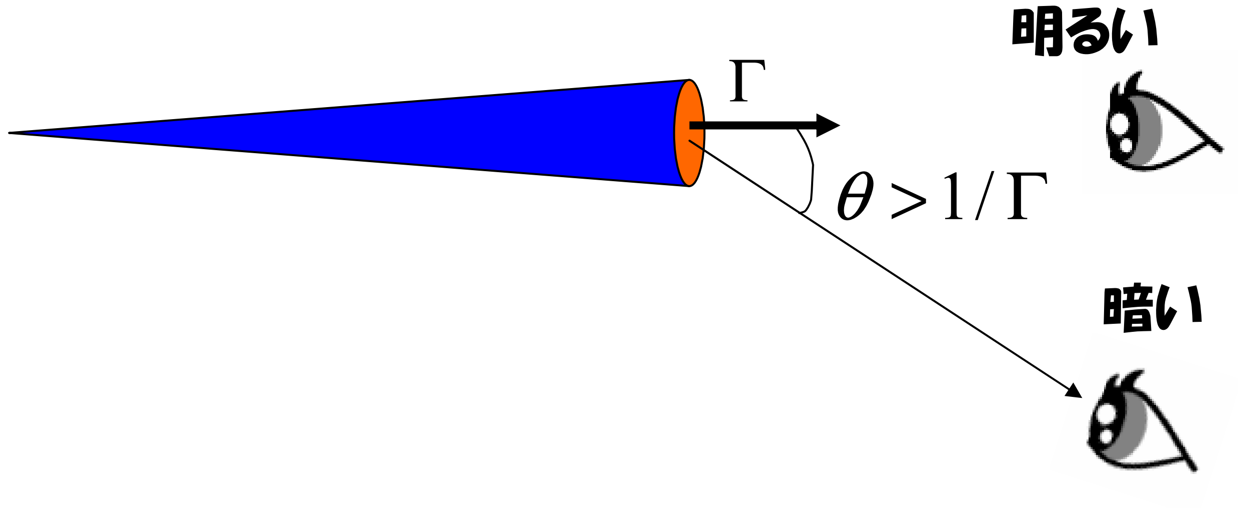
エネルギー密度 $e = \Gamma^2\left(e' + \beta^2 P'\right)$

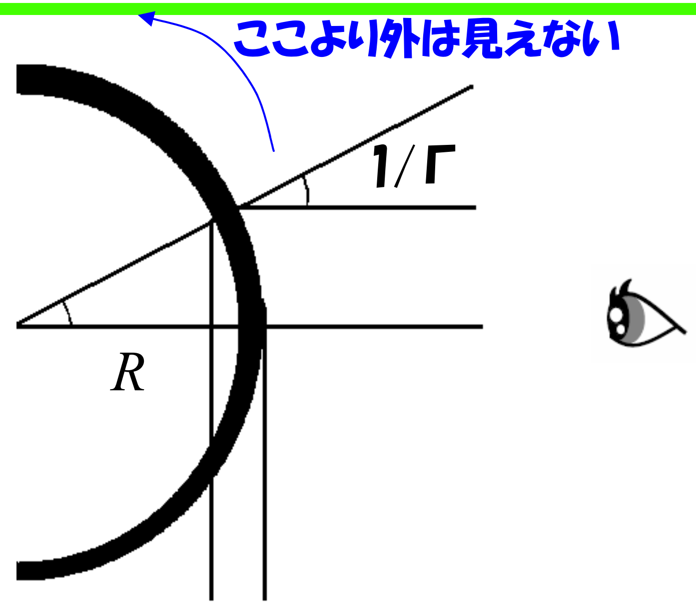
運動量空間 $\dfrac{d^3 p}{E} = \dfrac{d^3 p'}{E'}$

Emissivity $j_\nu = \Gamma^2 (1 + \beta\mu')^2 j'_{\nu'} = \left(\dfrac{\nu}{\nu'}\right)^2 j'_{\nu'}$

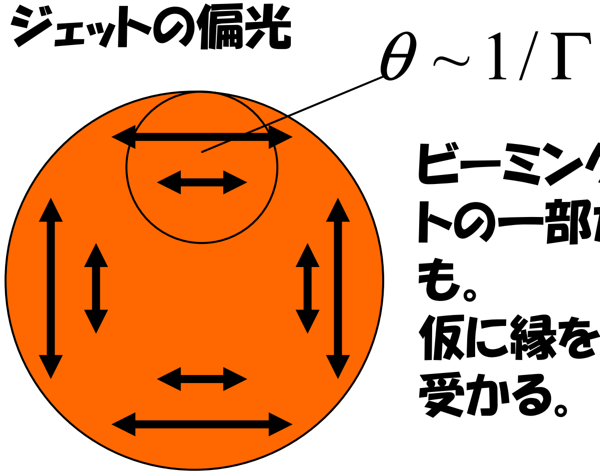
Intensity $I_\nu = \left(\dfrac{\nu}{\nu'}\right)^3 I'_{\nu'}$

相対論的ジェット



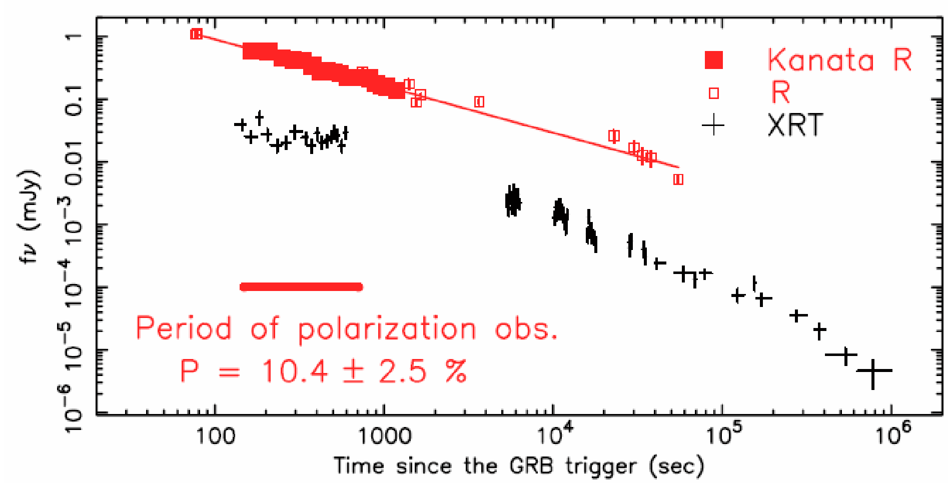


ジェットの偏光



ビーミングのおかげで、ジェットの一部だけしか見えないかも。
仮に縁を見ていれば、偏光が受かる。

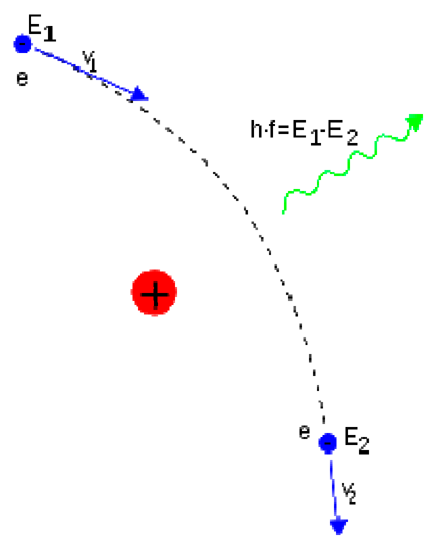
γ線バーストの残光光度曲線と偏光



Uehara+ 2012

5. 制動放射

- 一回散乱に伴う放射
- Gaunt因子
- 熱的制動放射
- 相対論的制動放射
- 自由自由吸収



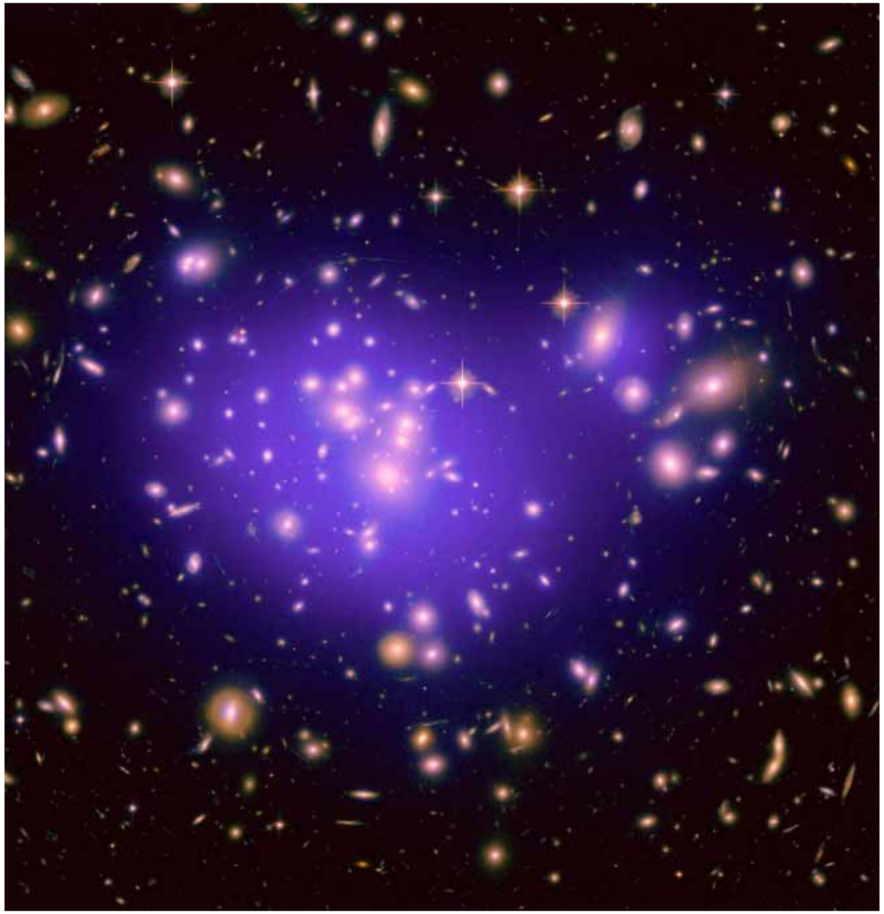
イオンと電子の散乱による放射

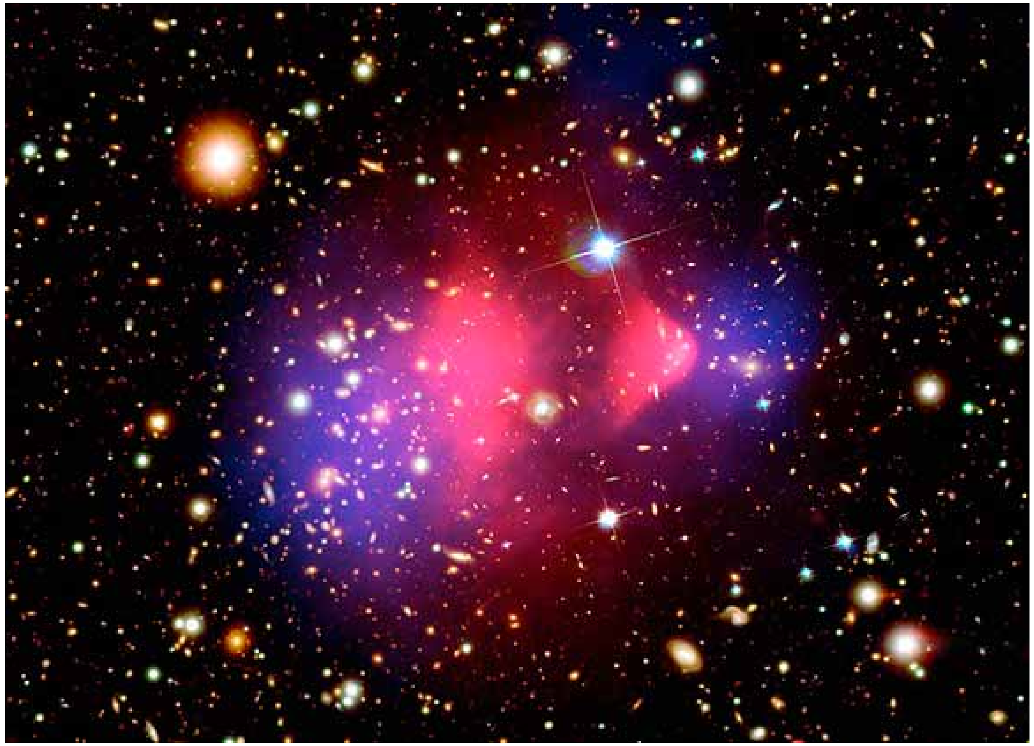
制動放射：銀河団からのX線

銀河団 Abell 1689
青：X線（ガス）

暗黒物質：85%
ガス：13%
星：2%

1E 0657-56（Bullet Cluster）
赤：ガス、青：暗黒物質



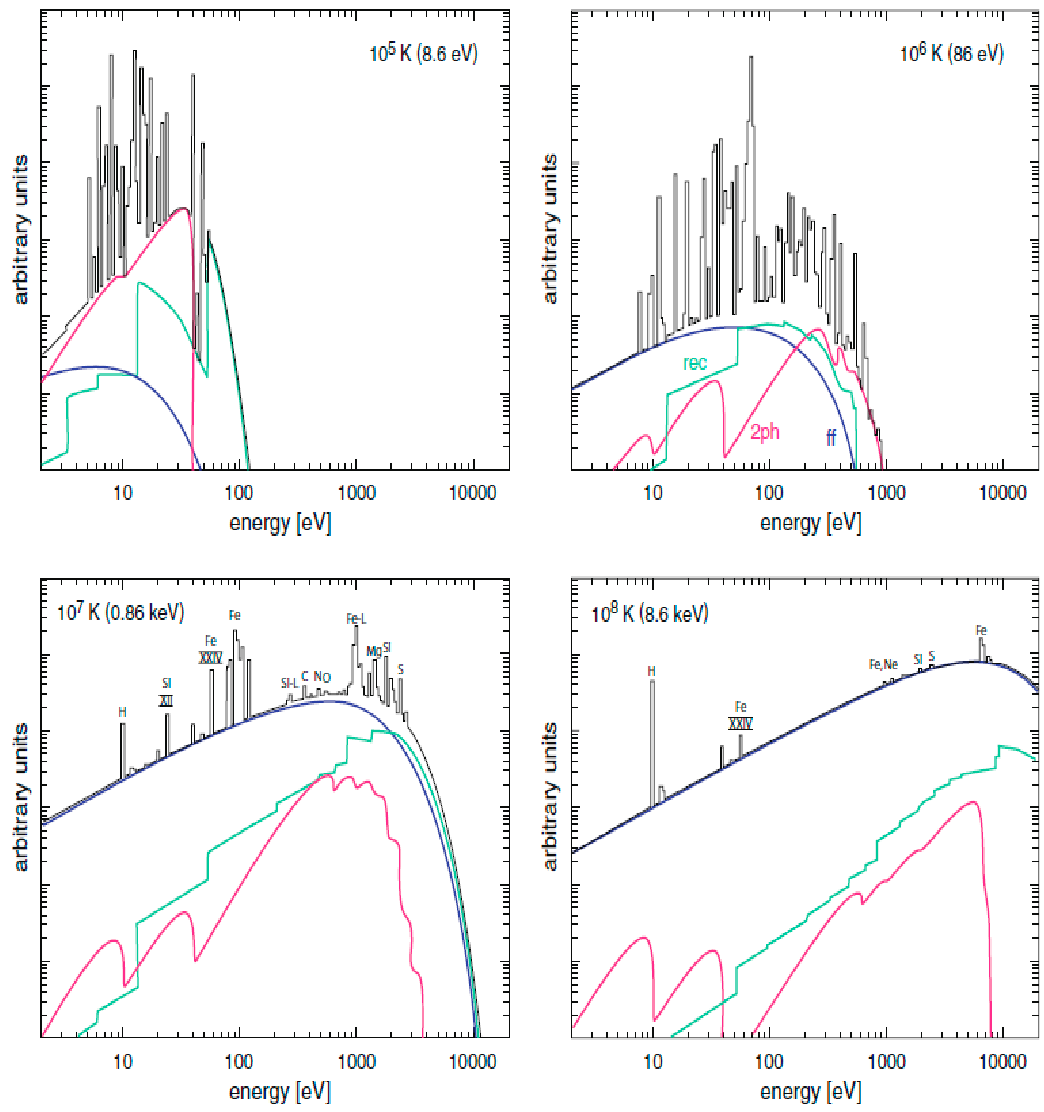


重力によるガスの降着→衝撃波→高温プラズマ

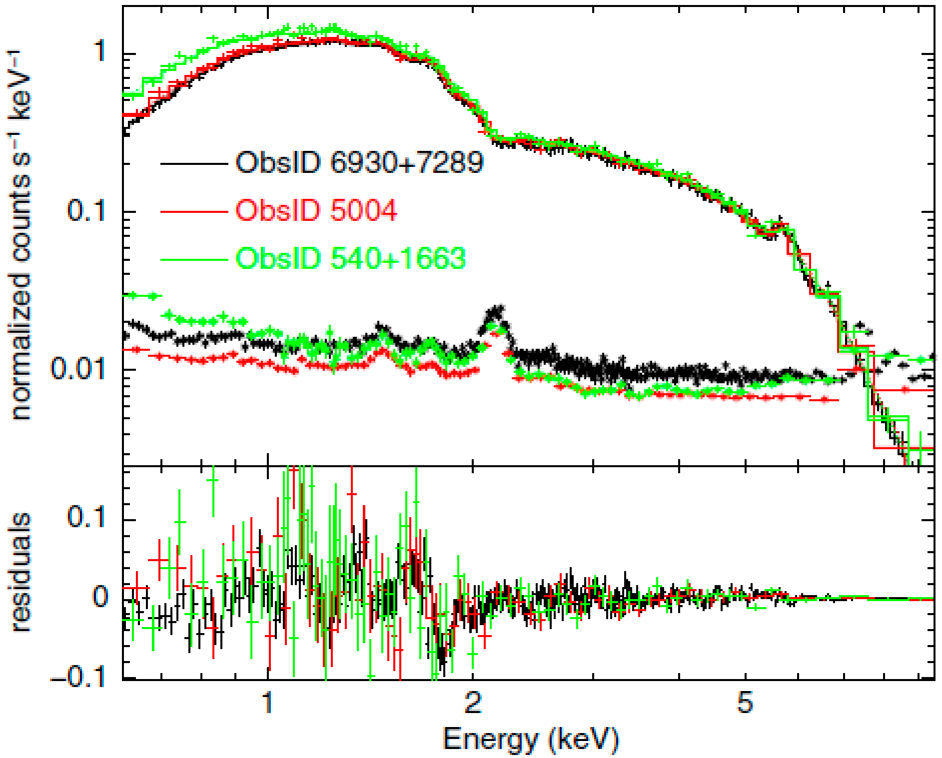
超新星残骸などでも

銀河団スペクトル

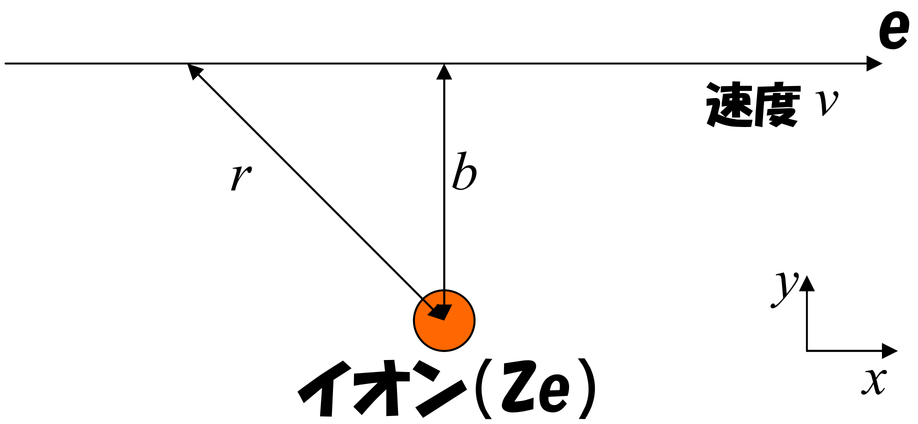
モデル(Böhringer & Werner 2010)



Abell 1689 (Peng+ 2009)
Chandra 中心3'の領域
T～10keV



一回散乱に伴う放射

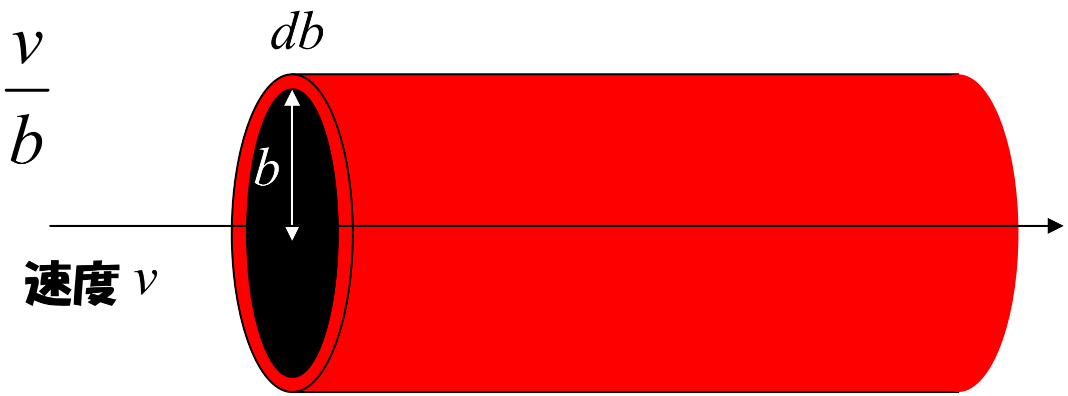


$$E_{\mathrm{rad}}(t) = \frac{|\ddot{\boldsymbol{d}}|}{c^2 R}\sin\Theta$$

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\ddot{d}}(\omega)}{c^2 R}\sin\Theta$$

$$\left.\frac{dE}{dA\,d\omega}\right|_{\mathrm{ss}} = c\left|\hat{E}(\omega)\right|^2 = \frac{Z^2 e^6}{\pi^2 c^3 R^2 m_e^2 b^2 v^2}\sin^2\Theta \quad \text{for } \omega \ll \frac{v}{b}$$

$$\left.\frac{dE}{d\omega}\right|_{\mathrm{ss}} = \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m_e^2 b^2 v^2} \quad \text{for } \omega \ll \frac{v}{b}$$



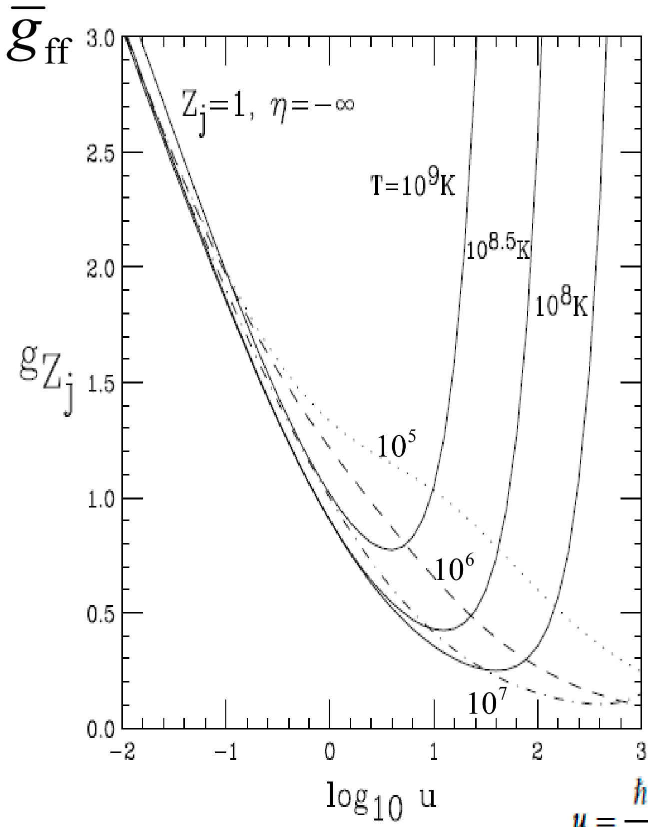
量子論に基づいた計算

ボルン近似

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma^*}{dk^* d\Omega^*} = {} & \frac{\alpha r_0^2}{2\pi}\,\frac{p_2^*}{p^2 k}(\epsilon - p\cos\theta) \\
& \times\Biggl\{\frac{1}{p}\left[\epsilon^2 + \frac{\epsilon}{\epsilon - p\cos\theta} - 2(2\epsilon^2+1)\cos^2\theta\right] \\
& + k(p - \epsilon\cos\theta) + \frac{p^2}{p_2^{*2}+2k}\bigl[k(p-\epsilon\cos\theta) - p\bigr] \\
& - \frac{2p\ln(\epsilon_2^* + p_2^*)}{p_2^*(\epsilon - p\cos\theta)} + \frac{p}{p_2^*\sqrt{p_2^{*2}+2k}}\ln\frac{\sqrt{p_2^{*2}+2k}+p_2^*}{\sqrt{p_2^{*2}+2k}-p_2^*} \\
& \times\left[1 - 2k + \frac{k^2}{p_2^{*2}+2k}\bigl\{k(\epsilon - p\cos\theta)^2 + p(\epsilon\cos\theta - p)\bigr\}\right] \\
& + \frac{1}{p_2^*}\ln\frac{p(p+p_2^*) - \epsilon k(\epsilon - p\cos\theta)}{k(\epsilon - p\cos\theta)} \\
& \times\Bigl[2\epsilon\sin^2\theta\bigl\{k(\epsilon - p\cos\theta)(3/p^2+1) - \epsilon\bigr\} \\
& + (2\epsilon^2 - 1)(1 + k/p^2) + 2\bigl\{\epsilon - k(\epsilon - p\cos\theta)\bigr\}^2 \\
& - (k/p^2)(\epsilon - p\cos\theta)(5\epsilon + pk\cos\theta)\Bigr]\Biggr\},
\end{aligned}
$$

