

重力波天文学

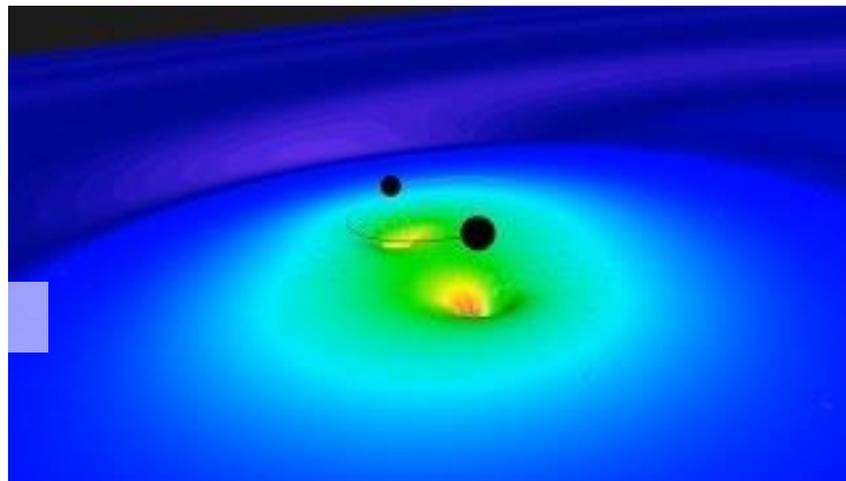
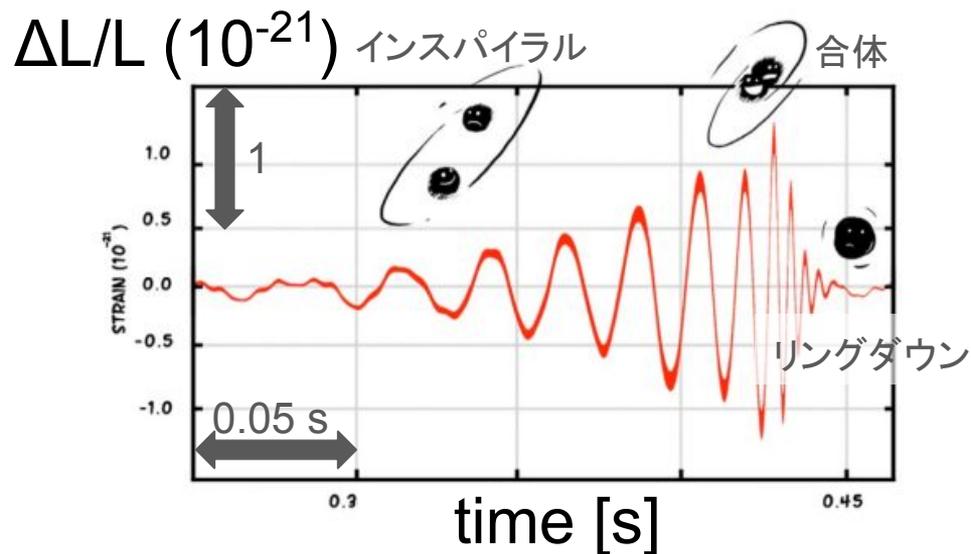
大野、竹本、栗原、東風谷、井上

- 目的、背景・原理
- 実験方法
- 解析
- 結果、考察
- まとめ

目的、背景・原理

目的

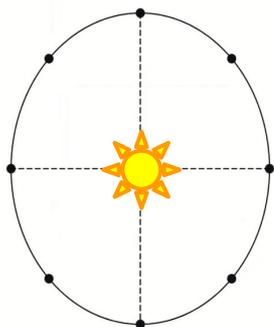
信号波形を理論的に予測できるコンパクト連星合体(CBC)から放出される重力波の探索に取り組む。(コンパクト天体:ブラックホール、中性子星、白色矮星)



背景

物体周辺の時空の歪みが物体の振動とともに有限の速度で波として伝わる。

→ 重力波



重力波がくると、丸く並べた質量が上下に伸縮運動するような潮汐力を受ける

一般相対性理論

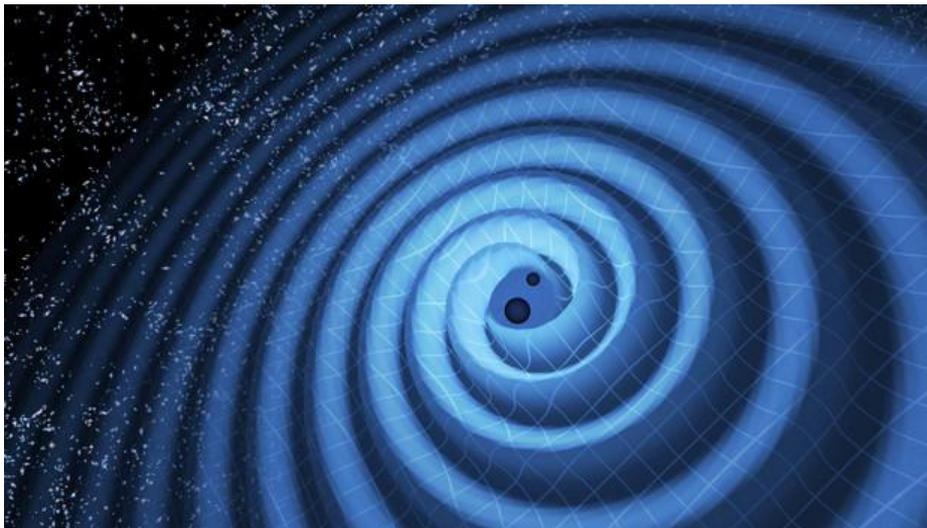
重力 = 時空の歪み と考える

→ 質量(エネルギーと等価)により時空が歪む

$$\text{Einstein方程式} \quad G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

↓線形近似 $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) $\eta_{\mu\nu}$: Minkowski計量

$$\text{波動方程式} \quad \square h