Haug 2003

Gaunt因子
Nozawa+ 1998



$$u = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

熱的制動放射

$$\frac{dE}{dtdVd\nu}=n_\mathrm{e}n_\mathrm{i}Z^2\frac{2^5\pi e^6}{3m_\mathrm{e}c^3}\left(\frac{2\pi}{3m_\mathrm{e}T}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\varepsilon}{T}\right]\bar{g}_\mathrm{ff}$$

$$\approx 2.0\times10^{-41}Z^2n_\mathrm{e}n_\mathrm{i}\left(\frac{T}{1\mathrm{keV}}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\varepsilon}{T}\right]\bar{g}_\mathrm{ff}\ \ \mathrm{erg\ cm^{-3}\ s^{-1}\ Hz^{-1}}$$

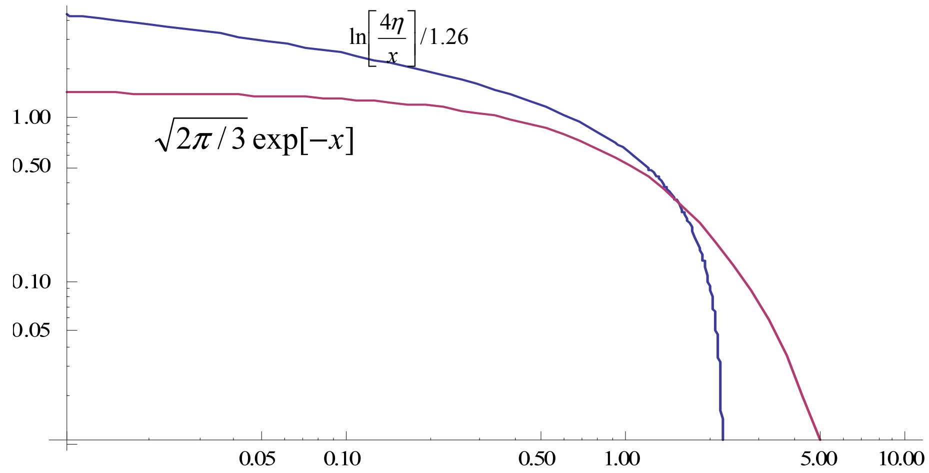
光子のベキ指数：－1
（プランク分布：1）

Svensson 1984

$$\frac{dE}{dtdVd\nu}=n_\mathrm{e}n_\mathrm{p}\frac{2^5\pi e^6}{3m_\mathrm{e}^2c^4}\ln\left[4\eta(1+C_1\theta)\frac{T}{\varepsilon}\right]\frac{\left(1+2\theta+2\theta^2\right)}{\exp\left(\frac{1}{\theta}\right)K_2\left(\frac{1}{\theta}\right)}$$

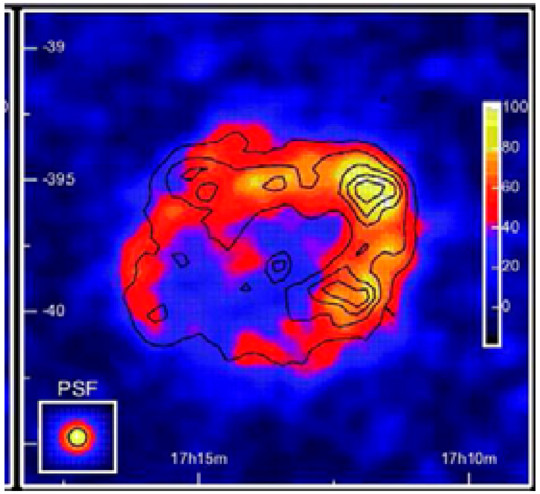
$$\theta\equiv\frac{T}{m_\mathrm{e}c^2},C_1=\frac{\eta}{2}\exp\left(\frac{5}{2}\right)\approx3.42,\ \eta=\exp(-\gamma_\mathrm{E}),\ \gamma_\mathrm{E}\approx0.5772$$

$$\exp\left(\frac{1}{\theta}\right)K_2\left(\frac{1}{\theta}\right)\approx1.26\sqrt{\theta}\ \ \text{for }\theta<<1$$



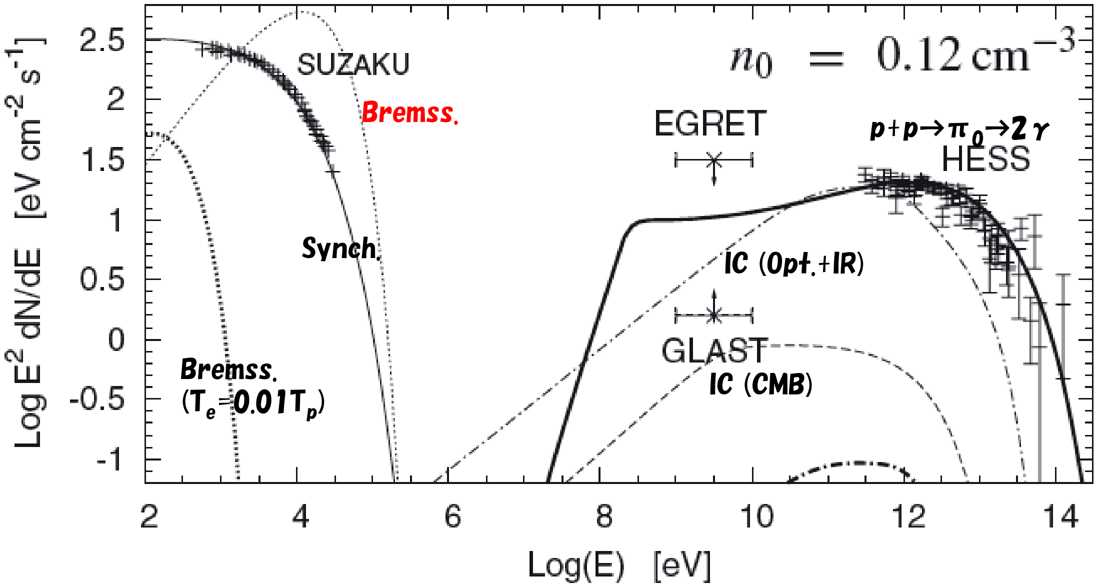
超新星残骸 RX J1713.7−3946

ガンマ線(等高線:X線)

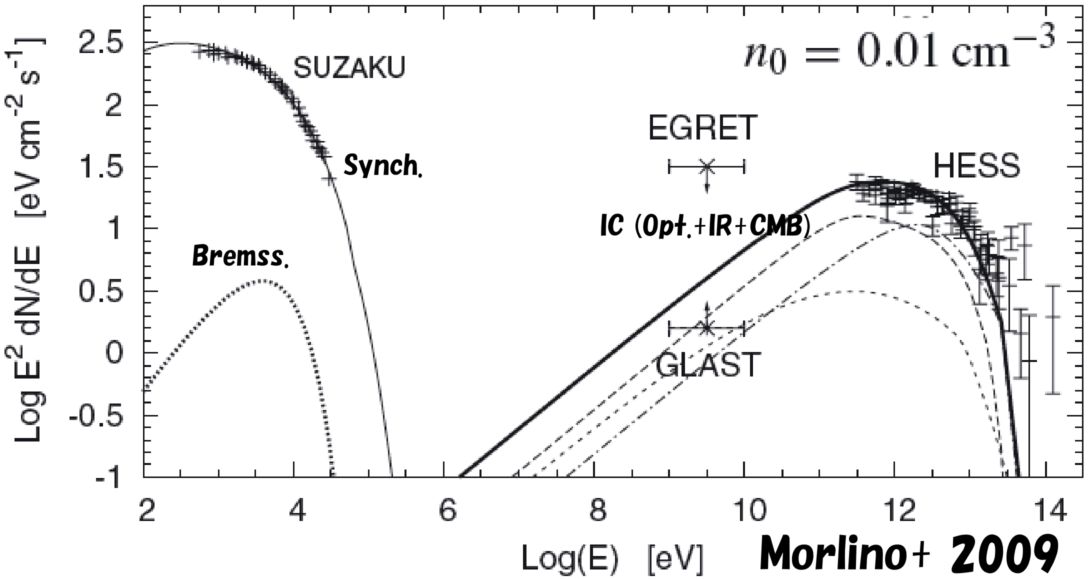


Aharonian+ 2007

ハドロン・シナリオ



レプトン・シナリオ



Morlino+ 2009

高エネルギー陽子とガスの衝突からパイ中間子を作り、ガンマ線を説明する場合、高いガス密度を要求。
高いガス密度は、熱的X線放射を予言し、モデルに制限を与える。

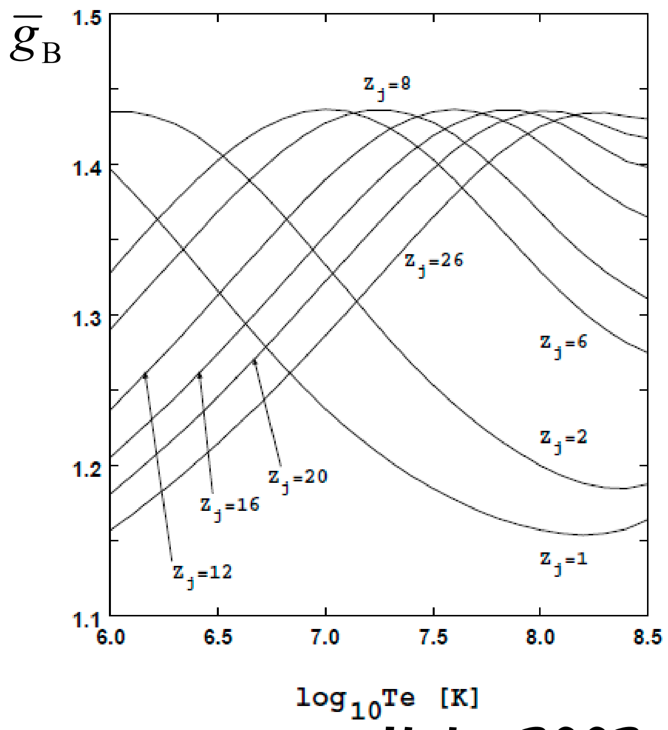
冷却率(放射パワー)

$$\frac{dE}{dtdV} = n_e n_i Z^2 \frac{2^5 \pi e^6}{3hm_e c^3}\left(\frac{2\pi T}{3m_e}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{g}_B$$

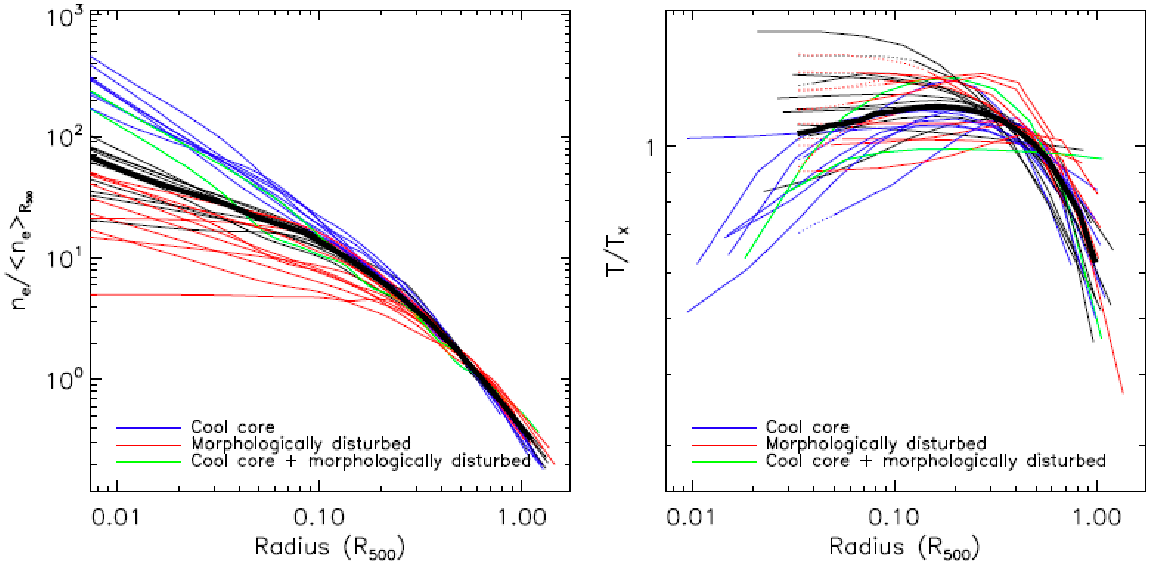
$$\approx 4.9\times10^{-24} Z^2 n_e n_i \left(\frac{T}{1\mathrm{keV}}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{g}_B \;\; \mathrm{erg\ cm^{-3}\ s^{-1}}$$

ガスの冷却時間スケール

$$t_{\mathrm{cool}} = \frac{\frac{3}{2} n_e T}{\frac{dE}{dtdV}} \propto n_e^{-1} T^{\frac{1}{2}}$$



Itoh+ 2002



銀河団の密度・温度プロファイル Arnaud+ 2010

ガスの圧力分布から質量を見積もれる。

中心部を加熱する機構が必要。未解明。

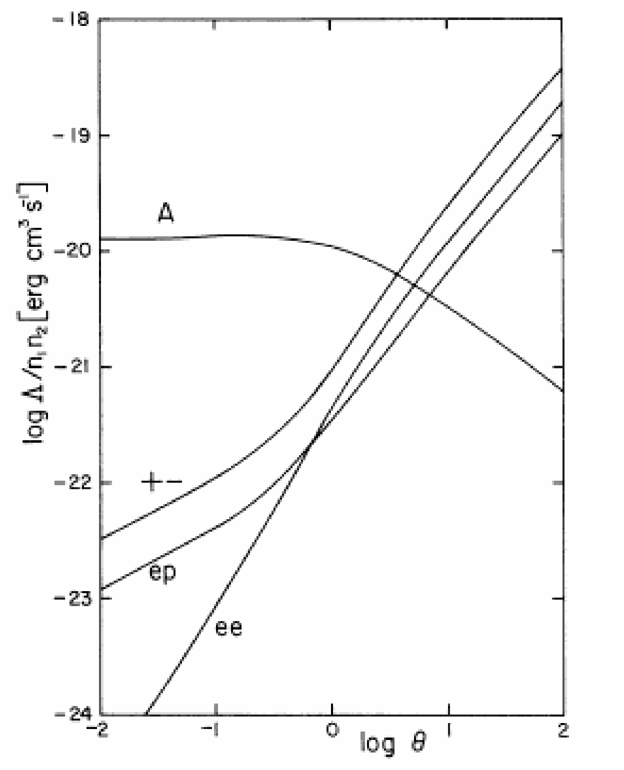
相対論的ガスの場合

熱的放射

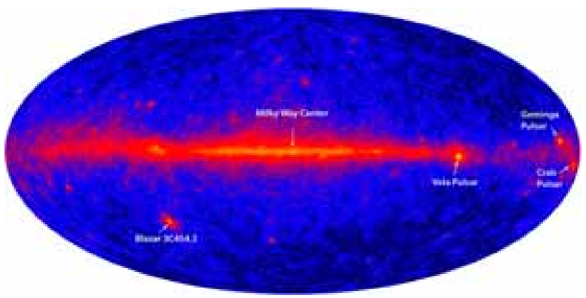
$$\frac{dE}{dtdV}=n_{\mathrm{e}}n_{\mathrm{p}}\frac{2^5e^6}{3hm_{\mathrm{e}}c^3}\left(\frac{2T}{\pi m_{\mathrm{e}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+1.781\theta^{1.34}\right)\ \text{for}\ \frac{1}{137^2}<<\theta\le 1$$

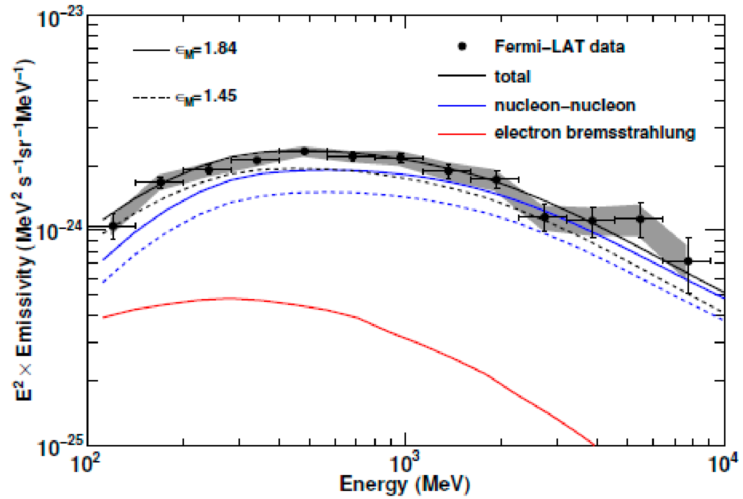
$$=n_{\mathrm{e}}n_{\mathrm{p}}\frac{12e^6}{hm_{\mathrm{e}}^2c^4}T\left(\ln\left(2\eta\theta+0.42\right)+\frac{3}{2}\right)\ \text{for}\ \theta\ge 1$$

Svensson 1982



非熱的放射





銀河面の拡散ガンマ線 Abdo+ 2009

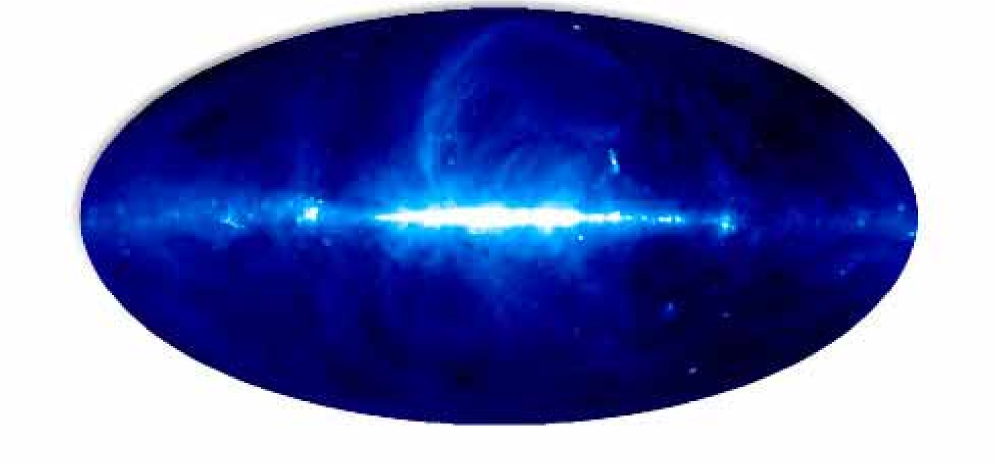
$$E\propto n\times\left[\left(n-\frac{v}{c}\right)\times\dot{v}\right]$$

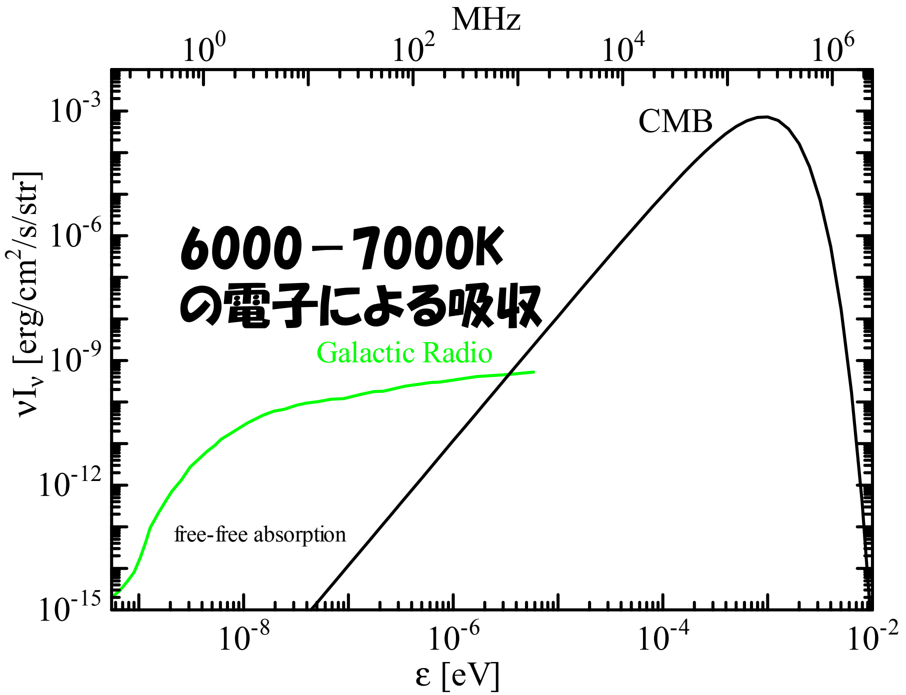
双極近似では無視した項

双極子の寄与がゼロでも、相対論的になると放射が放たれる。

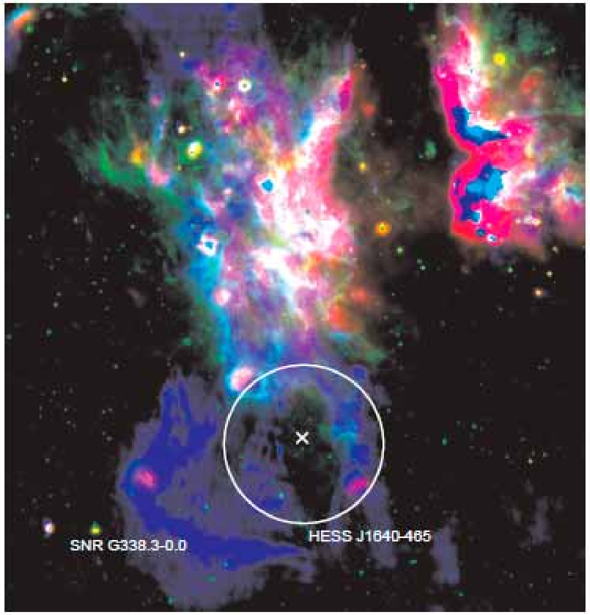
自由自由吸収

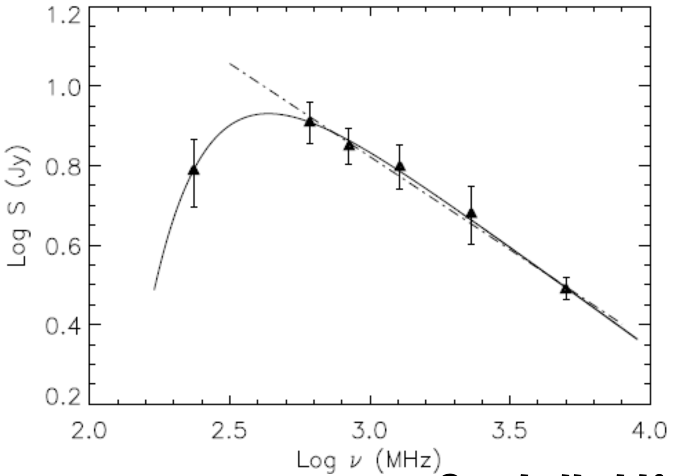
Galactic Radio Emission





SNR 338.3-0.0 青:電波、緑・赤:赤外



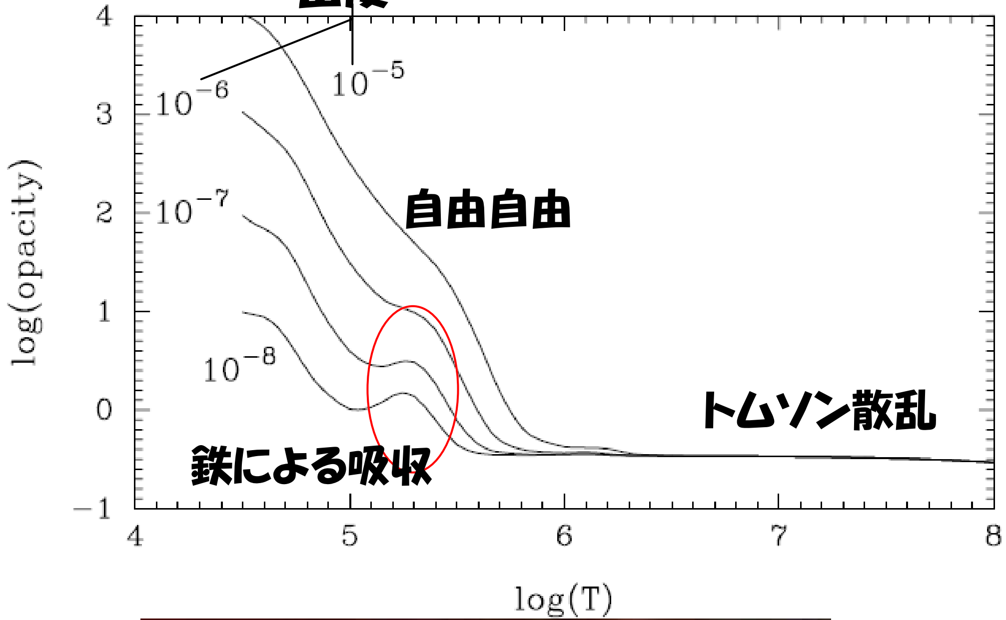


Castelletti+ 2012

自由自由吸収に対するRosseland平均吸収係数

$$\alpha_{\mathrm{R}} \equiv \frac{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \propto T^{-\frac{7}{2}} n_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{i}}$$

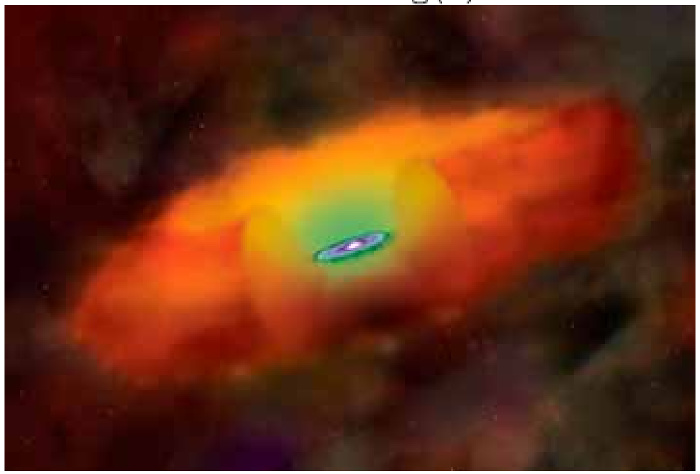
Soker & Lasota 2004



Rosseland近似

$$\frac{dE}{dtdA} = -\frac{16\sigma_{\mathrm{SB}}}{3\alpha_{\mathrm{R}}} T^3 \frac{\partial T}{\partial r}$$

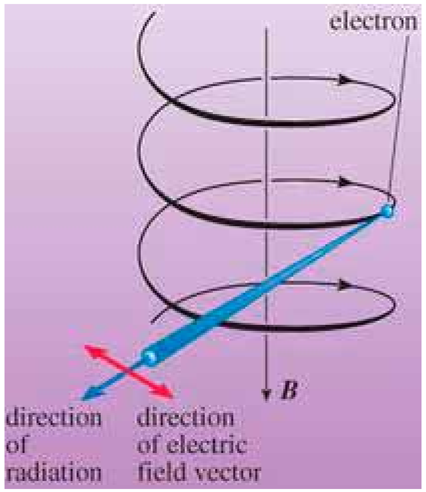
吸収が弱いと温度勾配も弱い。
温度が低いと自由自由が効いてくる。



降着円盤でも同じ技法が用いられている。
BHに吸い込まれる前に、輻射は脱出できるか？

6. シンクロトロン放射

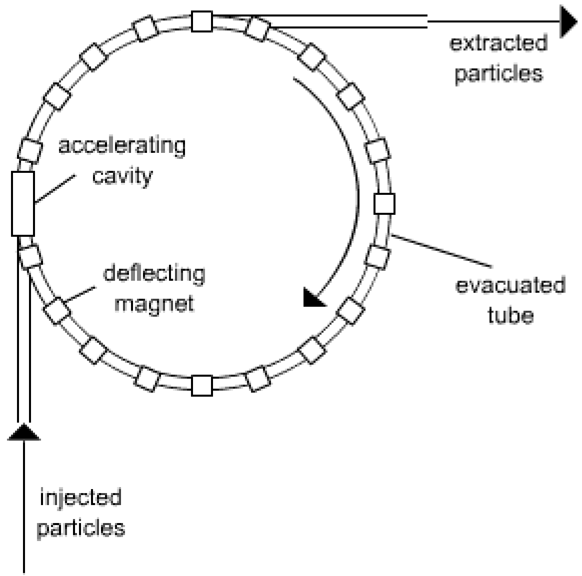
- 磁場の中の電子の運動
- エネルギー放射率
- 典型的な振動数
- シンクロトロン関数
- 非熱的な電子集団からの放射
- シンクロトロン自己吸収



磁場による電子加速に伴う放射

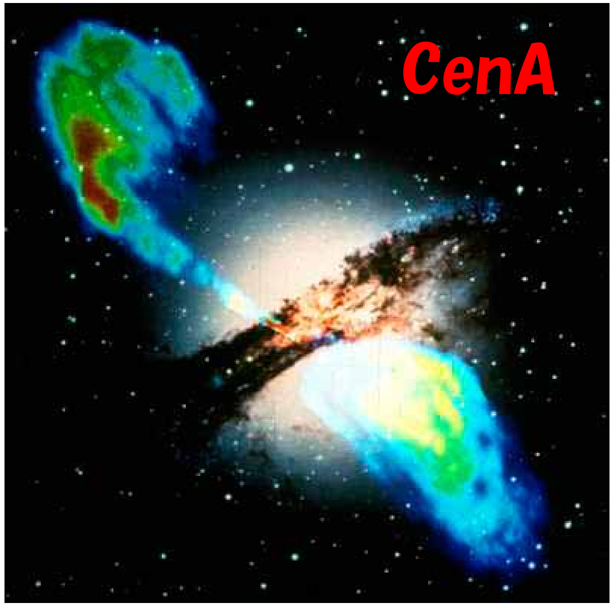
シンクロトロン

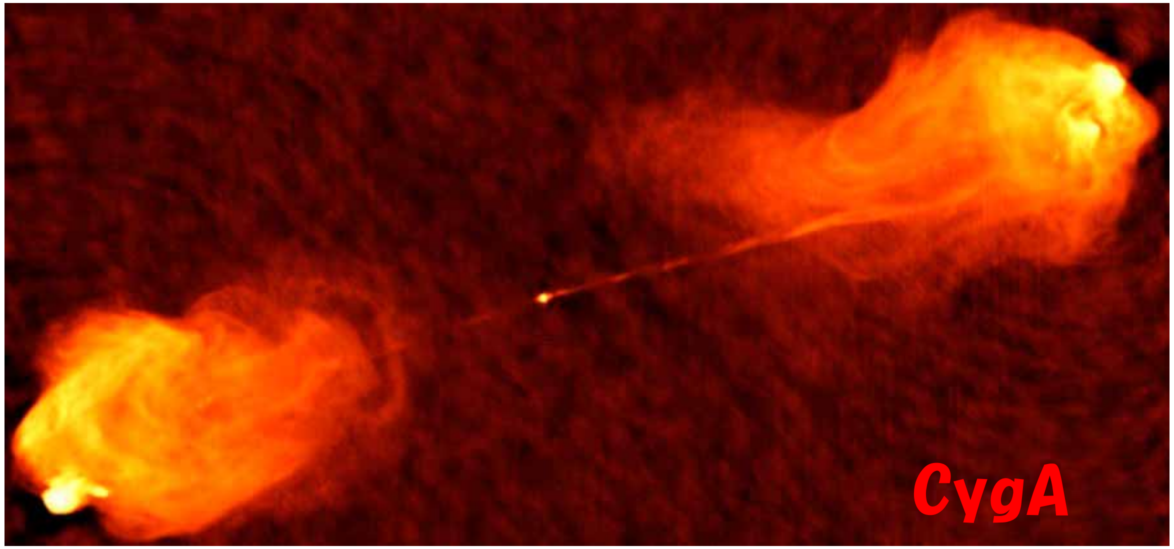
SPring-8

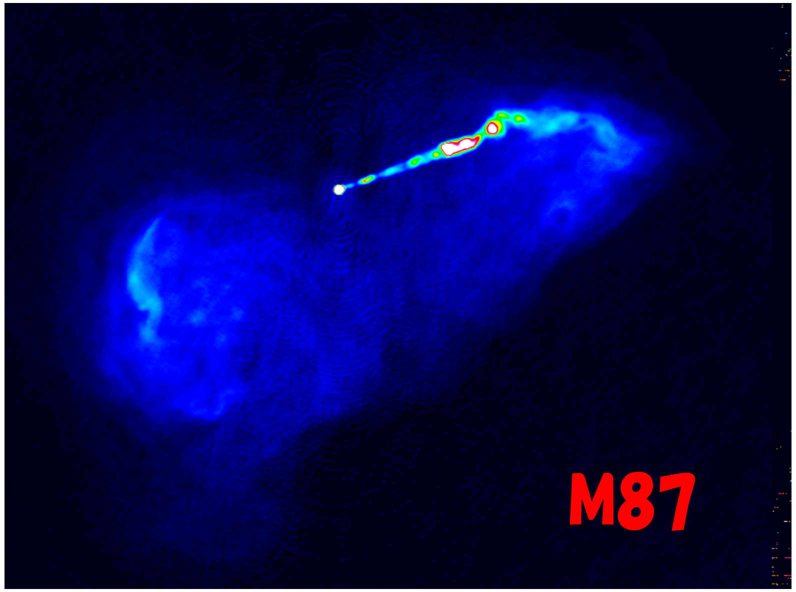


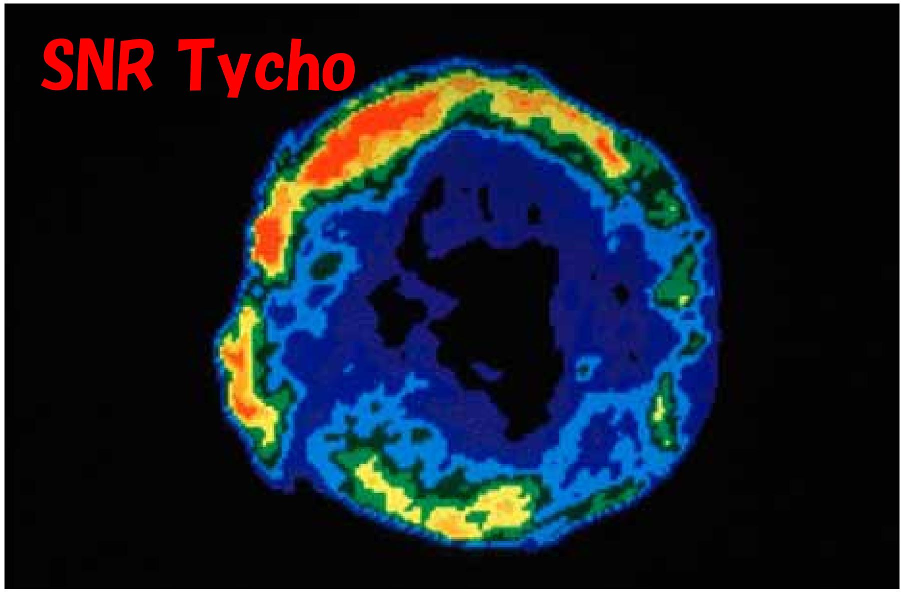
LHC
（陽子加速器
半径4.3km）

シンクロトロン(電波)

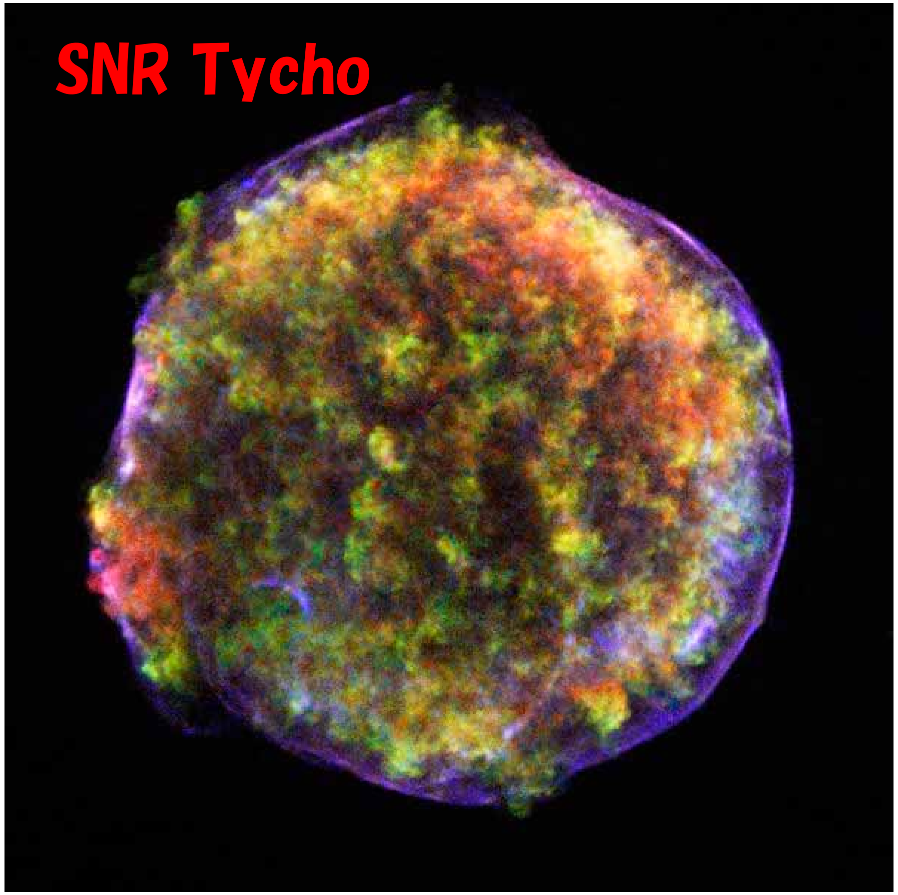


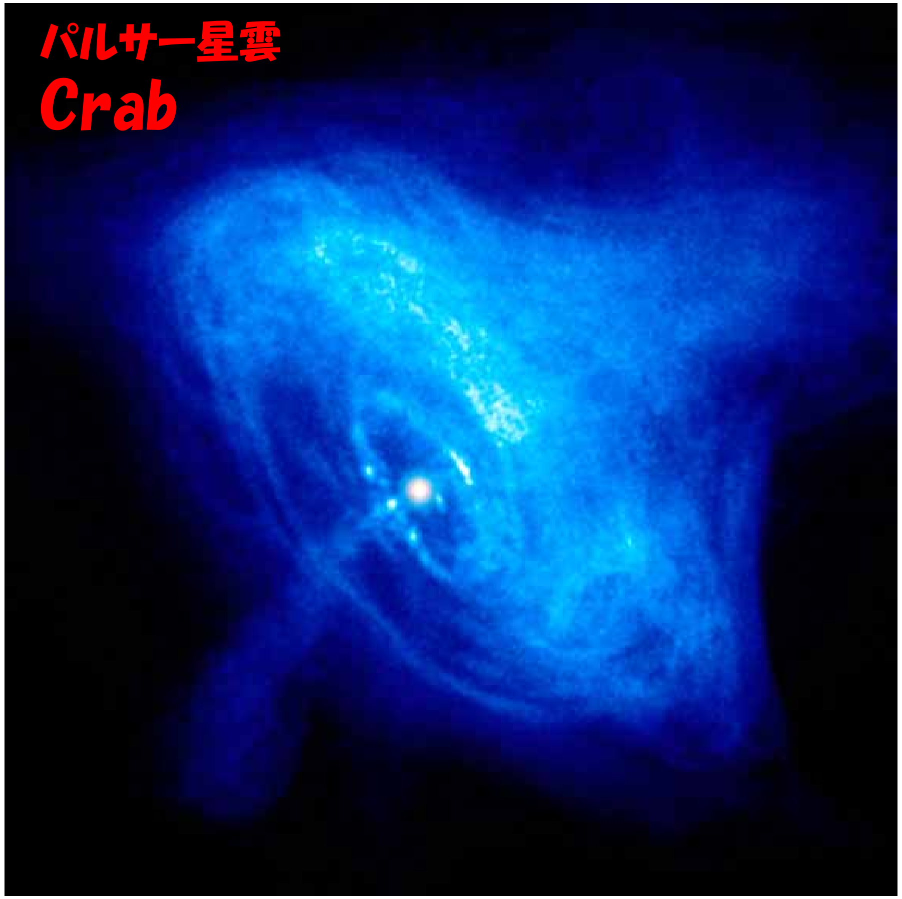






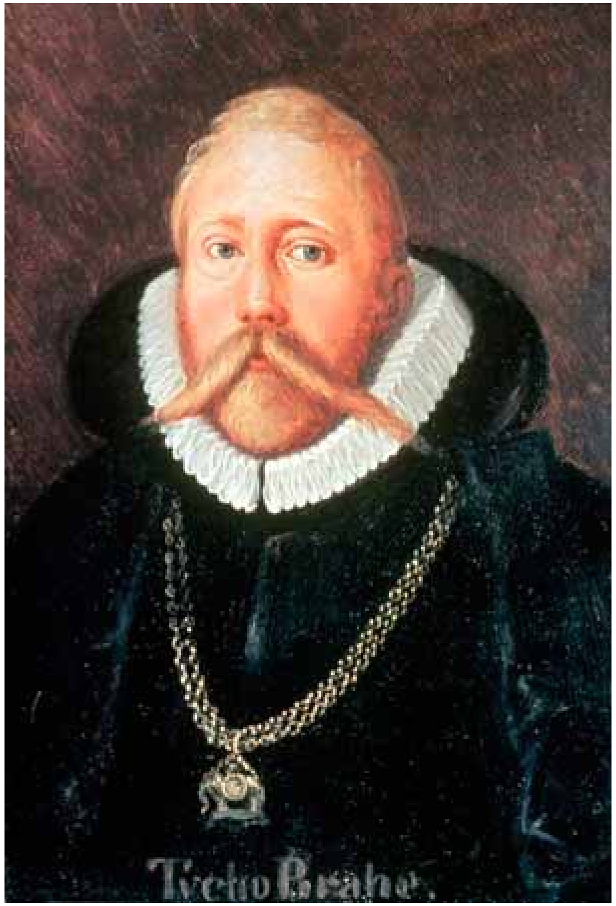
シンクロトロン(X線)





Tycho's SNRの時代

1572年、Tycho Brahe(デンマーク)
によって発見(肉眼)された超新星



その頃の世界は
英国：チューダー朝の絶対王政絶頂期
仏国：ヴァロア朝の元統一
独国：プロイセン、ザクセン、
バイエルンなどに分割
ルネサンスからバロックへの移行期
ローマ教皇：グレゴリウス13世

エリザベス一世

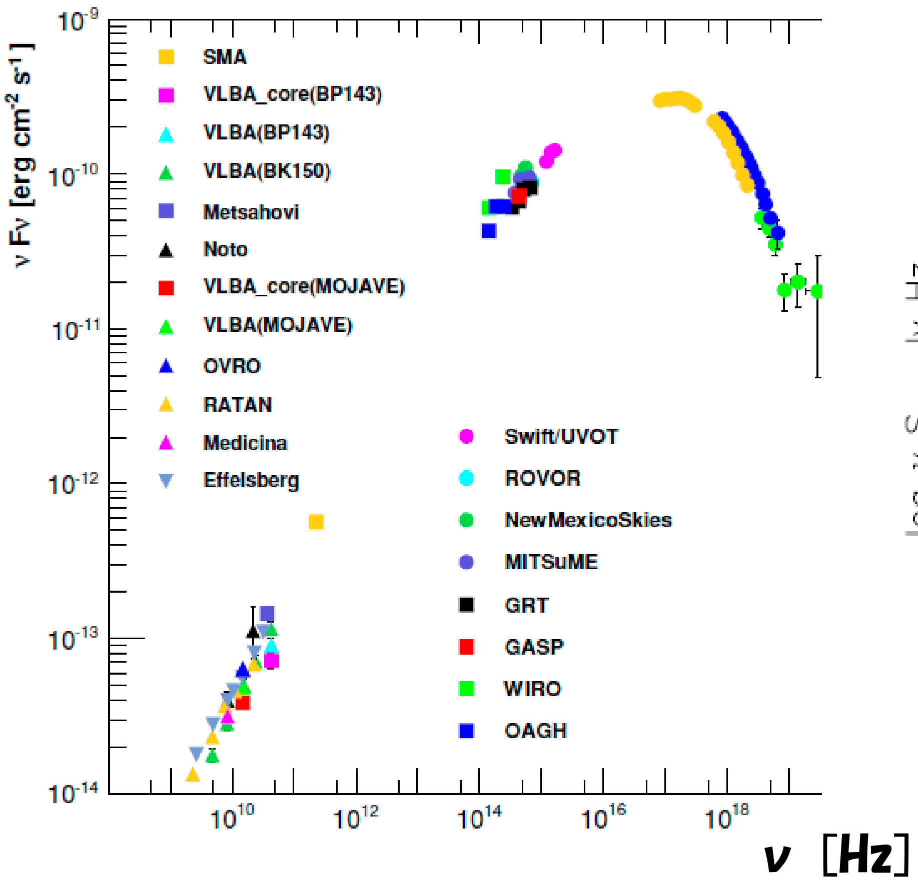
万暦赤絵

中東：オスマン帝国
中国：明朝
日本は？

その他の歴史的SNR： RCW 86(185年、後漢書)、SN 1006(宋史、安倍吉昌、アリ・イブン・リドワン、ザンクト・ガレン修道院)、Crab(1054年、宋史など)、Kepler(1604年)、1987A(KamioKande II)

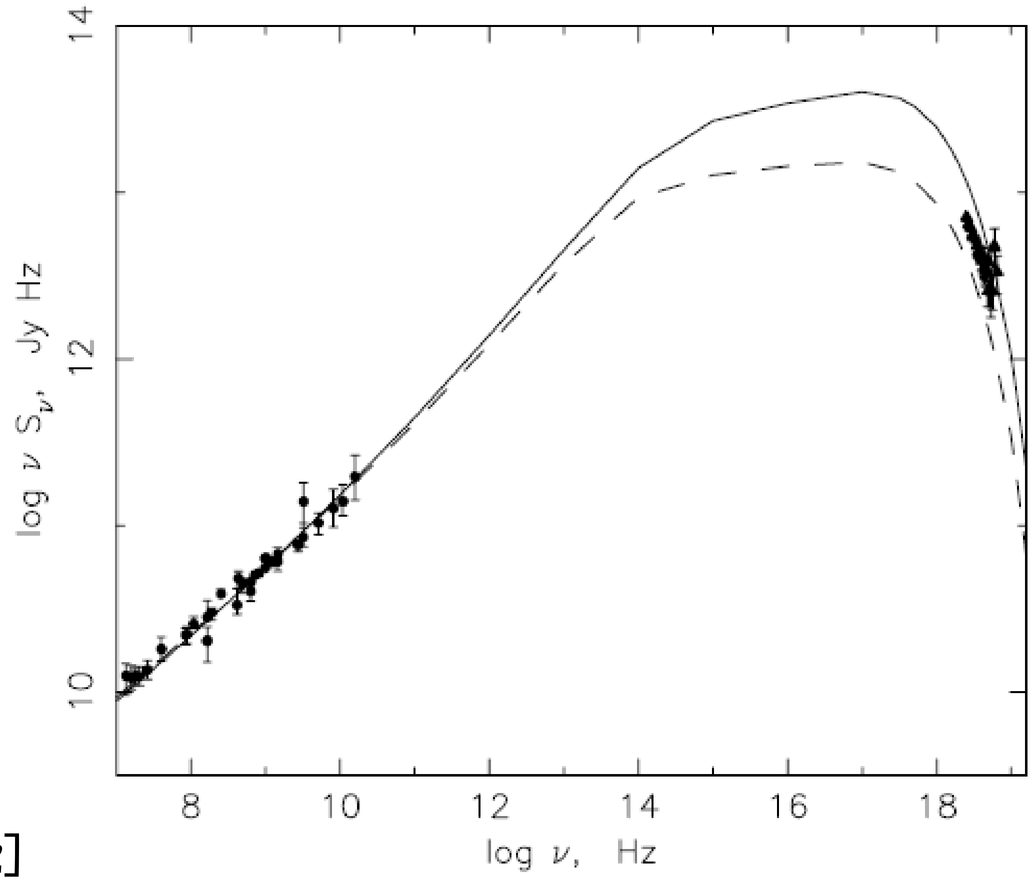
シンクロトロン(スペクトル)

AGN
Mrk 421



Abdo+ 2011

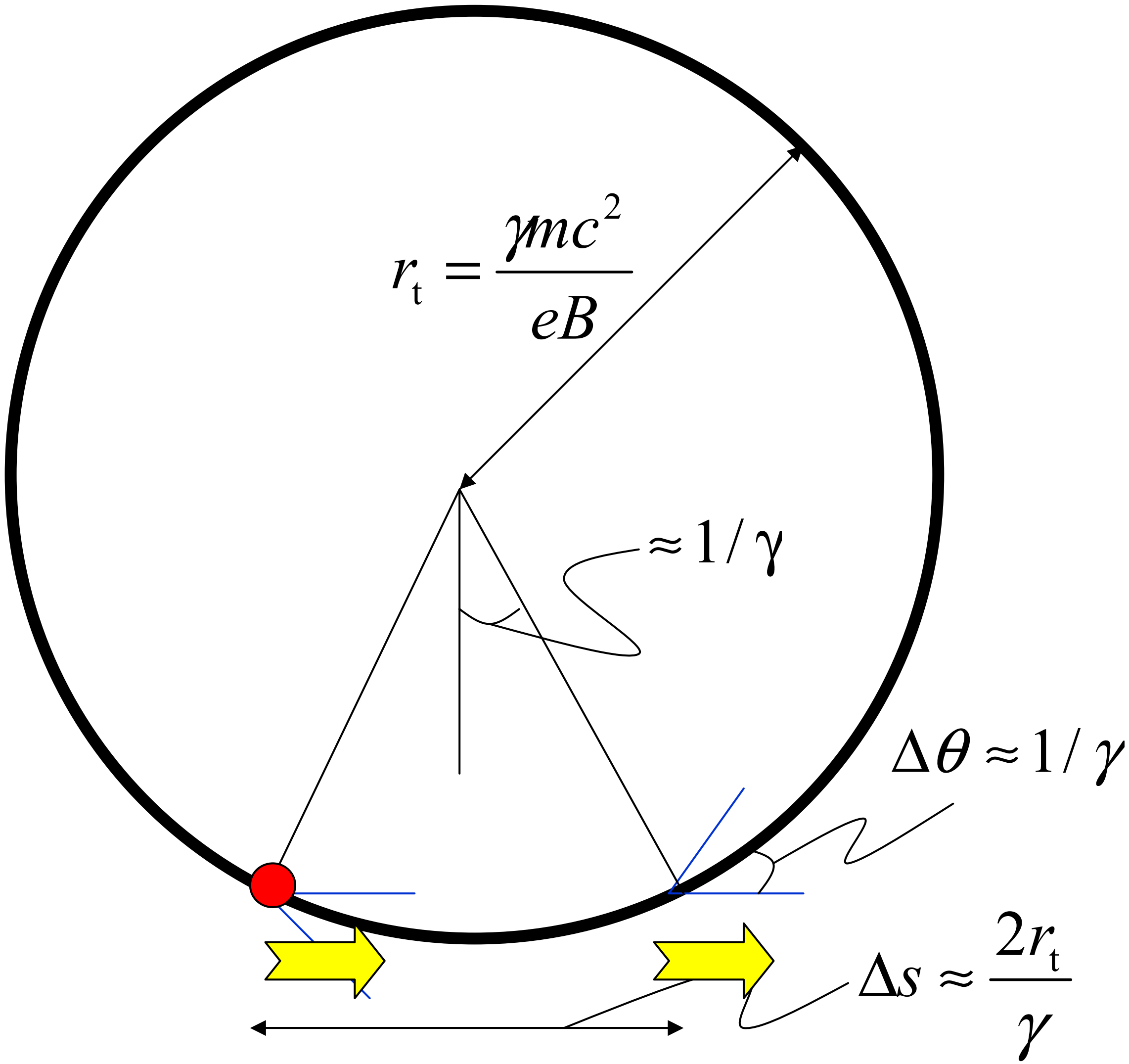
SNR
Tycho



Völk+ 2005

シンクロトロンの典型的振動数

$\alpha = \pi / 2$ の時



$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{2mc^2}{eB}$$

$$\Delta t_{\mathrm{obs}} \approx \Delta t / \gamma^2$$

$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{3\gamma^2 eB}{2mc}$$

シンクロトロンのピーク

$$\varepsilon_{\max} = \delta \frac{3\hbar e B'}{2 m_e c} \gamma_{\max}^2 = \boxed{0.35 \left(\frac{\delta}{20}\right)\left(\frac{B'}{0.1\mathrm{G}}\right)\left(\frac{\gamma_{\max}}{10^5}\right)^2 \mathrm{keV}}$$

$$\varepsilon_{\max} L_{\mathrm{iso},\varepsilon_{\max}} = \int d\gamma N_e(\gamma) \delta^4 \frac{dE'}{dt' d\varepsilon'_{\max}} \varepsilon'_{\max} \approx \delta^4 N_e(\gamma_{\max}) \Delta\gamma \frac{dE'}{dt'}(\gamma_{\max})$$

$$\approx \delta^4 N_e(\gamma_{\max}) \Delta\gamma \frac{4 e^4 B'^2}{9 m_e^2 c^3} \gamma_{\max}^2$$

時間変動スケール

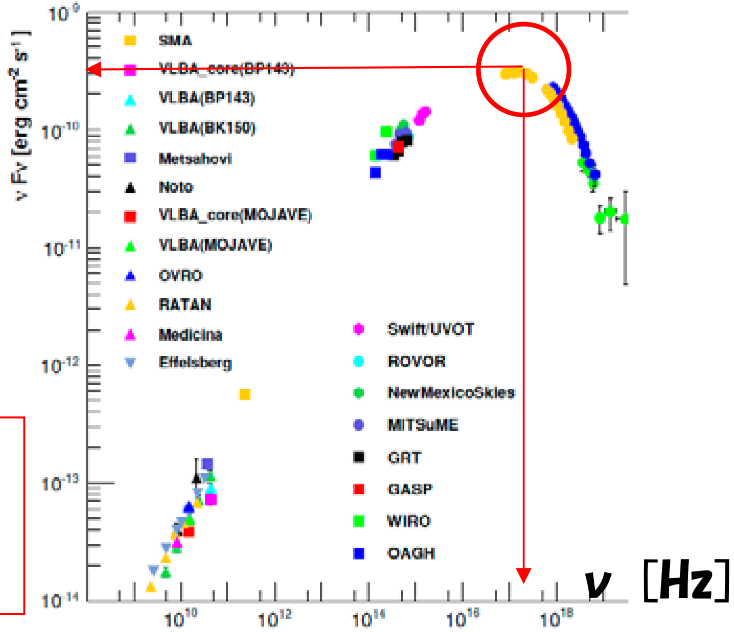
$\gamma = \gamma_{\max}$ の電子が担うエネルギー放出率

$$N_e(\gamma_{\max}) \Delta\gamma \approx \frac{t_{\mathrm{var}} L_{e,\max}}{\delta \gamma_{\max} m_e c^2}$$

$$\varepsilon_{\max} L_{\mathrm{iso},\varepsilon_{\max}} \approx \delta^3 t_{\mathrm{var}} L_{e,\max} \frac{4 e^4 B'^2}{9 m_e^3 c^5} \gamma_{\max}$$

$$= \boxed{10^{44} \left(\frac{\delta}{20}\right)^3 \left(\frac{t_{\mathrm{var}}}{10^4 \mathrm{s}}\right) \left(\frac{L_{e,\max}}{10^{42} \mathrm{erg\ s^{-1}}}\right) \left(\frac{B'}{0.1\mathrm{G}}\right) \left(\frac{\gamma_{\max}}{10^5}\right)^2 \mathrm{erg\ s^{-1}}}$$

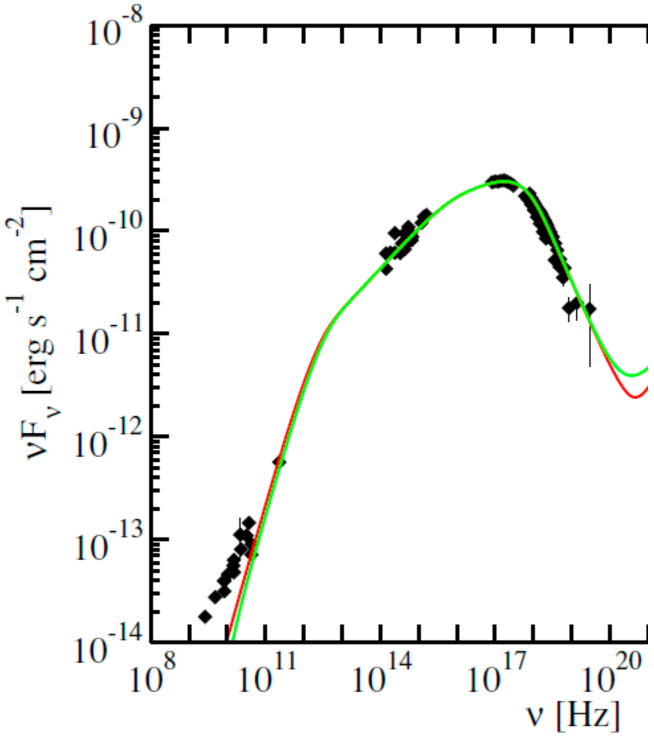
AGN
Mrk 421



球対称相当の光度なので、見かけ上電子のエネルギー放出率（実際の値）を上回っている。

AGNとSNRの場合

AGN
Mrk 421（Abdo+ 2011）



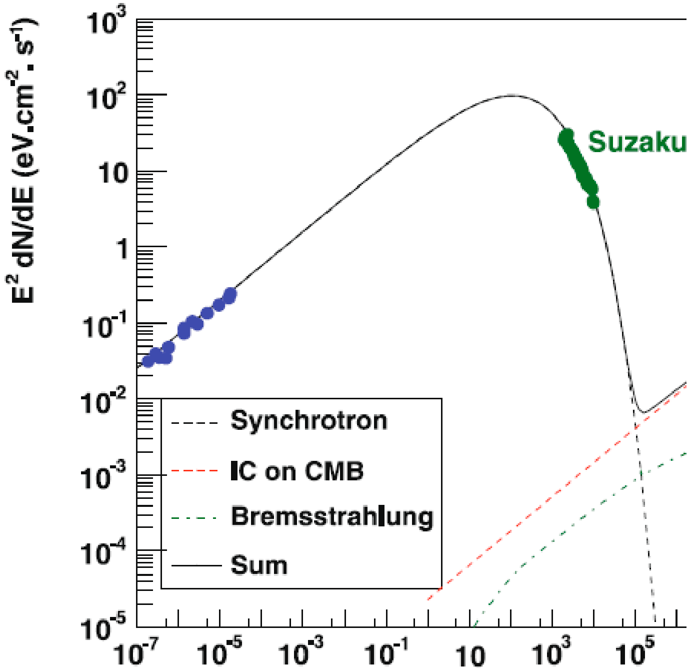
$\delta = 21,\ t_{\rm var} = 8.64\times10^4\,{\rm s},\ B' = 0.038{\rm G},$

$\gamma_{\max} = 3.9\times10^5,\ L_{\rm e,max} = 1.3\times10^{42}\ {\rm erg\ s^{-1}}$

$\Rightarrow \varepsilon_{\max} = 2.1\,{\rm keV},\ \varepsilon_{\max} L_{{\rm iso},\varepsilon_{\max}} = 7\times10^{44}\ {\rm erg\ s^{-1}}$

$4\pi D^2$で割ると、3.3×10^{-10} erg cm^{-2} s^{-1}

SNR
SN 1006（Acero+ 2010）



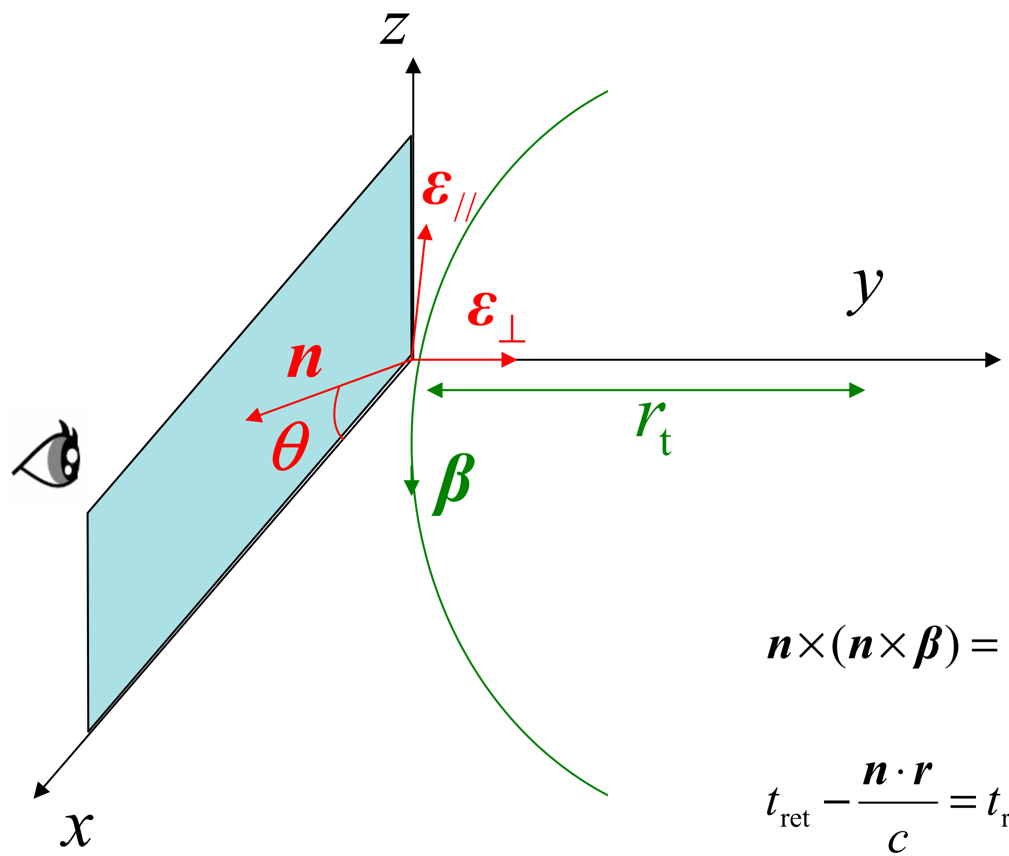
$\delta = 1,\ B' = 30\mu{\rm G},$

$\gamma_{\max} = 2.0\times10^7\,(10{\rm TeV})$

$\Rightarrow \varepsilon_{\max} = 66{\rm eV}$

$(E_{\rm e,tot} = 3.3\times10^{47}\,{\rm erg})$

問題設定



$$\boldsymbol{n} = (\cos\theta, 0, \sin\theta),\ \boldsymbol{\varepsilon}_\perp = (0,1,0),\ \boldsymbol{\varepsilon}_{//} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\varepsilon}_\perp$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\cos\left(\frac{vt_{\mathrm{ret}}}{r_{\mathrm{t}}}\right), \sin\left(\frac{vt_{\mathrm{ret}}}{r_{\mathrm{t}}}\right), 0\right)$$

$$\boldsymbol{r} = \left(r_{\mathrm{t}}\sin\left(\frac{vt_{\mathrm{ret}}}{r_{\mathrm{t}}}\right), r_{\mathrm{t}} - r_{\mathrm{t}}\cos\left(\frac{vt_{\mathrm{ret}}}{r_{\mathrm{t}}}\right), 0\right)$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}) = -\sin\left(\frac{vt_{\mathrm{ret}}}{r_{\mathrm{t}}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_\perp + \cos\left(\frac{vt_{\mathrm{ret}}}{r_{\mathrm{t}}}\right)\sin\theta\boldsymbol{\varepsilon}_{//} \approx -\frac{vt_{\mathrm{ret}}}{r_{\mathrm{t}}}\boldsymbol{\varepsilon}_\perp + \theta\boldsymbol{\varepsilon}_{//}$$

$$t_{\mathrm{ret}} - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{c} = t_{\mathrm{ret}} - \frac{r_{\mathrm{t}}}{c}\cos\theta\sin\left(\frac{vt_{\mathrm{ret}}}{r_{\mathrm{t}}}\right) \approx \underline{\frac{1}{2\gamma^2}\left[(1+\theta^2\gamma^2)t_{\mathrm{ret}} + \frac{c^2\gamma^2 t_{\mathrm{ret}}^3}{3r_{\mathrm{t}}^2}\right]}$$

三次微小量

$$\frac{d}{d\omega d\Omega}\begin{pmatrix} E_\perp \\ E_{//} \end{pmatrix} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int dt_{\mathrm{ret}}\begin{pmatrix} ct_{\mathrm{ret}}/r_{\mathrm{t}} \\ \theta \end{pmatrix}\exp\left[\frac{i\omega}{2\gamma^2}\left(\left(1+\gamma^2\theta^2\right)t_{\mathrm{ret}} + \frac{c^2\gamma^2 t_{\mathrm{ret}}^3}{3r_{\mathrm{t}}^3}\right)\right]\right|^2$$

低振動数の極限

$$\frac{dE_\perp}{d\omega d\Omega} \propto \omega^2 \left| \int dt_{\rm ret} t_{\rm ret} \exp\left[\frac{i\omega}{2\gamma^2} \left(\left(1+\gamma^2\theta^2\right) t_{\rm ret} + \frac{c^2\gamma^2 t_{\rm ret}^3}{3r_{\rm t}^3} \right) \right] \right|^2$$

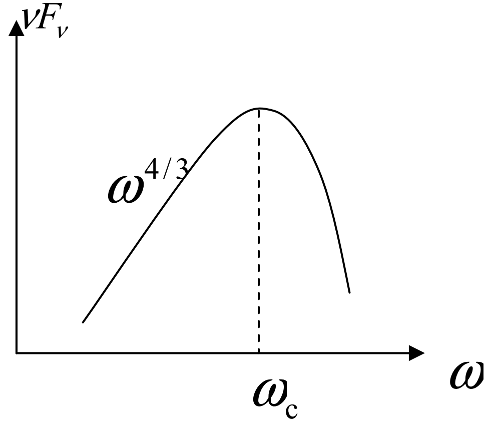
$\omega \to 0$ での典型的時間スケール $\Delta t^3 \sim \frac{3r_t^3}{c^2\gamma^2}\frac{2\gamma^2}{\omega} \Rightarrow \Delta t \propto \omega^{-1/3}$

$$\frac{dE_\perp}{d\omega d\Omega} \sim \omega^2 \left| \int dt_{\rm ret} t_{\rm ret} \right|^2 \sim \omega^2 \Delta t^4 \propto \omega^{2/3}$$

$d\Omega \propto \Delta\theta \propto \Delta t$ より $\frac{dE_\perp}{d\omega} \propto \Delta t \frac{dE_\perp}{d\omega d\Omega} \propto \omega^{1/3}$

光子数分布なら

$$n_\gamma(\omega) \propto \frac{1}{\omega}\frac{dE_\perp}{d\omega} \propto \omega^{-2/3}$$



時間積分

$$\frac{d}{d\omega d\Omega}\begin{pmatrix}E_\perp\\E_{//}\end{pmatrix}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c}\left|\int dt_{\mathrm{ret}}\begin{pmatrix}ct_{\mathrm{ret}}/r_{\mathrm{t}}\\\theta^2\end{pmatrix}\exp\left[\frac{i\omega}{2\gamma^2}\left(\left(1+\gamma^2\theta^2\right)t_{\mathrm{ret}}+\frac{c^2\gamma^2t_{\mathrm{ret}}^3}{3r_{\mathrm{t}}^3}\right)\right]\right|^2$$

$$=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c}\left(\frac{r_{\mathrm{t}}}{c\gamma^2}\right)^2\left|\int d\xi\begin{pmatrix}\xi\\\gamma\theta\end{pmatrix}\exp\left[if_0\left(\xi\left(1+\gamma^2\theta^2\right)+\frac{\xi^3}{3}\right)\right]\right|^2$$

変数変換

$$f_0\equiv\frac{\omega r_{\mathrm{t}}}{2c\gamma^3}\qquad\xi\equiv\frac{\omega t_{\mathrm{ret}}}{2f_0\gamma^2}$$

$$=\frac{e^2\omega^2r_{\mathrm{t}}^2}{4\pi^2c^3\gamma^4}\boldsymbol{I}(\Psi)$$

$$\boldsymbol{I}(\Psi)=\iint d\xi d\eta\begin{pmatrix}\xi\eta\\\Psi^2\end{pmatrix}\exp\left[if_0\left((1+\Psi^2)(\xi-\eta)+\frac{1}{3}(\xi^3-\eta^3)\right)\right]$$

$$\Psi\equiv\gamma\theta$$

絶対値の二乗→二重積分

$$=2\int dX\exp\left[2if_0X\left((1+\Psi^2)+\frac{X^2}{3}\right)\right]\int dY\begin{pmatrix}Y^2-X^2\\\Psi^2\end{pmatrix}\exp\left[2if_0XY^2\right]$$

$$X\equiv\frac{1}{2}(\xi-\eta)\qquad Y\equiv\frac{1}{2}(\xi+\eta)$$

変数変換

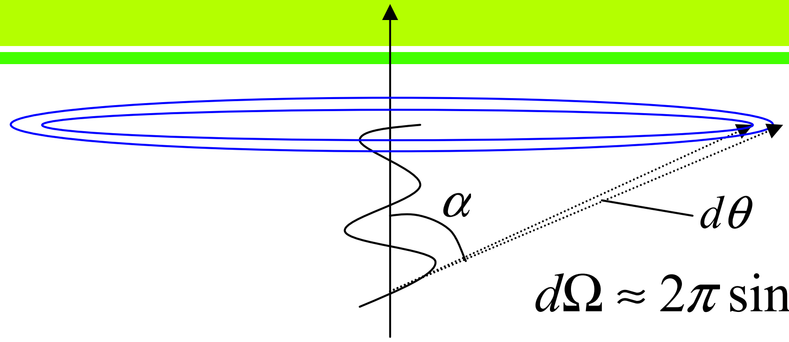
$$=2\int dX\sqrt{\frac{\pi}{2f_0|X|}}\begin{pmatrix}\frac{i}{4f_0X}-X^2\\\Psi^2\end{pmatrix}\exp\left[i\frac{\mathrm{sgn}(X)\pi}{4}\right]\exp\left[2if_0X\left((1+\Psi^2)+\frac{X^2}{3}\right)\right]$$

Yだけ積分　公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}dY\exp[iSY^2]=\sqrt{\frac{\pi}{|S|}}\exp\left[i\frac{\mathrm{sgn}(S)\pi}{4}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dYY^2\exp[iSY^2]=\frac{i}{2S}\sqrt{\frac{\pi}{|S|}}\exp\left[i\frac{\mathrm{sgn}(S)\pi}{4}\right]$$

角度積分



$$d\Omega \approx 2\pi \sin\alpha d\theta$$

$$\frac{d}{d\omega}\begin{pmatrix} E_\perp \\ E_{//} \end{pmatrix} = 2\pi \sin\alpha \int d\theta \frac{d}{d\omega d\Omega}\begin{pmatrix} E_\perp \\ E_{//} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^2\omega^2 r_t^2}{4\pi^2 c^3 \gamma^4} 2\pi \sin\alpha \int d\theta \boldsymbol{I}(\Psi)$$

θからΨに変数変換

$$= \frac{e^2\omega^2 r_t^2}{\pi c^3 \gamma^5} \sin\alpha \int dX \int d\Psi \sqrt{\frac{\pi}{2f_0|X|}} \begin{pmatrix} \frac{i}{4f_0 X} - X^2 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} \exp\left[i\frac{\mathrm{sgn}(X)\pi}{4}\right] \exp\left[2if_0 X\left((1+\Psi^2) + \frac{X^2}{3}\right)\right]$$

$$= -\frac{\gamma e^2 \sin\alpha}{2c} \int dX \frac{1}{X^2} \begin{pmatrix} 1 + 4if_0 X^3 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left[2if_0\left(X + \frac{X^2}{3}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dY \exp[iSY^2] = \sqrt{\frac{\pi}{|S|}} \exp\left[i\frac{\mathrm{sgn}(S)\pi}{4}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dY Y^2 \exp[iSY^2] = \frac{i}{2S}\sqrt{\frac{\pi}{|S|}} \exp\left[i\frac{\mathrm{sgn}(S)\pi}{4}\right]$$

Ψだけ積分 先ほどと同じ公式

Expをsinとcosに分解し、積分に効かない奇関数を落とす

$$\frac{dE_{//}}{d\omega} = -\frac{\gamma e^2 \sin\alpha}{2c} \int dX \frac{1}{X^2} \cos\left[2f_0\left(X + \frac{X^2}{3}\right)\right]$$

$$\frac{dE_\perp}{d\omega} = -\frac{\gamma e^2 \sin\alpha}{2c} \left\{ \int dX \frac{1}{X^2} \cos\left[2f_0\left(X + \frac{X^2}{3}\right)\right] - 4\int dX f_0 X \sin\left[2f_0\left(X + \frac{X^2}{3}\right)\right] \right\}$$

整理整頓

部分積分をすると

$$-\int dX \frac{1}{X^2}\cos\left[2f_0\left(X+\frac{X^2}{3}\right)\right] = 2f_0\int dX\left(X+\frac{1}{X}\right)\sin\left[2f_0\left(X+\frac{X^2}{3}\right)\right]$$

なので

関数 $I_\pm \equiv 2f_0\int dXX^{\pm 1}\sin\left[2f_0\left(X+\frac{X^2}{3}\right)\right]$ を導入すると

$$\frac{dE_{//}}{d\omega} = \frac{\gamma e^2 \sin\alpha}{2c}(I_+ + I_-) \qquad \frac{dE_\perp}{d\omega} = \frac{\gamma e^2 \sin\alpha}{2c}(3I_+ + I_-)$$

のように綺麗にまとまる

第二種変形ベッセル関数

$$K_{2/3}(x) = \frac{\sqrt{3}}{(3x/2)^{2/3}}\int_0^\infty dzz\sin\left[\frac{z^3}{3}+z\left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3}\right]$$

を用いると

$$I_+(x) = (12x)^{1/3}\int_0^\infty dzz\sin\left[\frac{z^3}{3}+z\left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3}\right]$$

$$\leftarrow \boxed{x \equiv \frac{4}{3}f_0 \qquad z \equiv \left(\frac{3x}{2}\right)^{1/3}X}$$

$$= \sqrt{3}xK_{2/3}(x) \equiv \sqrt{3}G(x)$$

整理整頓 (2)

I_の方は

$$K_{1/3}(x)=\frac{\sqrt{3}}{(3x/2)^{1/3}}\int_0^\infty dz\cos\left[\frac{z^3}{3}+z\left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3}\right]$$ を用いる。

$$x\equiv\frac{4}{3}f_0 \qquad z\equiv\left(\frac{3x}{2}\right)^{1/3}X$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}I_-(x)\right)=\frac{3}{(3x/2)^{1/3}}\int_0^\infty dz\cos\left[\frac{z^3}{3}+z\left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3}\right]=\sqrt{3}K_{1/3}(x)$$ から、

$$I_-(x)=-\sqrt{3}x\int_x^\infty dyK_{1/3}(y)$$

漸化式

$$2K'_n=-K_{n-1}-K_{n+1} \qquad K_{-n}=K_n$$ を用いると

$$I_-(x)=-2\sqrt{3}xK_{2/3}(x)+\sqrt{3}x\int_x^\infty dyK_{5/3}(y)$$

$$=-2\sqrt{3}G(x)+\sqrt{3}F(x)$$

つまりシンクロトロン関数

$$F(x)\equiv x\int_x^\infty dyK_{5/3}(y)$$

ゴール

一周期に1回このパルスが来るので、周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_B} = \dfrac{2\pi\gamma mc}{eB}$ で割ると、

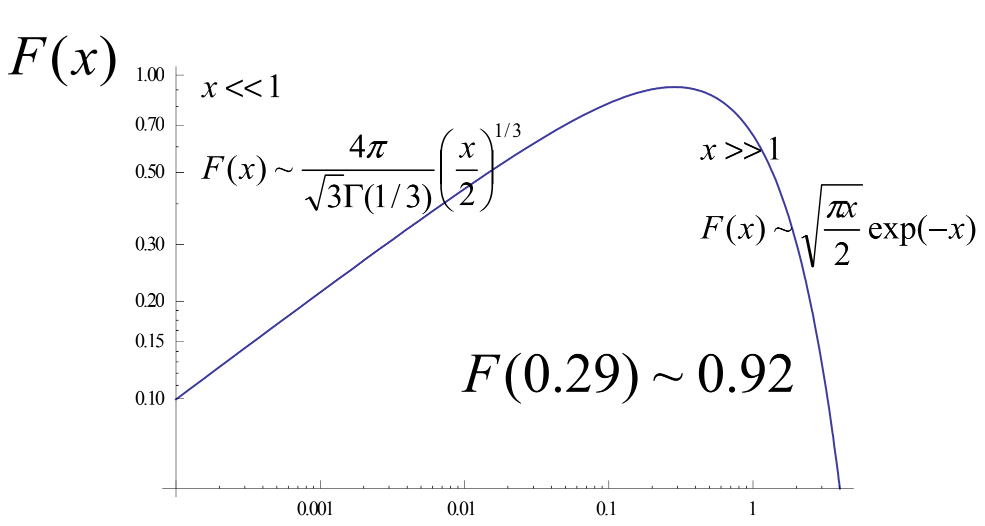
$$\frac{dE_{//}}{d\omega dt} = \frac{1}{T}\frac{dE_{//}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}e^3 B\sin\alpha}{4\pi mc^2}\left[F(x)+G(x)\right]$$

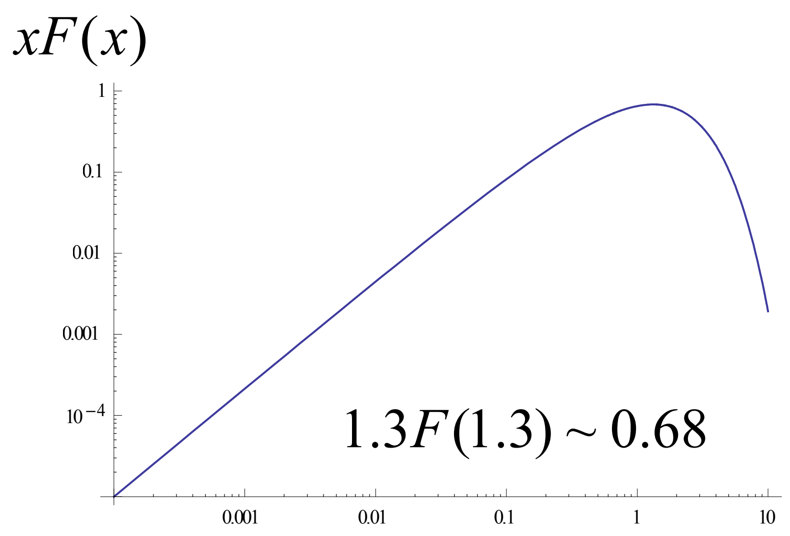
$$\frac{dE_{\perp}}{d\omega dt} = \frac{\sqrt{3}e^3 B\sin\alpha}{4\pi mc^2}\left[F(x)-G(x)\right]$$

$$\boxed{\frac{dE}{d\omega dt} = \frac{\sqrt{3}e^3 B\sin\alpha}{2\pi mc^2}F(x)}$$

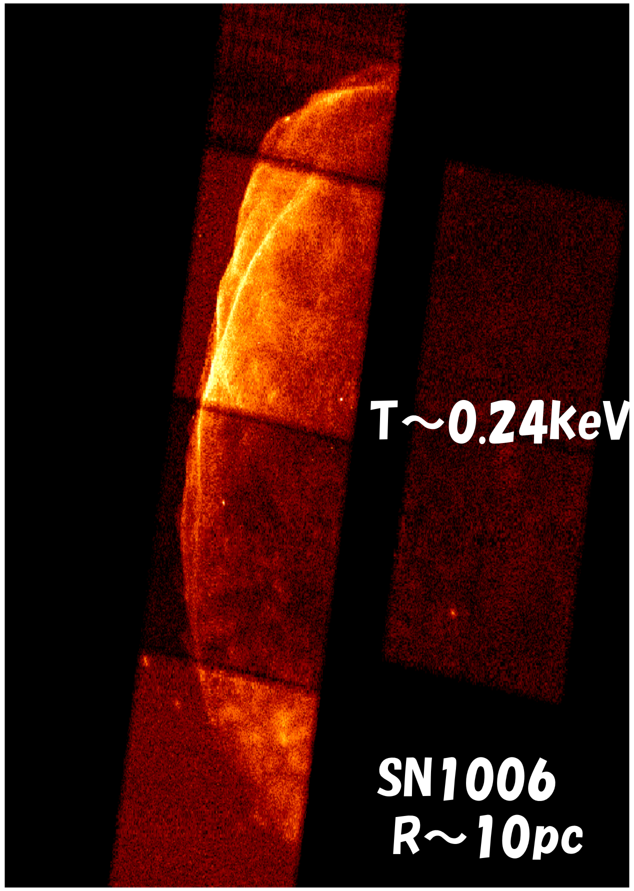
$$x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{2\omega}{3\gamma^3\omega_B\sin\alpha} = \frac{2mc\omega}{3\gamma^2 eB\sin\alpha}$$

$$x = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{3\gamma^2 eB\sin\alpha}{2mc}$$

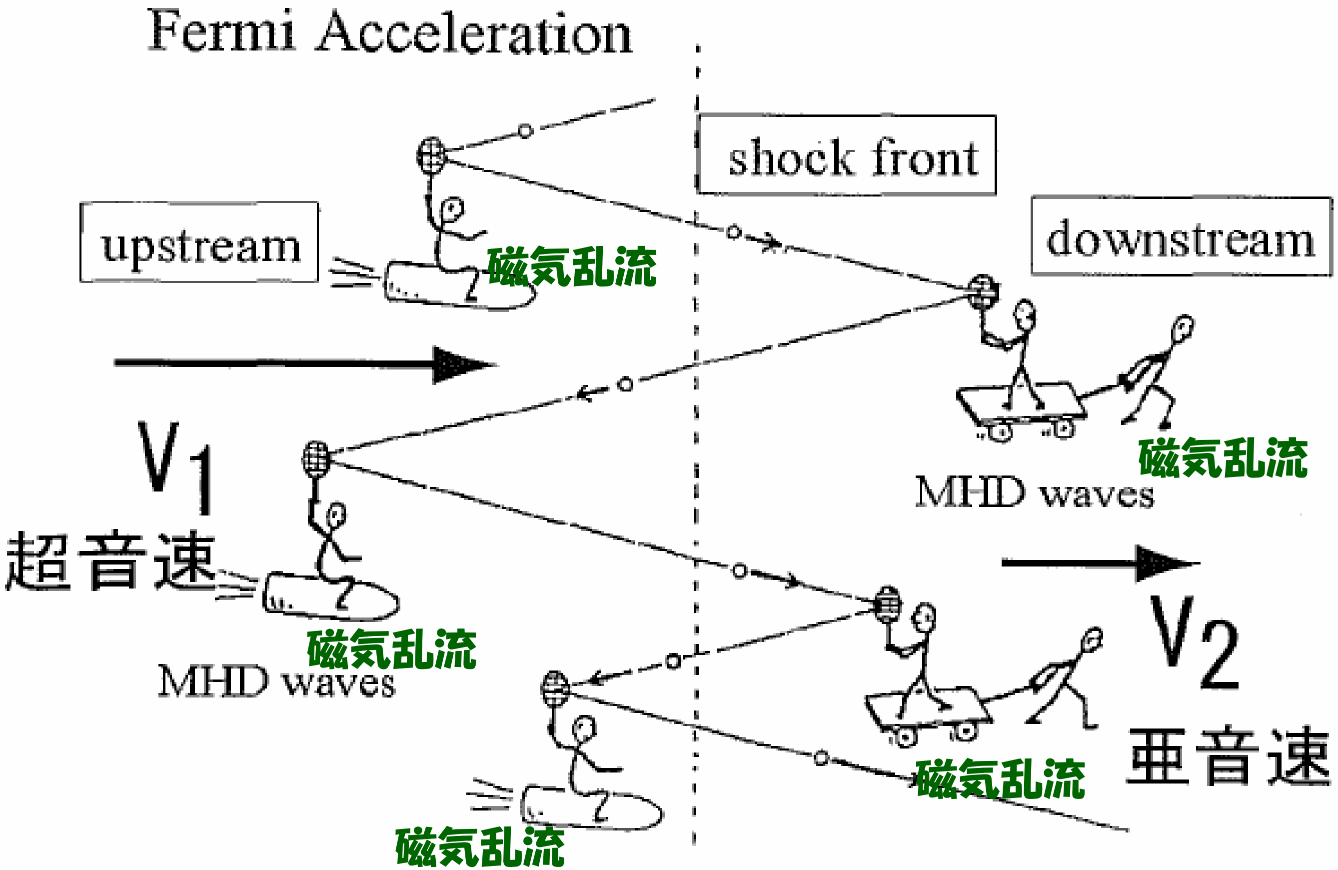




衝撃波統計加速



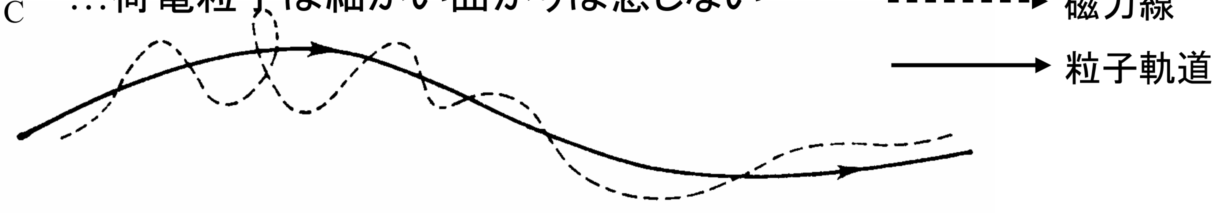
T～0.24KeV
SN1006
R～10pc



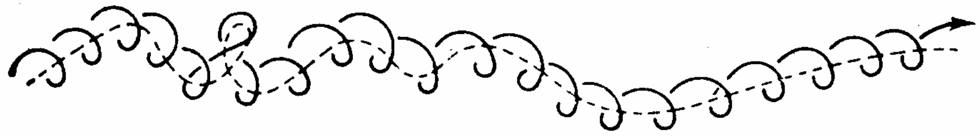
Fermi Acceleration
shock front
upstream
downstream
磁気乱流
V_1
超音速
MHD waves
V_2
亜音速

乱れた磁場と粒子の相互作用

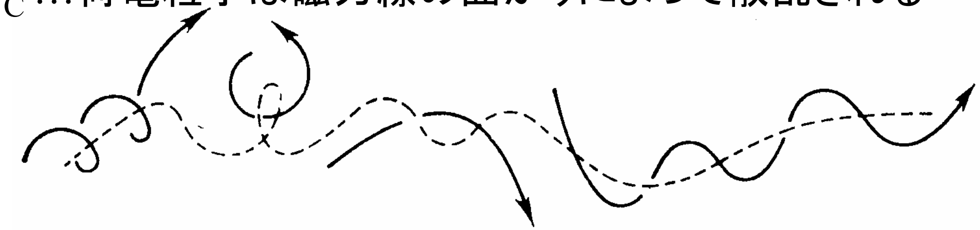
$l \ll r_C$ …荷電粒子は細かい曲がりは感じない



$l \gg r_C$ …荷電粒子は磁力線の曲がりに沿って運動

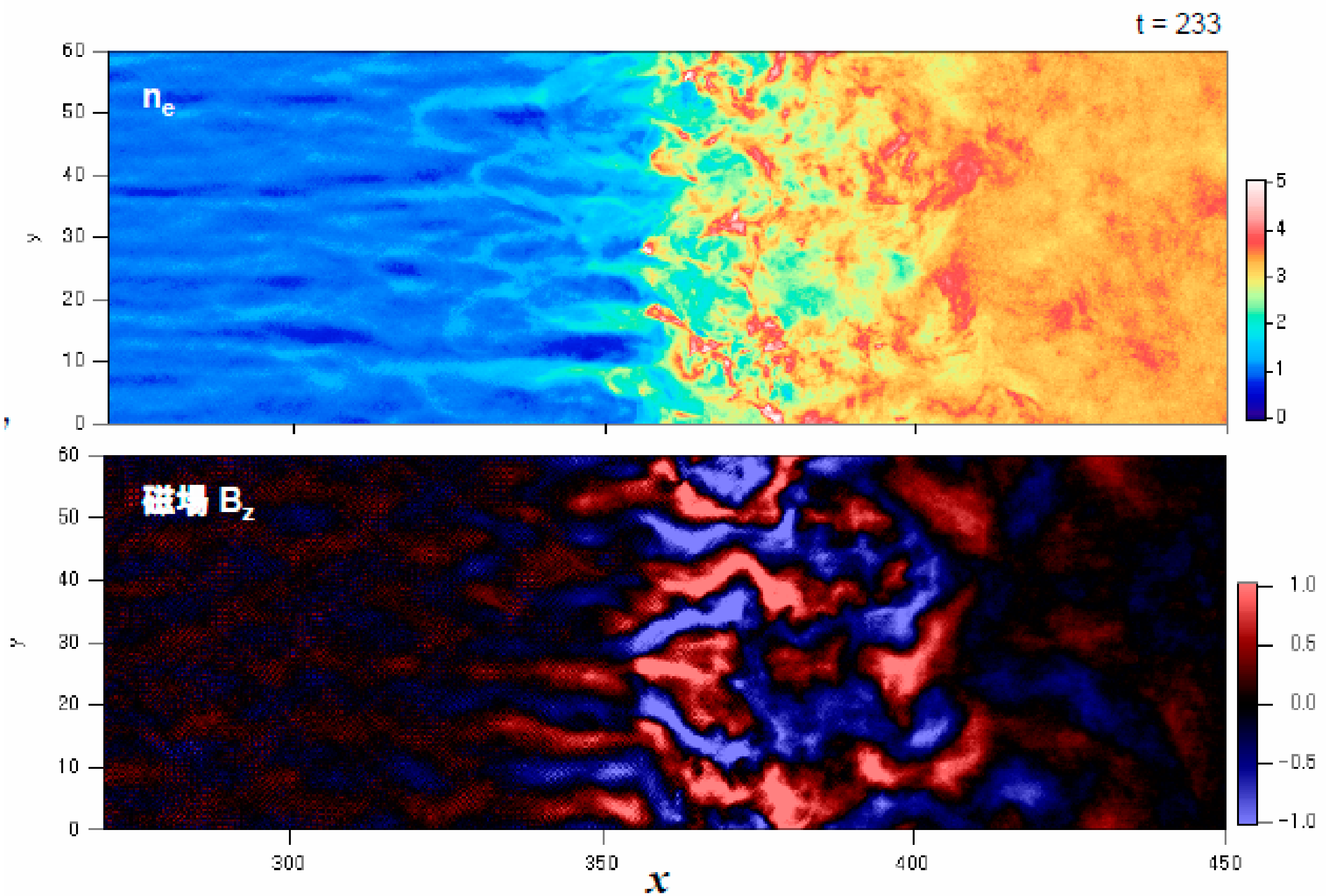


$l \sim r_C$ …荷電粒子は磁力線の曲がりによって散乱される



ラーマー半径 r_L～磁場の乱れのスケール

無衝突衝撃波シミュレーション



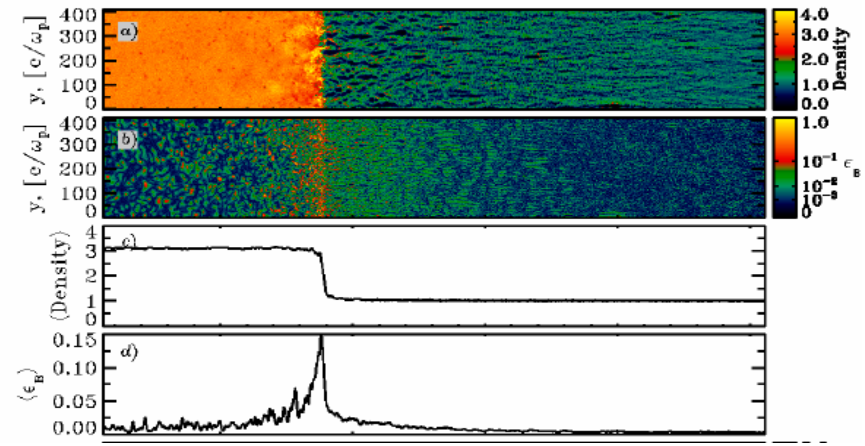
©加藤恒彦

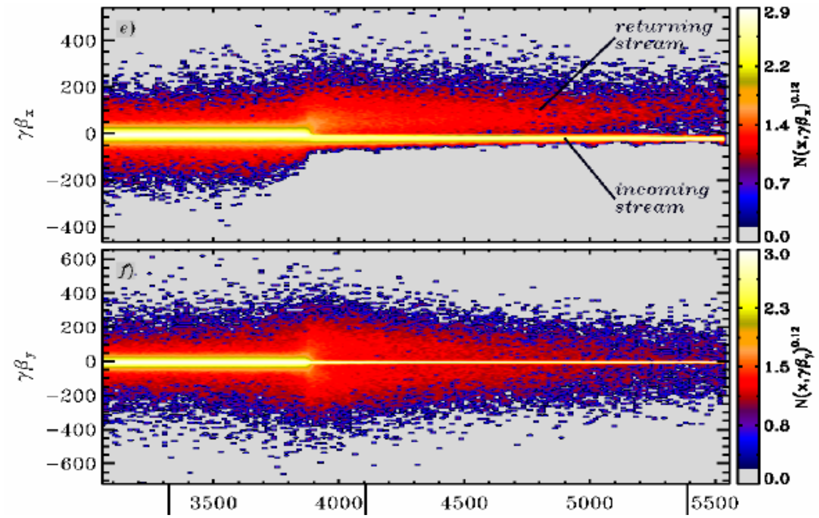
乱れた磁場、
乱流が存在

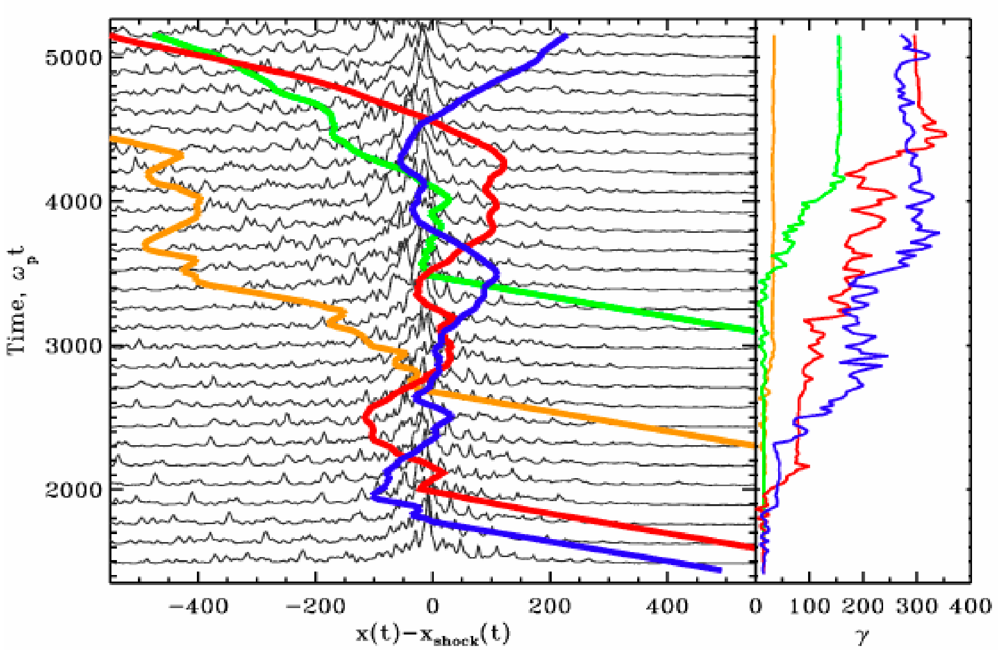
速い振動

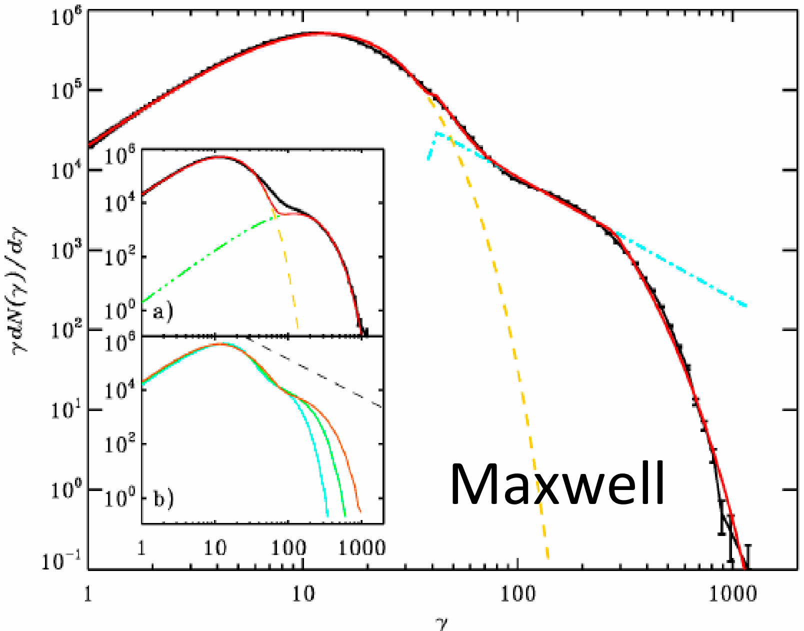
$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}} = 5.6\times10^4\ \mathrm{s}^{-1}\ \text{for}\ \ n = 1/\mathrm{cc}$$

シミュレーションで実現された粒子加速



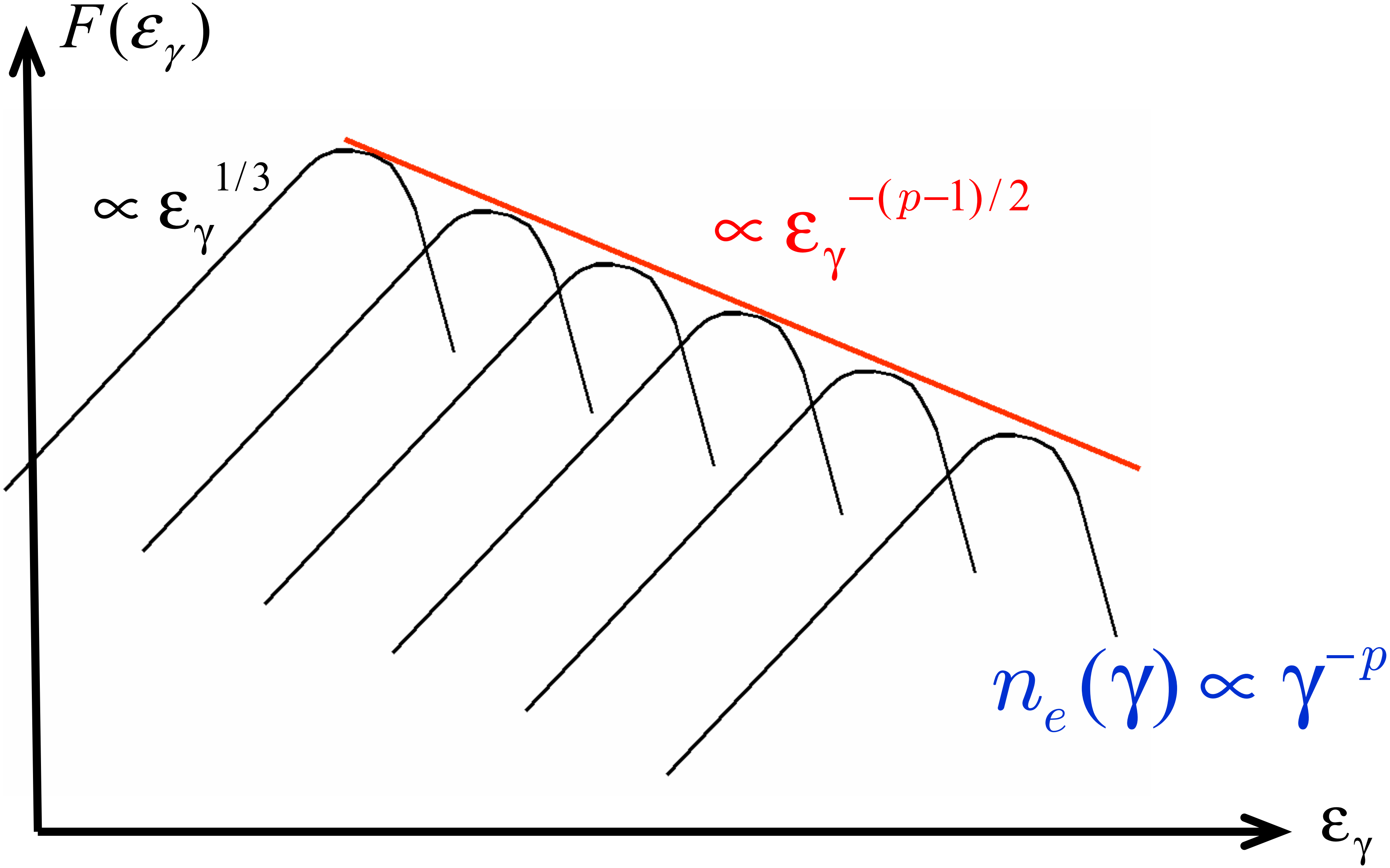






Spitkovsky 2008

Power-law電子からの放射



正確な積分

公式 $\int_0^\infty x^\mu K_n(x)dx = 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-n+1}{2}\right)$ から、

$$\int_0^\infty x^\mu G(x)dx = 2^\mu \Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{2}{3}\right)$$

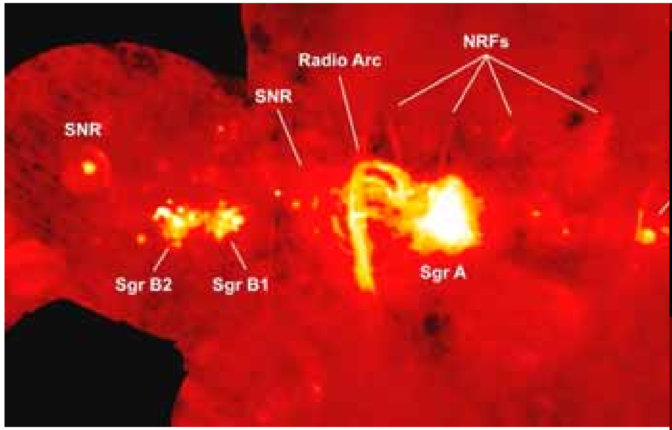
$$\int_0^\infty x^\mu F(x)dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{2}{3}\right)$$

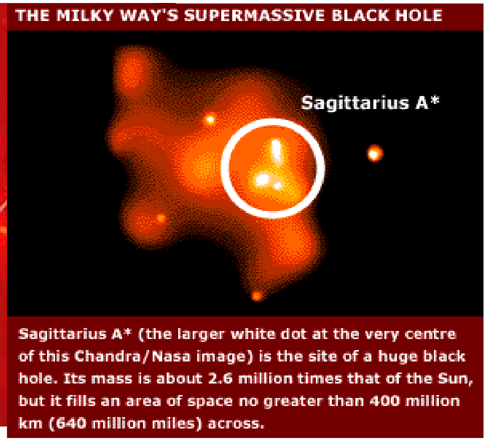
$$\frac{dE}{dt\,d\omega\,dV} = \int d\gamma n_e(\gamma)\frac{dE}{dt\,d\omega} = C\int d\gamma\gamma^{-p}\frac{\sqrt{3}e^3 B\sin\alpha}{2\pi m_e c^2}F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

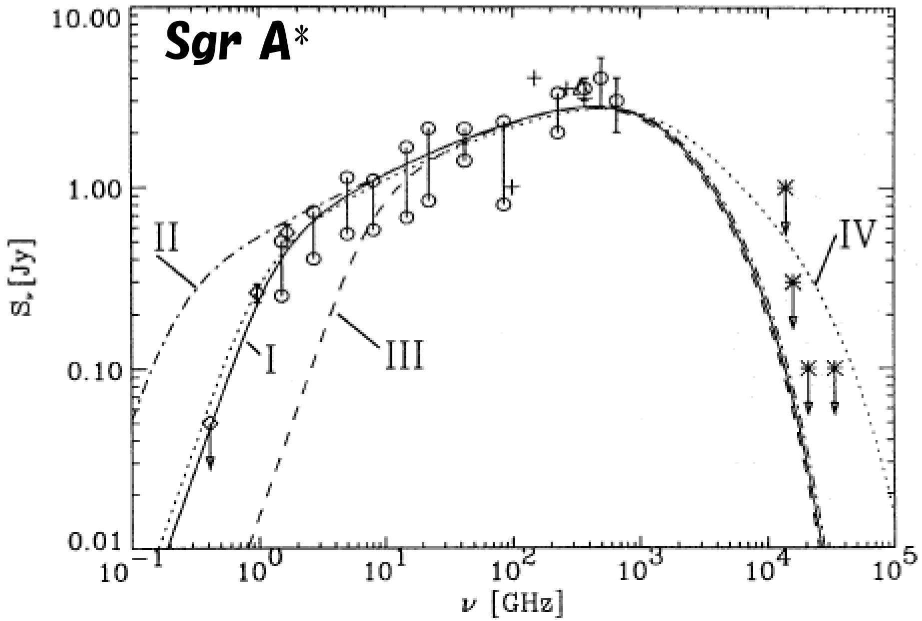
$$= \boxed{C\frac{\sqrt{3}e^3 B\sin\alpha}{2(p+1)\pi m_e c^2}\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{m_e c\omega}{3eB\sin\alpha}\right)^{-(p-1)/2} \quad \text{erg s}^{-1}\ \text{Hz}^{-1}\ \text{cm}^{-3}}$$

$$\overline{\sin\alpha} = \frac{\pi}{4}$$

シンクロトロン自己吸収

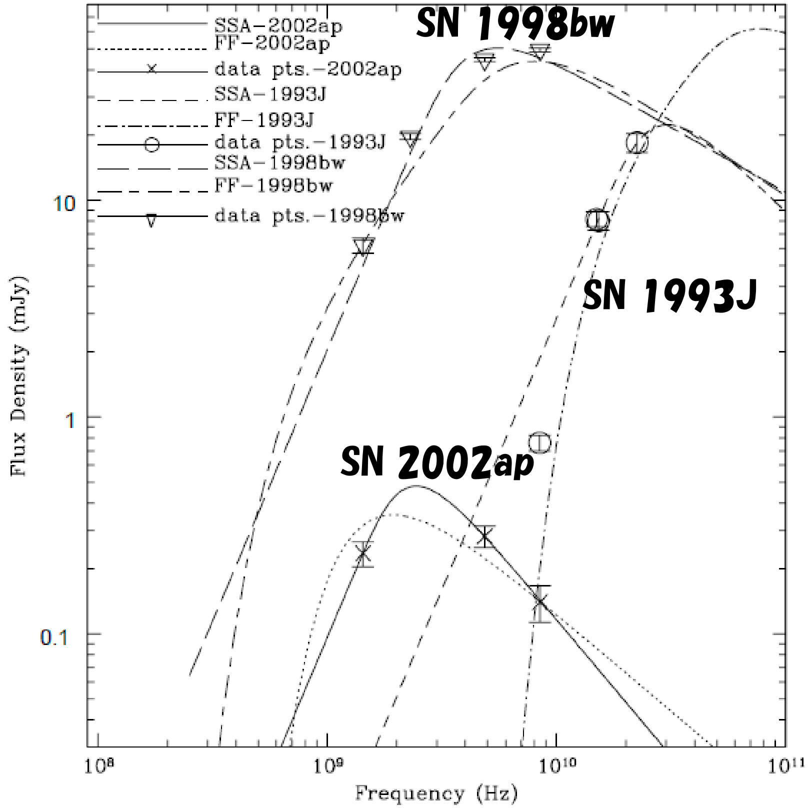






Beckert+ 1996
B～10G(Free-freeでも説明可)

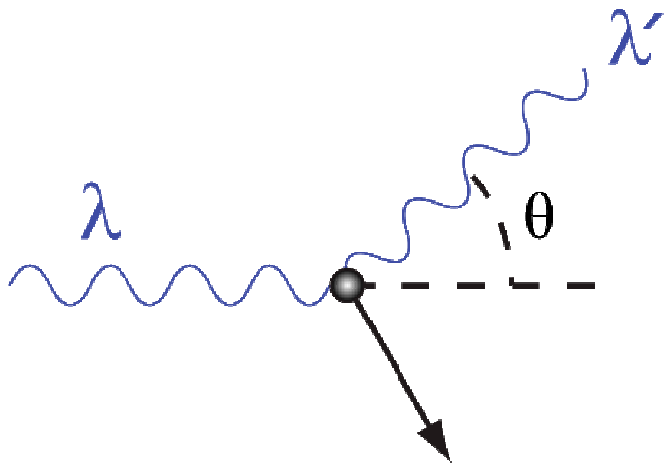
SN爆発後11日後の電波スペクトル
Sutaria+ 2003



SNe	ν_p	F_p	Θ_{eq}	U_{eq} $\times 10^{45}$	B_0	R_0 $\times 10^{15}$
	GHz	mJy	μas	erg	G	cm
2002ap	2.45	0.48	39.0	0.69	0.47	4.80
1998bw	5.5	50.4	112.4	3500	0.23	68.4
1993J	30.5	22.3	17.6	0.50	3.54	1.08

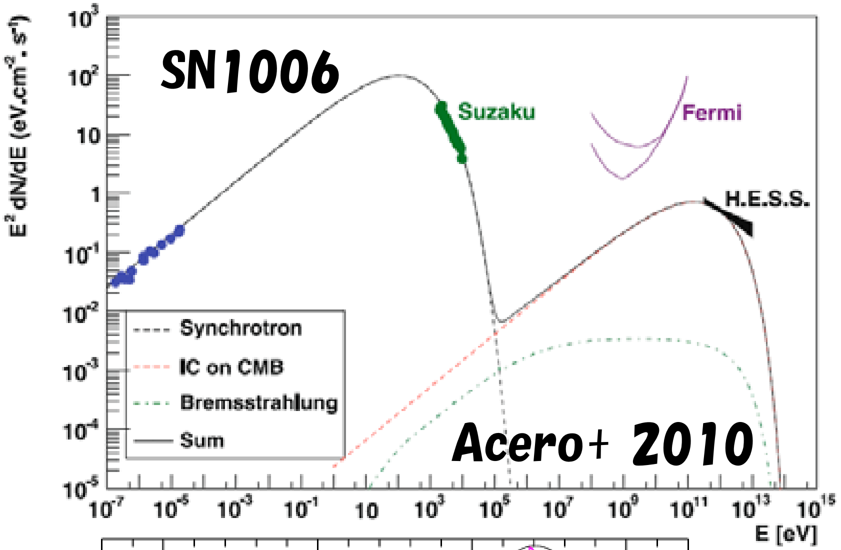
7. コンプトン散乱

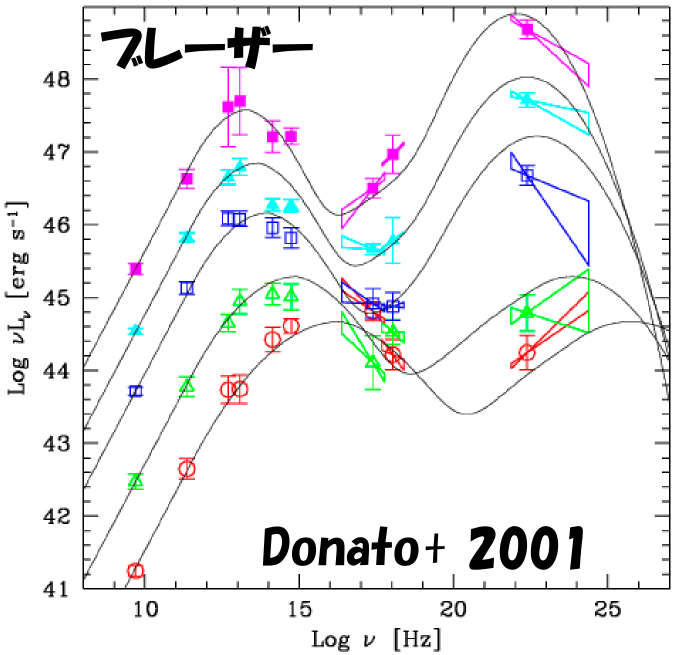
- 電子静止系での散乱
- Klein-Nishina断面積
- 相対論的な電子による散乱
- 逆コンプトン散乱
- コンプトン y-パラメータ
- Kompaneets方程式
- Sunyaev-Zel'dovich 効果

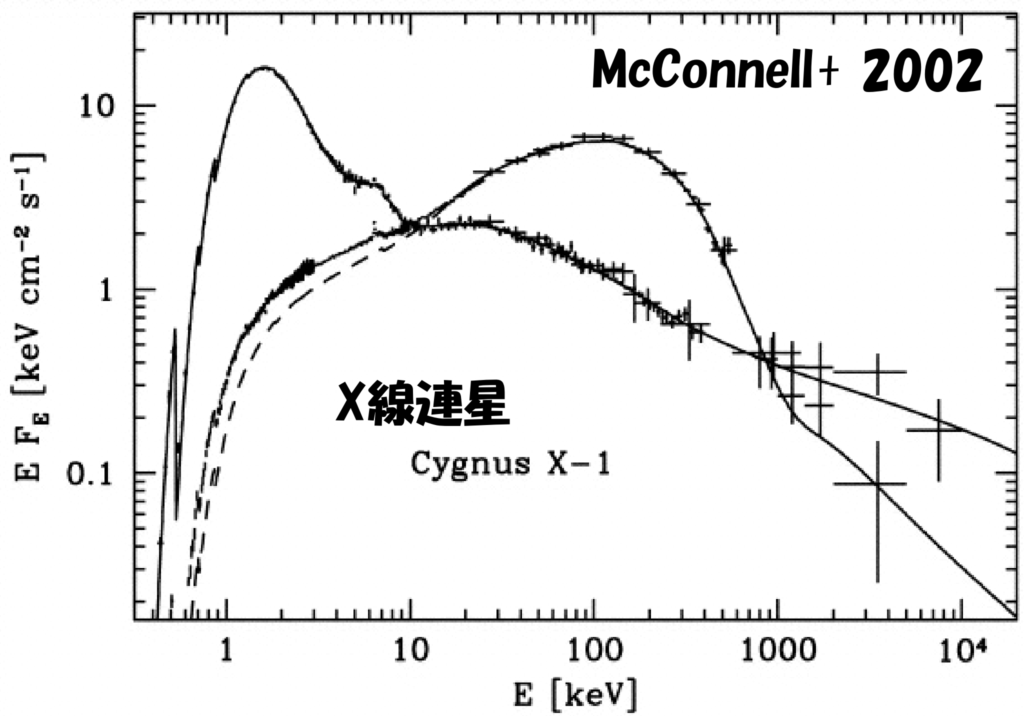


電子による光子の散乱

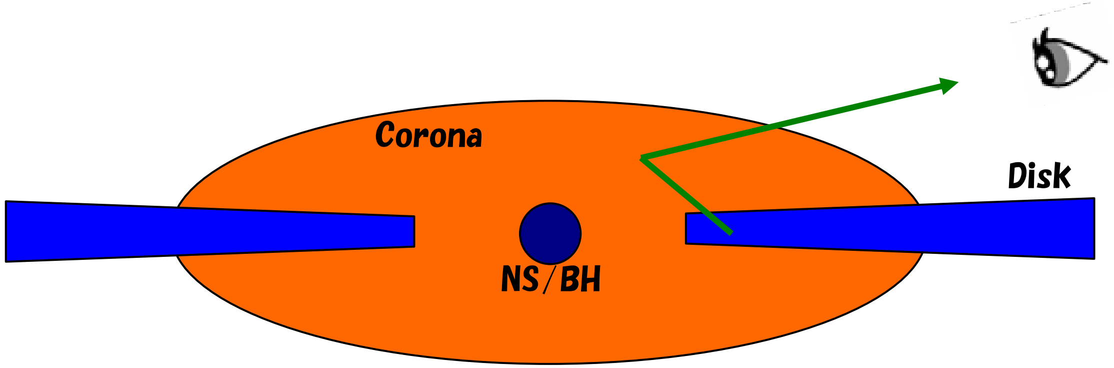
天体における逆コンプトン散乱





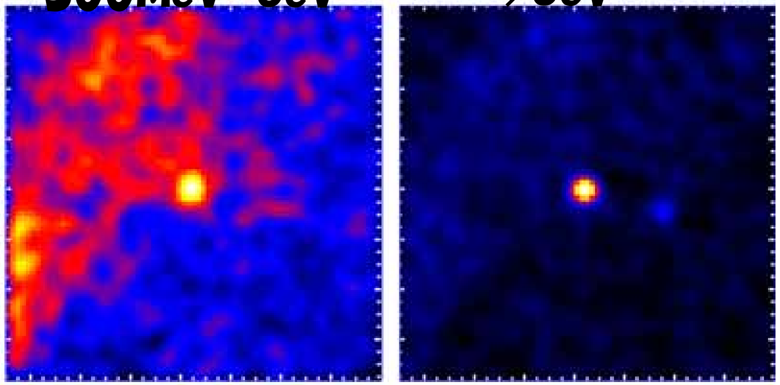


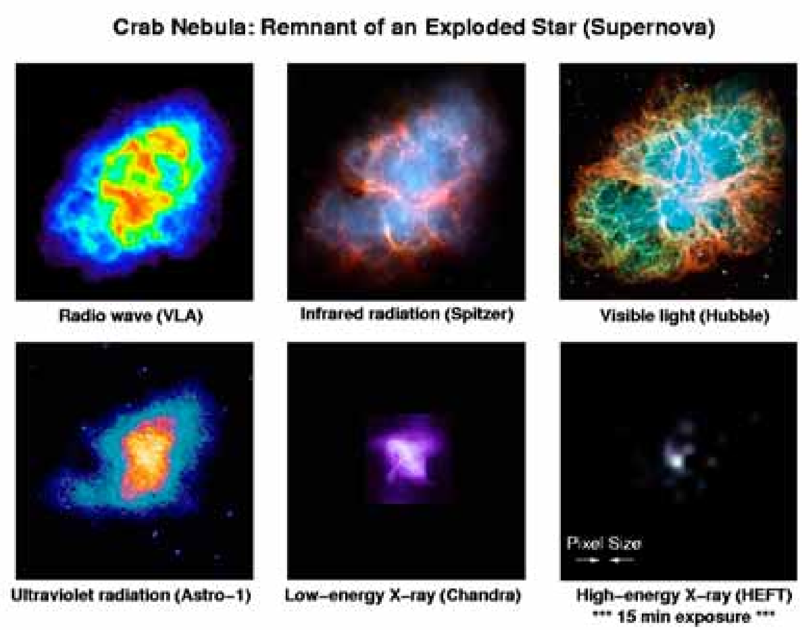
~0.2keVの熱的光子を90keVのコロナが叩き上げている

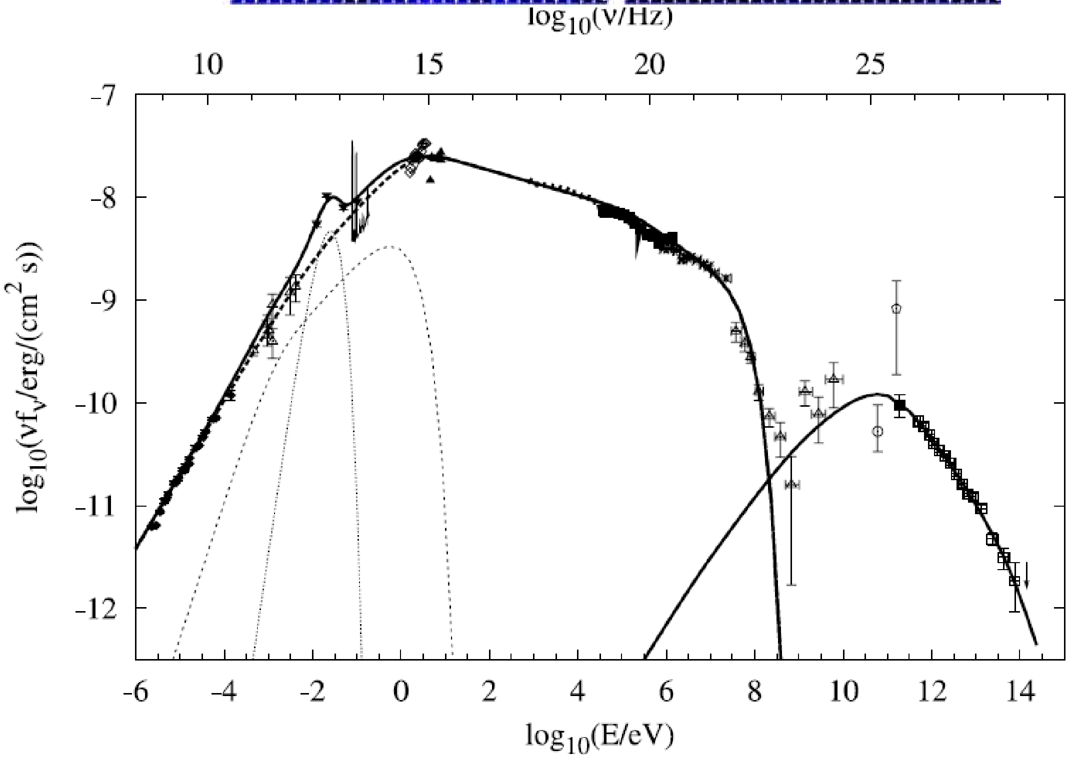


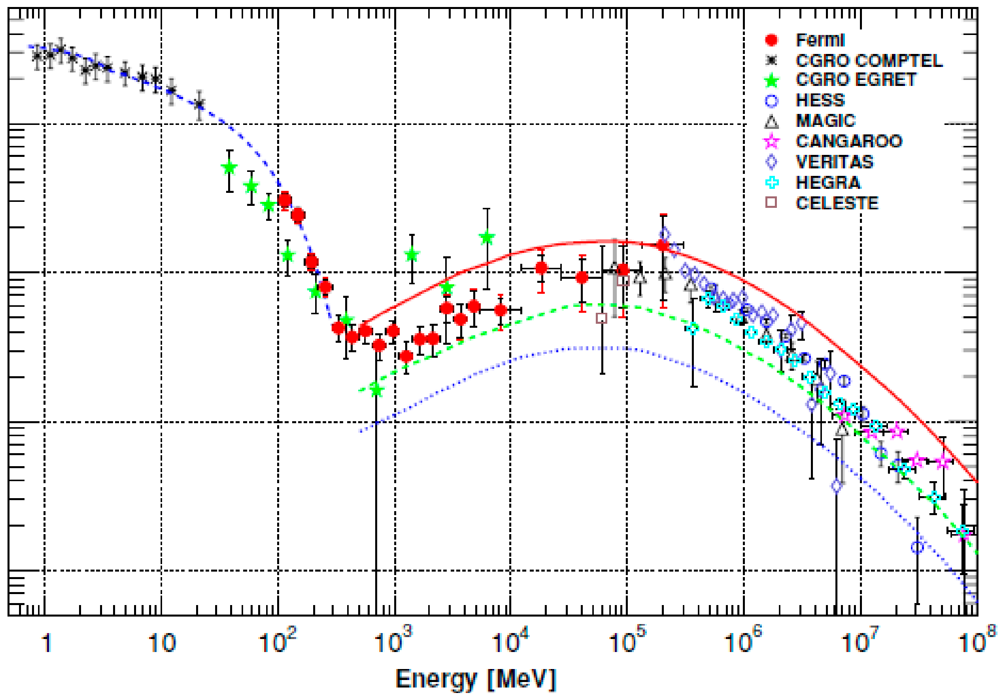
Crab nebula

300MeV-GeV >GeV









Aharonian+ 2004

Abdo+ 2010

電磁場の量子論に基づく計算(雰囲気のみ)

電磁場と電子場の演算子

$$\hat{A}_l^{\mu} = \sum_l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{hc}{k_0}} \left(\varepsilon_l^{\mu} \hat{a}_l(k) e^{-ik\cdot x} + \varepsilon_l^{*\mu} \hat{a}_l^{\dagger}(k) e^{ik\cdot x} \right),$$

偏光状態: l

$$\hat{\Psi}_i = \sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(u_i(p) \hat{c}_i(p) e^{-ip\cdot x} + v_i(p) \hat{d}_i^{\dagger}(p) e^{ip\cdot x} \right)$$

スピン状態: i

交換関係

$$\left[\hat{a}_l(k), \hat{a}_m^{\dagger}(k')\right] = \delta_{lm}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \left\{\hat{c}_i(p), \hat{c}_j^{\dagger}(p')\right\} = \left\{\hat{d}_i(p), \hat{d}_j^{\dagger}(p')\right\} = \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$

スピノールの縮約

$$u_i^{\dagger} u_j = v_i^{\dagger} v_j = \delta_{ij}$$

波数ベクトルの内積

$$k\cdot k = k^{\mu}k_{\mu} = 0,\ p\cdot p = \left(\frac{m_{\mathrm{e}}c}{\hbar}\right)^2$$

Zeitschrift für Physik

Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac.

Von **O. Klein** und **Y. Nishina** in Kopenhagen.

(Eingegangen am 30. Oktober 1928.)

Auf Grund der neuen, von Dirac entwickelten relativistischen Quantendynamik wird die Intensität der Comptonstreustrahlung berechnet. Das Resultat zeigt Abweichungen von den entsprechenden Dirac-Gordonschen Formeln, die von der zweiten Größenordnung hinsichtlich des Verhältnisses der Energie des primären Lichtquants zu der Ruheenergie des Elektrons sind.

電磁場の量子論に基づく計算（雰囲気のみ）

ハミルトニアン密度の相互作用項

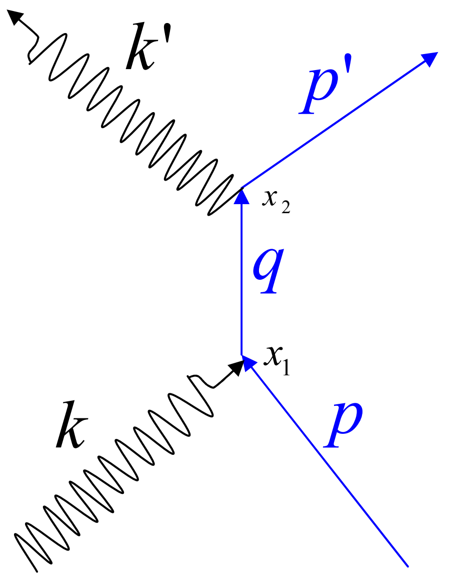
$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}$$

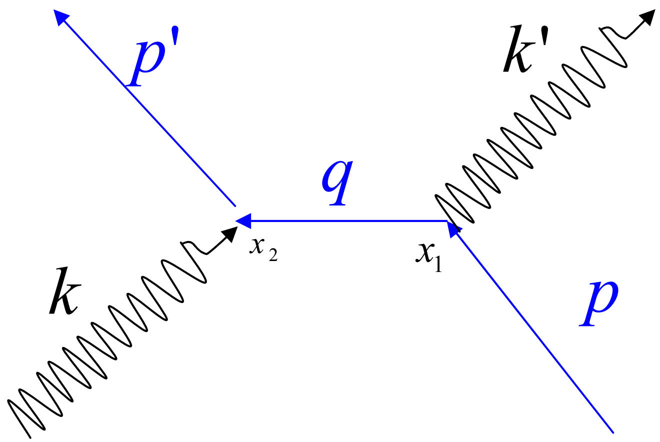
時間推進演算子は $e^{i\frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar}t}$ **なので、**

二次微小量まで考えるとS行列

$$S = 1 + \frac{i}{\hbar c}\int d^4x\mathcal{H}_{\text{int}}(x) + \frac{i^2}{2(\hbar c)^2}\int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{T}_{\text{時間順序積}}\left(\mathcal{H}_{\text{int}}(x_1)\mathcal{H}_{\text{int}}(x_2)\right)$$

s-channel **t-channel**





電磁場の量子論に基づく計算（雰囲気のみ）

仮に設定された体積と時間のスケール： V, T

$$\Rightarrow A_l^\mu = \sqrt{\frac{hc}{Vk_0}}\varepsilon_l^\mu \exp[-ik\cdot x],\ \Psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} u_i \exp[-ip\cdot x]$$

電子静止系で考え、反応の充分前と後ではDirac eq. $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{m_e c}{\hbar}\right)u_i = 0$ **を満たしているので、**

$$\langle k'p'|S|kp\rangle = \frac{(2\pi)^5 ie^2}{V^2\hbar c\sqrt{k_0 k'_0}}\delta^4(p+k-p'-k')\bar{u}'_i\left(\frac{i\bar{\not\varepsilon}'\not\varepsilon\not k}{2p\cdot k} + \frac{i\not\varepsilon\bar{\not\varepsilon}'\not k'}{2p\cdot k'}\right)u_j$$

$$\not\varepsilon \equiv \gamma^\mu\varepsilon_\mu$$

確率振幅

$$M \equiv \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i\sum_j}_{\text{スピン平均}}\left|\langle k'p'|S|kp\rangle\right|^2$$

$$= \frac{(2\pi)^{10}e^4}{V^4(\hbar c)^2 k_0 k'_0}\underbrace{\frac{cTV}{(2\pi)^4}\delta^4(p+k-p'-k')}_{\text{デルタ関数の二乗}}\frac{1}{4p_0p'_0}\left(\frac{k'_0}{k_0}+\frac{k_0}{k'_0}-2+4(\bar{\varepsilon}'\cdot\varepsilon)^2\right)$$

電磁場の量子論に基づく計算（雰囲気のみ）

$$M = n\sigma vT,\ n = 1/V,\ v = c$$

$$\sigma = \sum_{p'}\sum_{k'}\frac{V}{cT}M$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\sum_{l}\sum_{m}}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p'\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k'\frac{V}{cT}M$$

偏光の平均

$$= \frac{e^4}{2(\hbar c)^2}\int d^3k'\frac{\delta(p_0 + k_0 - p'_0 - k'_0)}{k_0 k'_0\, p_0 p'_0}\left[\frac{k'_0}{k_0} + \frac{k_0}{k'_0} - \sin^2\theta\right]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} = \frac{e^4}{2(m_e c^2)^2}\left(\frac{k'_0}{k_0}\right)^2\left[\frac{k'_0}{k_0} + \frac{k_0}{k'_0} - \sin^2\theta\right]$$

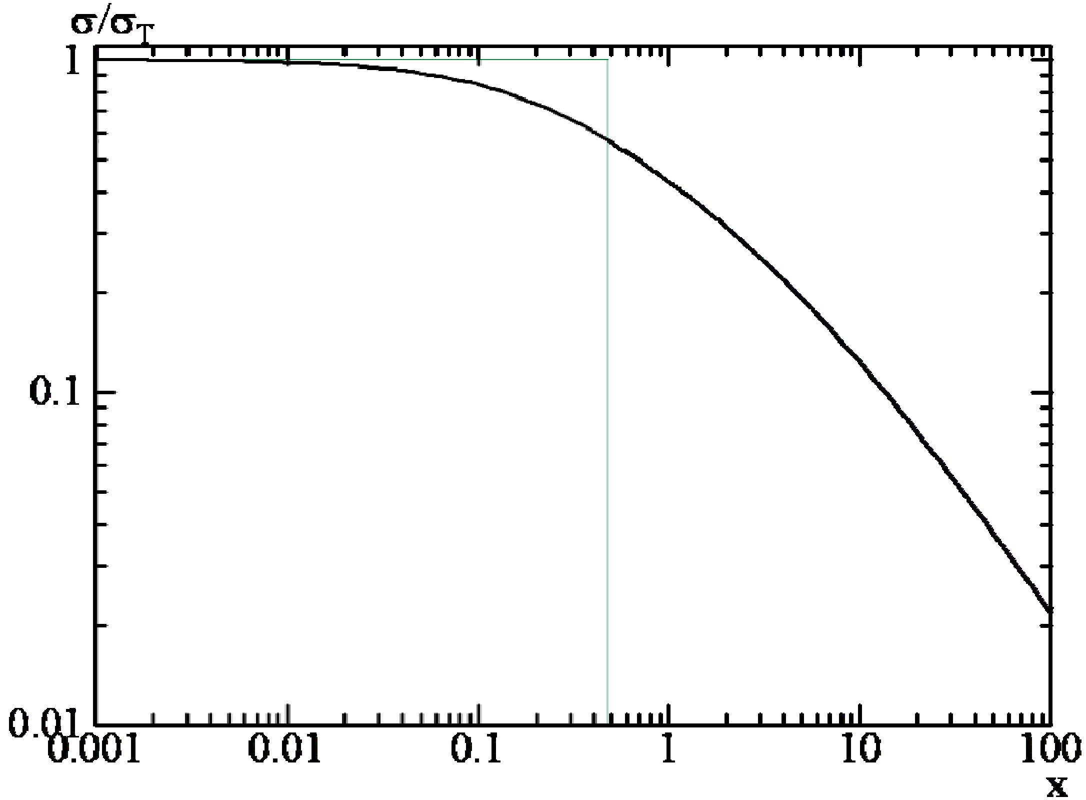
$$= \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2\left[\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} - \sin^2\theta\right]$$

Klein-Nishina断面積

$$\sigma = \int d\Omega_{k'} \frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}}$$

$$= \frac{3\sigma_\mathrm{T}}{4}\left[\frac{1+x}{x^3}\left\{\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x)\right\} + \frac{1}{2x}\ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2}\right]$$

$$x \equiv \frac{h\nu}{m_\mathrm{e}c^2}$$



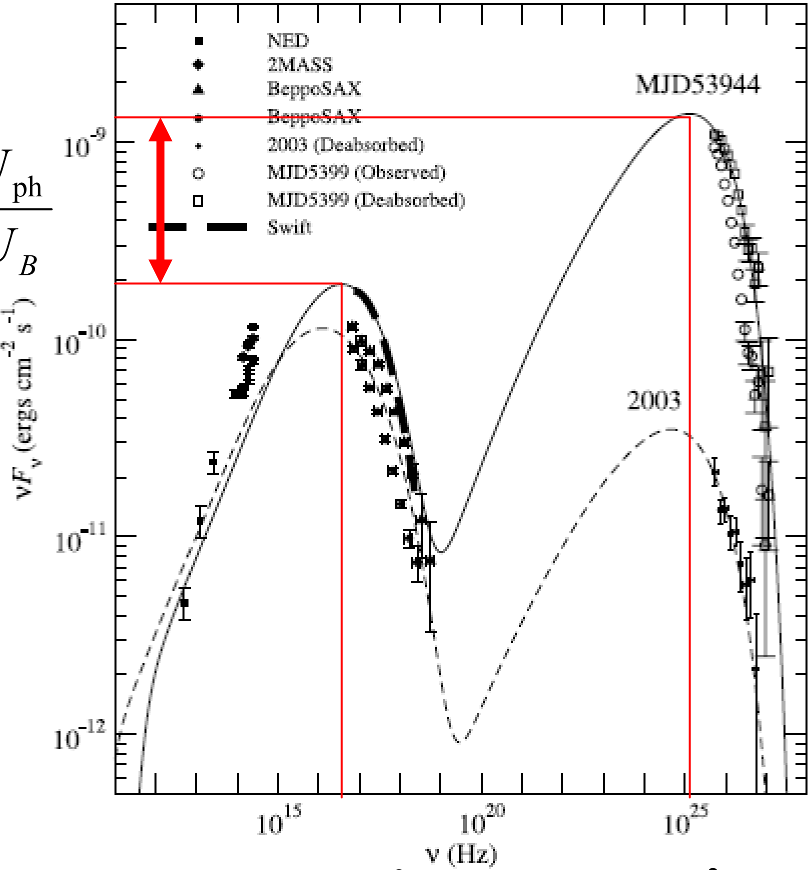
$$\sigma \approx \sigma_\mathrm{T} \quad \text{for } x \ll 1$$

$$\approx \frac{3\sigma_\mathrm{T}}{8x}\left(\ln 2x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{for } x \gg 1$$

ICからの磁場の推定

PKS 2155-304
Kusunose & Takahara 2008

$$\frac{U_{\rm ph}}{U_B}$$

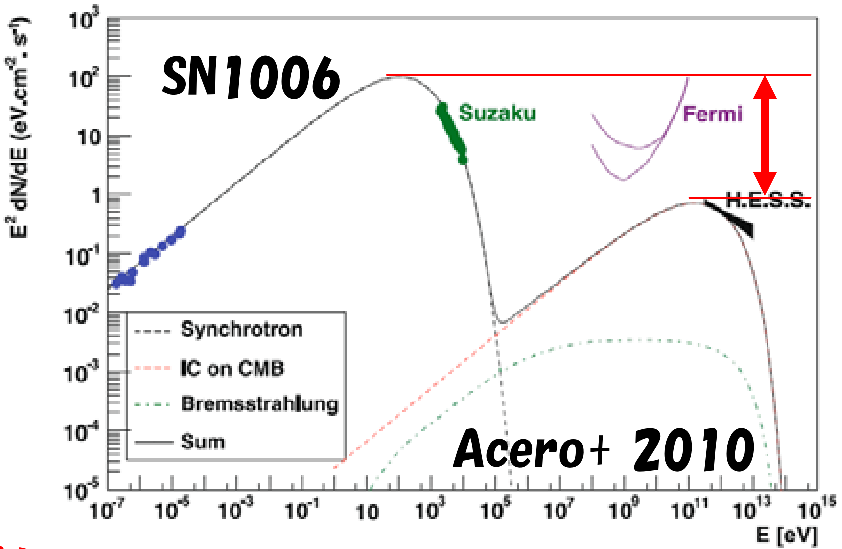


$$\varepsilon_{\rm syn} \propto \delta\gamma_{\rm max}^2 B \qquad \varepsilon_{\rm IC} \approx \gamma_{\rm max}^2 \varepsilon_{\rm syn}$$

ただし、Klein-Nishina効果を考慮すべき

Γ	90
$\mathcal{D}$	90
B (G)	0.1
R (10^{14}cm)	9.6
p	1.9
$\gamma_{\rm max}$ (10^4)	8.0
$\gamma_{\rm min}$	10

$$\frac{U_B}{U_{\rm CMB}}$$



$E_{\rm cut,e}$ [TeV]	$E_{\rm cut,p}$ [TeV]	$W_{\rm e}$ [10^{47} erg]	$W_{\rm p}$ [10^{50} erg]	B [μG]
10	–	3.3	–	30

光子散乱率(電子静止系)

等方で単色のソースの強度 number intensity [photons/cm²/s/eV/str]

$$\frac{I(\varepsilon)}{\varepsilon} \equiv N(\varepsilon) = N_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

ローレンツ不変 $I/\varepsilon^3 = N/\varepsilon^2$　　　$\varepsilon' = \varepsilon\gamma(1-\beta\mu) \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon'\gamma(1+\beta\mu')$

$$\longrightarrow N'(\varepsilon') = N_0 \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) = \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right)^2 \frac{N_0}{\gamma\beta\varepsilon'} \delta\left(\mu' - \frac{\varepsilon_0 - \gamma\varepsilon'}{\gamma\beta\varepsilon'}\right)$$

電子静止系での電子1個当たりの散乱レート [photons/s/eV/str]

入射角度平均 $\dfrac{dN'}{dt' d\varepsilon_1' d\Omega'} = \sigma_T \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} N'(\varepsilon_1', \mu') d\mu'$ ⟵ ✦ $\sigma \approx \sigma_T \quad \varepsilon_1' \approx \varepsilon'$

$$\mu' = \frac{\varepsilon_0 - \gamma\varepsilon_1'}{\gamma\beta\varepsilon_1'} \qquad -1 < \mu' < 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{\gamma(1+\beta)} < \varepsilon_1' = \varepsilon' < \frac{\varepsilon_0}{\gamma(1-\beta)}$$

電子静止系で、
光子のエネルギーが
広がる

散乱光子のエネルギーの広がり

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 \gamma(1-\beta\mu_1) \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{\gamma^2(1+\beta)(1-\beta\mu_1)} < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{\gamma(1-\beta)(1-\beta\mu_1)}$$

μ_1の大小関係に書き換える

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_0 \Rightarrow -1 < \mu_1 < \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}(1-\beta)\right)$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_0 \Rightarrow \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}(1+\beta)\right) < \mu_1 < 1$$

ローレンツ不変 $\dfrac{j_\varepsilon}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{dN}{dt\,d\varepsilon\,d\Omega\,dV}$

$$\frac{dN}{dt\,d\varepsilon_1 d\Omega\,dV} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1'}\right)\frac{dN'}{dt'd\varepsilon_1'd\Omega'dV'} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1'}\right)n_e'\frac{dN'}{dt'd\varepsilon_1'd\Omega'} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1'}\right)\frac{n_e}{\gamma}\frac{dN'}{dt'd\varepsilon_1'd\Omega'}$$

$$\frac{dN'}{dt'd\varepsilon'd\Omega'dV'} = n_e'\frac{dN'}{dt'd\varepsilon'd\Omega'}$$

$$n_e' = \frac{n_e}{\gamma}$$

Emission function

$$\frac{dN}{dt\,d\varepsilon\,d\Omega\,dV} = \frac{n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\varepsilon N_0}{2\gamma^2\beta\varepsilon_0^2}\underline{\frac{1}{2}\int d\mu_1}$$

散乱角度平均、積分範囲に注

$$= \frac{n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}N_0}{4\gamma^2\beta^2\varepsilon_0}\left[1+\beta-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(1-\beta)\right] \quad \text{for } \varepsilon > \varepsilon_0$$

$$\approx \frac{3n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}N_0}{4\gamma^2\varepsilon_0}\frac{2}{3}(1-x) \qquad x \equiv \frac{\varepsilon_1}{4\gamma^2\varepsilon_0} < 1$$

$$x << 1 \Rightarrow \text{const.}$$

Klein-Nishinaに沿った散乱角度分布(非等方散乱)

$$\Rightarrow \frac{3n_e\sigma_T N_0}{4\gamma^2\varepsilon_0}\left(2x\ln x + x + 1 - 2x^2\right), x \equiv \frac{\varepsilon_1}{4\gamma^2\varepsilon_0}$$

エネルギー分布を考慮

先ほどの式を書き直す。

$$\frac{dN}{dt d\varepsilon d\Omega dV} = \frac{3n_e\sigma_T N_0}{\varepsilon} xg(x), \quad g(x) \equiv \left(2x\ln x + x + 1 - 2x^2\right), x \equiv \frac{\varepsilon}{4\gamma^2\varepsilon_0}$$

$$j_\varepsilon = \frac{dE}{dt d\varepsilon d\Omega dV} = \varepsilon \frac{dN}{dt d\varepsilon d\Omega dV} = 3n_e\sigma_T N_0 xg(x)$$

電子と光子のエネルギー分布を考える $N_0 \Rightarrow \frac{cn_\gamma(\varepsilon_0)}{4\pi} d\varepsilon_0,\ n_e \Rightarrow n_e(\gamma)d\gamma$

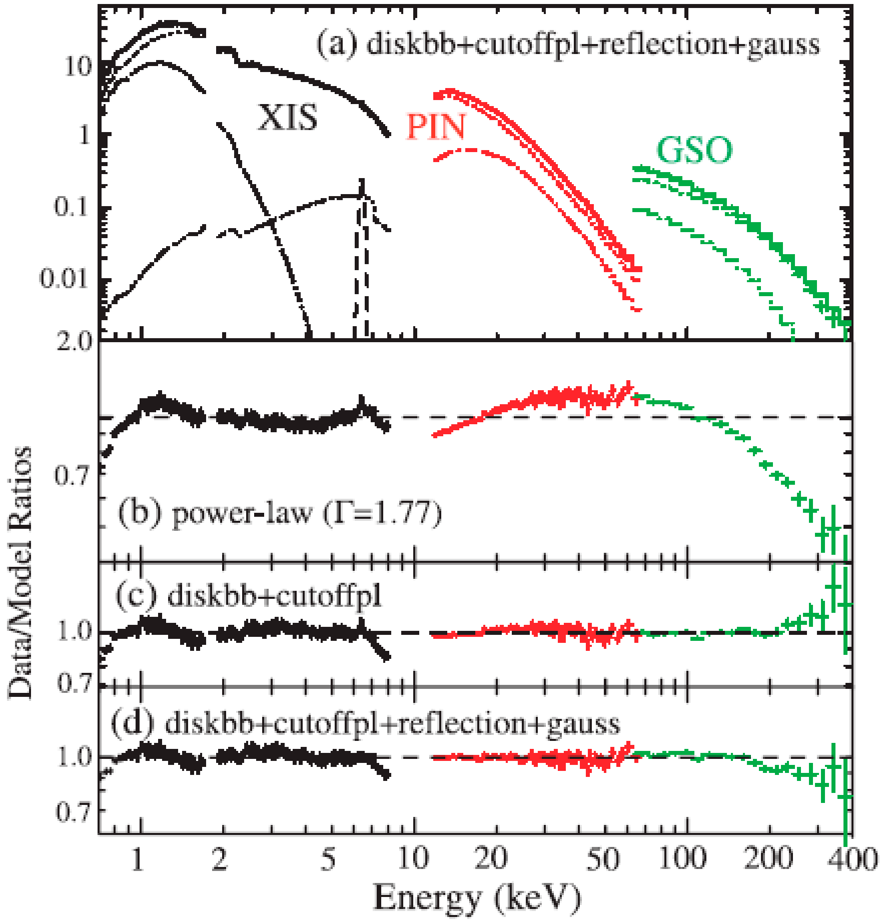
$$\frac{dE}{dt d\varepsilon dV} = 4\pi \frac{dE}{dt d\varepsilon d\Omega dV} = 3c\sigma_T \int d\varepsilon_0 \varepsilon_0 n_\gamma(\varepsilon_0) \int d\gamma n_e(\gamma) xg(x)$$

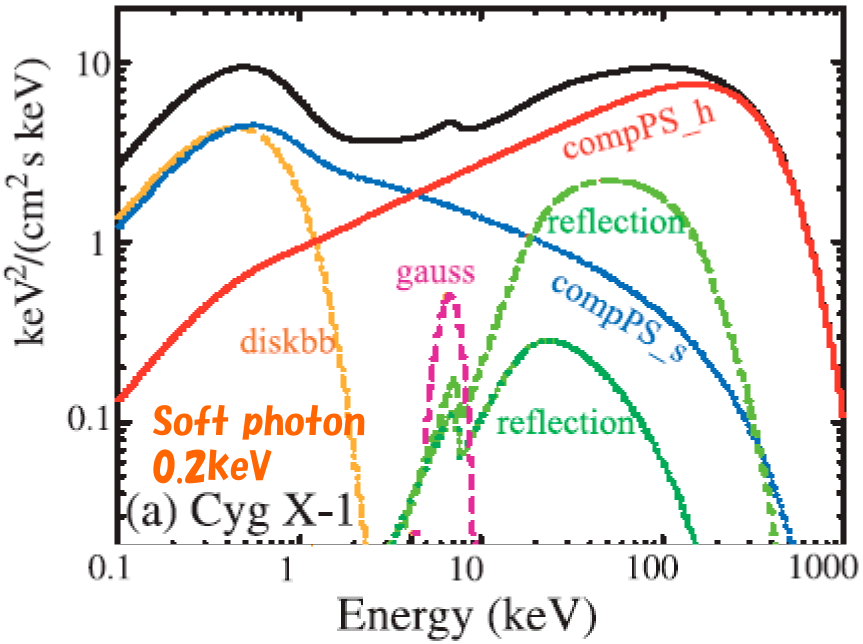
$$\propto \int d\varepsilon_0 \varepsilon_0 n_\gamma(\varepsilon_0) \int d\gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \gamma^{-(2+p)} g(x) \qquad \gamma \propto \sqrt{\frac{\varepsilon}{x\varepsilon_0}}, d\gamma = -\frac{1}{4x^{3/2}}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt d\varepsilon dV} \propto \boxed{\varepsilon^{-(p-1)/2}} \int d\varepsilon_0 \varepsilon_0^{-(p-1)/2} n_\gamma(\varepsilon_0) \int dx x^{(p-1)/2} g(x)$$

Cyg X-1

Makishima+ 2008





$T_e \sim 100$keV

$\tau \sim 1.5$

$$y = \frac{4T_e}{m_e c^2}\tau^2 \approx 1.7$$

Kompaneets Eq.

$$f_\gamma d^3p d^3x = \mathfrak{n}_\nu \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3}$$

プランク分布なら

$$\mathfrak{n}_\nu = \frac{2}{\exp(h\nu/T)-1}$$

$$(\boldsymbol{p},\nu) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p_1},\nu_1)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{n}_\nu}{\partial t} = c\int d^3p_e \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta\nu)\left[f_e(\boldsymbol{p_1})\mathfrak{n}_{\nu_1}\underline{(1+\mathfrak{n}_\nu)} - f_e(\boldsymbol{p})\mathfrak{n}_\nu \underline{(1+\mathfrak{n}_{\nu_1})}\right]$$

誘導放射の寄与

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu << \nu$$

$$\mathfrak{n}_{\nu_1} \cong \mathfrak{n}_\nu + \Delta\nu \frac{\partial \mathfrak{n}_\nu}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\Delta\nu^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{n}_\nu}{\partial \nu^2}$$

$$x \equiv \frac{h\nu}{T_e}, \quad \Delta \equiv \frac{h\Delta\nu}{T_e} \qquad \mathfrak{n}'_\nu \equiv \frac{\partial \mathfrak{n}_\nu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_e(E)}{\partial E} = -\frac{1}{T_e} f_e(E) \qquad f_e(E_1) \cong f_e(E)\left(1 + \Delta + \frac{\Delta^2}{2}\right)$$

Kompaneets Eq.

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{n}_\nu}{\partial t} = \left(\mathbb{n}'_\nu + \mathbb{n}_\nu (1+\mathbb{n}_\nu)\right)\int d^3 p_{\mathrm{e}} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} f_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{p})\Delta$$

$$+\left(\frac{1}{2}\mathbb{n}''_\nu + \mathbb{n}'_\nu (1+\mathbb{n}_\nu) + \frac{1}{2}\mathbb{n}_\nu (1+\mathbb{n}_\nu)\right)\int d^3 p_{\mathrm{e}} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} f_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{p})\Delta^2$$

エネルギー・運動量の保存から

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}$$

$$h\Delta\nu = \frac{h\nu c\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n_1} - \boldsymbol{n}) - h^2\nu^2(1-\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n})}{E - c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n_1} + h\nu(1-\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n})} \approx \frac{h\nu}{m_{\mathrm{e}}c}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n_1}-\boldsymbol{n})$$

$$|\boldsymbol{n_1} - \boldsymbol{n}|^2 = 2(1-\cos\theta) \qquad \frac{d\sigma_{\mathrm{T}}}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_{\mathrm{e}}^2 \left(1+\cos^2\theta\right)$$

温度平衡になった時、右辺がゼロとなるなどの条件を考えると、

Kompaneets Eq.

$$\frac{\partial \mathrm{n}_\nu}{\partial t} = c n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \frac{T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}} c^2} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\mathrm{n}'_\nu + \mathrm{n}_\nu + \mathrm{n}_\nu^2 \right) \right]$$

光子も"ほぼ"プランク分布で、 $T_{\mathrm{e}} >> T_\gamma$ $\qquad z \equiv \dfrac{h\nu}{T_\gamma}$

$$\frac{\partial \mathrm{n}_\nu}{\partial t} \cong c n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \frac{T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}} c^2} \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^4 \frac{\partial \mathrm{n}_\nu}{\partial z} \right]$$

$$y \equiv \frac{T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}} c^2} \int_{-\infty}^{t} dt c n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \approx \frac{T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}} c^2} \max(\tau, \tau^2)$$

$$\frac{\delta \mathrm{n}_\nu}{\mathrm{n}_\nu} \cong -2y \quad \text{for } z << 1 \Rightarrow \frac{\delta \mathrm{n}_\nu}{\mathrm{n}_\nu} \cong \frac{\delta T_\gamma}{T_\gamma}$$

$$\cong y z^2 \quad \text{for } z >> 1$$

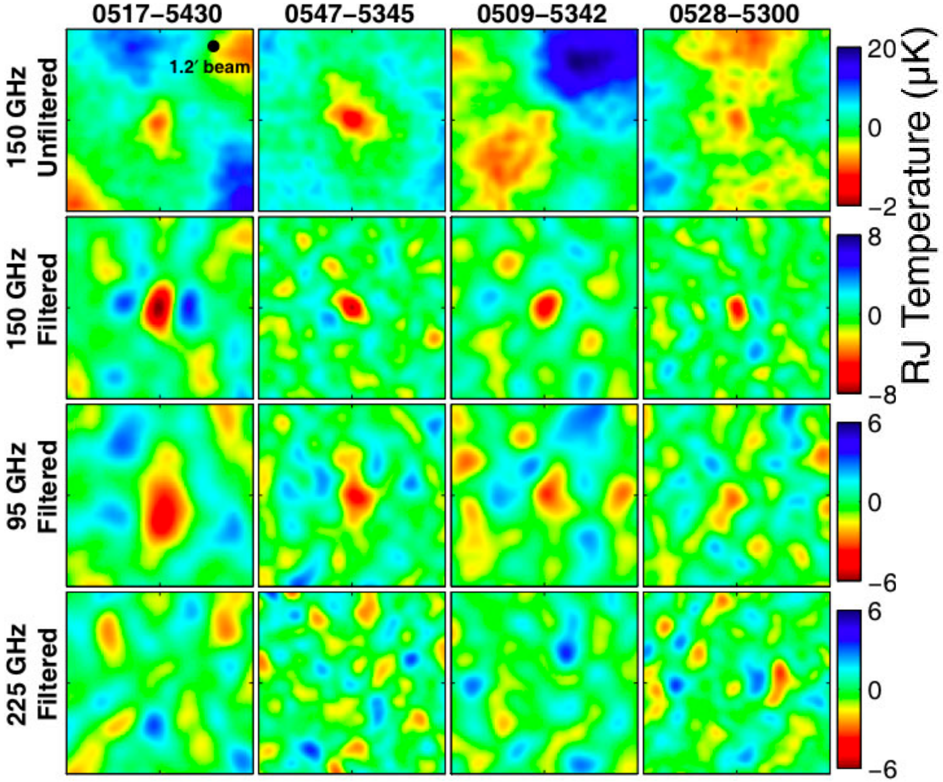
レイリー・ジーンズ領域
光子数密度∝ εT

Sunyaev-Zel'dovich効果

銀河団コアのサイズ200Kpc、密度0.003個cm⁻³、温度4keV
⇒τ～0.003

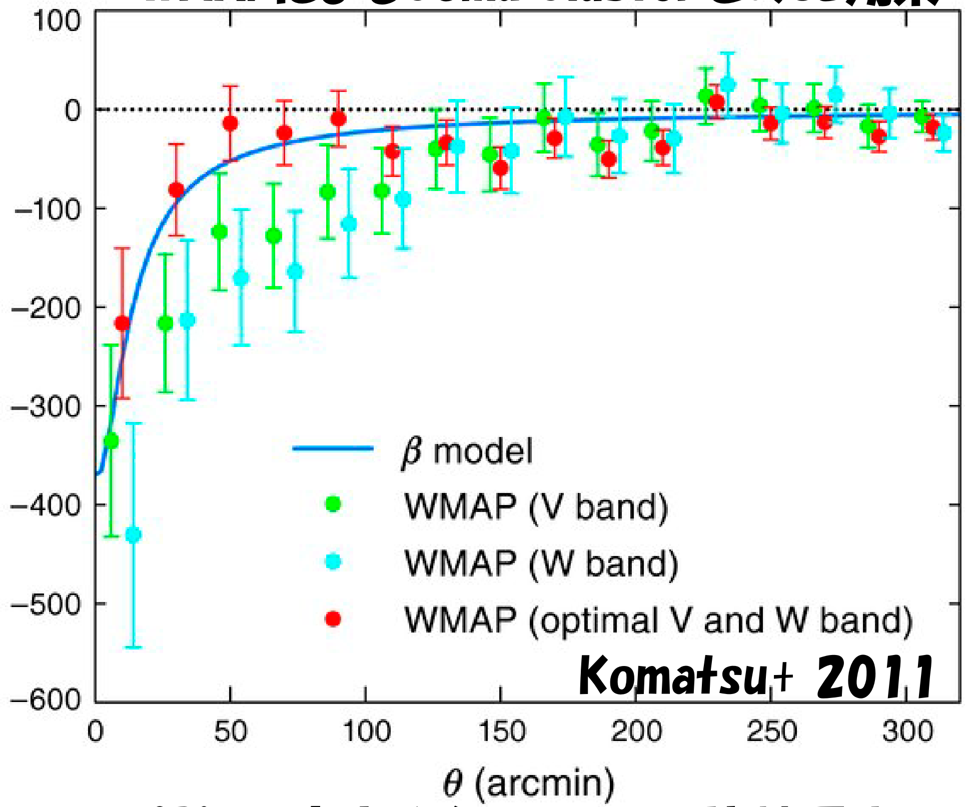
$$\frac{\delta T_\gamma}{T_\gamma} = -2y \cong -5\times 10^{-5}$$

CMBを利用した銀河団の検出



Staniszewski+ 2009

WMAPによるComa ClusterでのSZ効果



Komatsu+ 2011

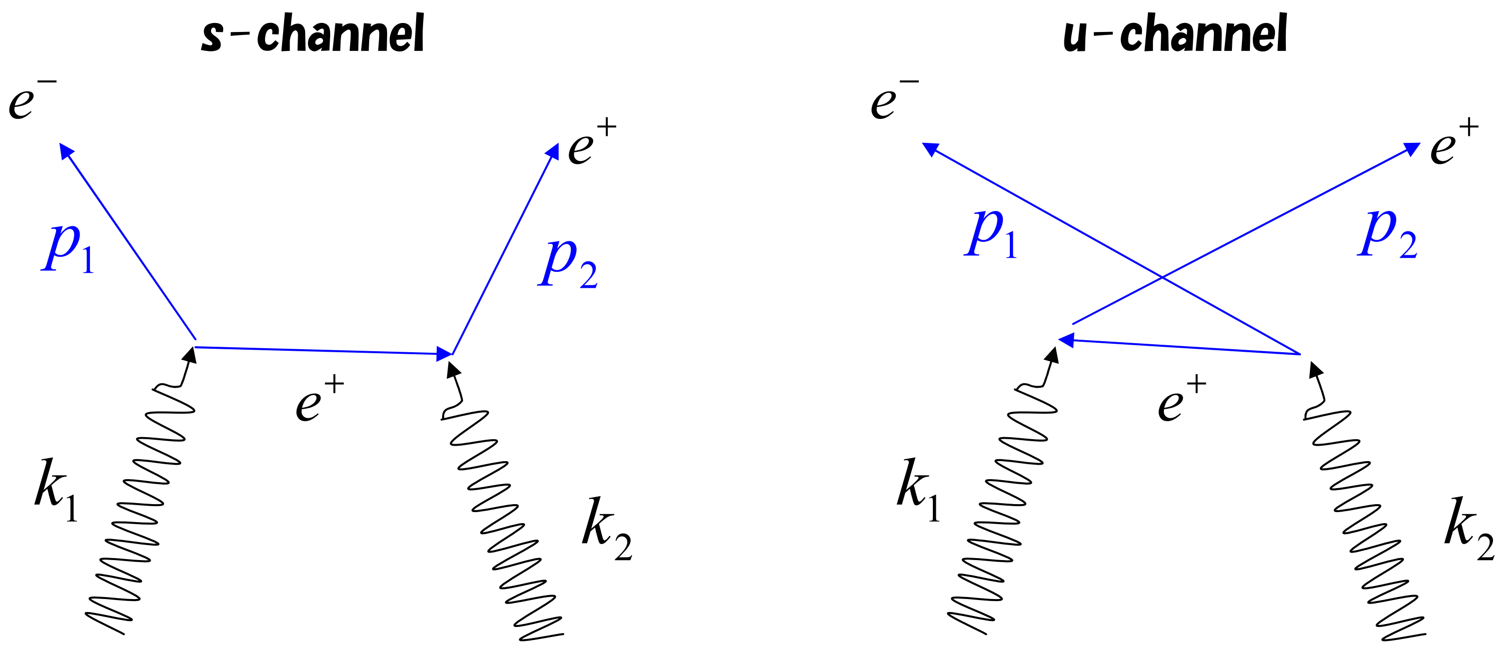
銀河団密度分布のモデルと比較可能

8. その他の重要な反応(おまけ)

- 電子・陽電子対生成
- ハドロンの反応

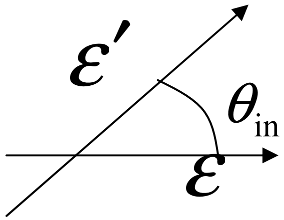
古典電磁気学では扱えない反応

電子・陽電子対生成



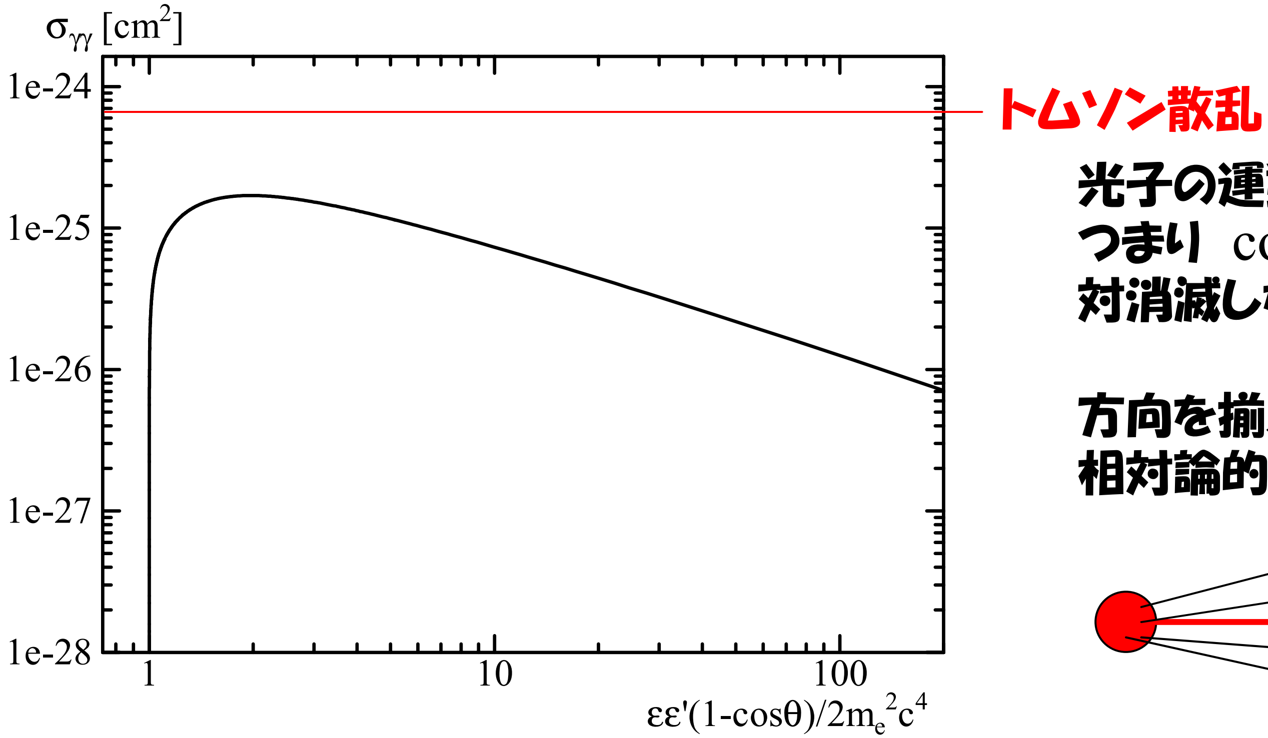
$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{3\sigma_T}{16}(1-y^2)\left[(3-y^4)\ln\frac{1+y}{1-y} - 2y(2-y^2)\right]$$

$$y^2 \equiv 1 - \frac{2m_e^2c^4}{\varepsilon\acute{\varepsilon}(1-\cos\theta_{\rm in})} < 1$$



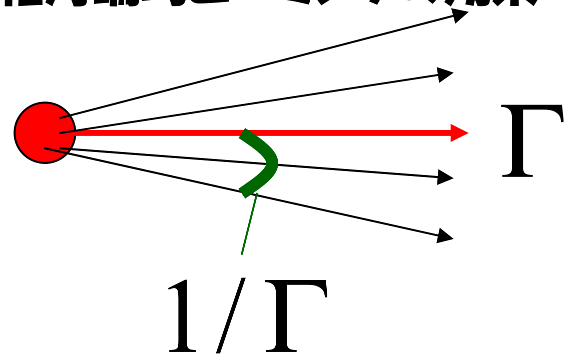
$\varepsilon\varepsilon'(1-\cos\theta_{\rm in}) > 2m_e^2c^4$ の時だけ起こる反応。

電子・陽電子対生成



光子の運動方向が揃っていれば、
つまり $\cos\theta_{\rm in} \approx 1$
対消滅しなくてすむ。

方向を揃えるには？
相対論的ビーミングの効果



$$t_{\gamma\gamma}^{-1}(\varepsilon) = \frac{c}{2}\int_{\varepsilon_{\rm min}}^{\infty} d\acute{\varepsilon} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta_{\rm in})(1-\cos\theta_{\rm in})\sigma_{\gamma\gamma} n_{\gamma}(\acute{\varepsilon})$$

$$\tau_{\gamma\gamma} = \frac{R}{ct_{\gamma\gamma}}$$

ハドロンによる反応

$$p+p \to p+p+\pi^0 \qquad \pi^0 \to \gamma+\gamma$$

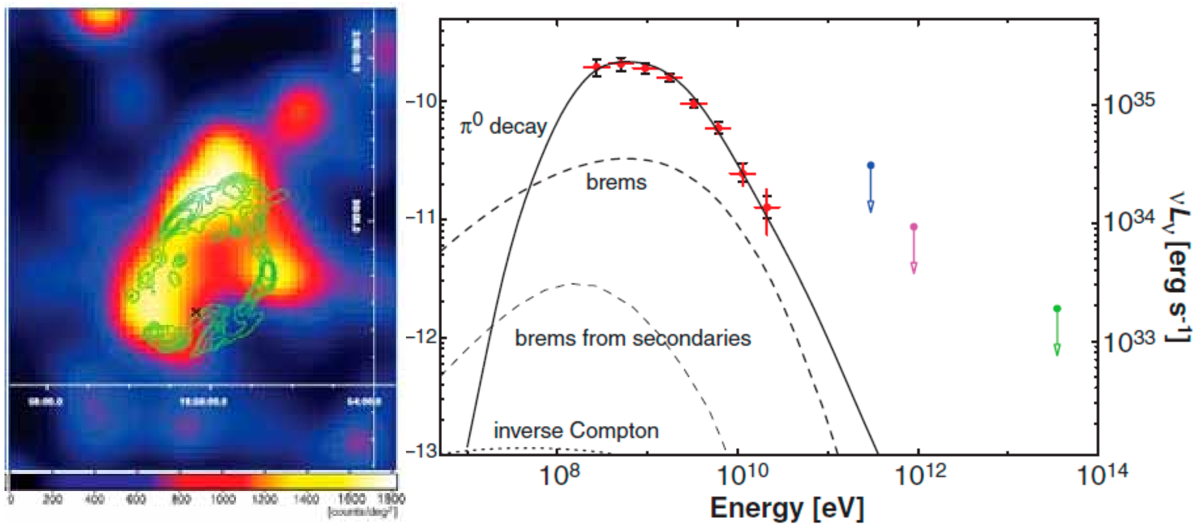
$$\to p+n+\pi^+ \qquad \pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$$

$$\sigma_{pp} \cong 0.05\sigma_{\mathrm{T}}$$

$$\pi^0 : \pi^+ \approx 1:2$$

元の陽子の30%ほどのエネルギーがパイオンへ。



SNR W44 (Abdo+ 2010)

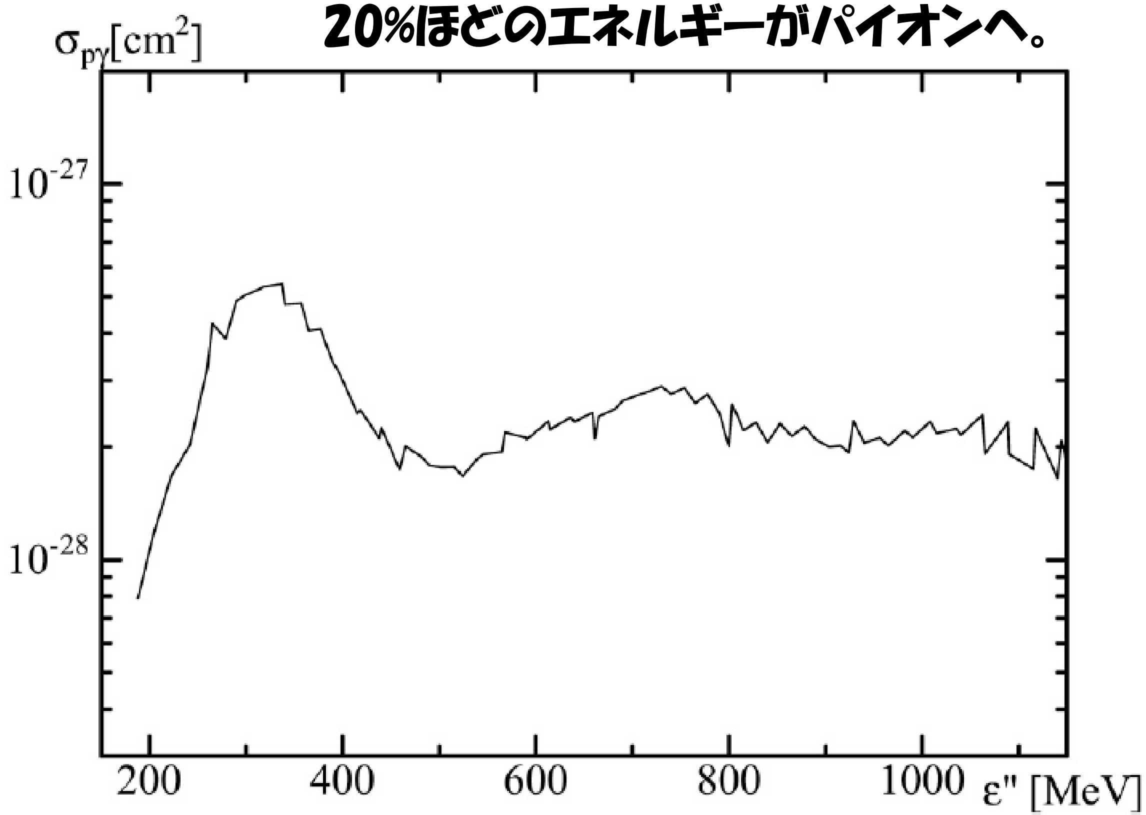
$$m_\pi c^2 \cong 135\mathrm{MeV}$$

ハドロンによる反応

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$$

$$\rightarrow n + \pi^+$$

20%ほどのエネルギーがパイオンへ。



陽子静止系での光子のエネルギー

最高エネルギー宇宙線
10^{20}eV→γ～10^{11}

CMB光子の平均エネルギー
3×3K～10^{-3}eV

陽子静止系では
γ 10^{-3}eV～100MeV

光子数密度 400cm^{-3}
300MeVを超えている光子は、
(ざっくり)1/100くらいか？

平均自由行程
1/n σ～100Mpc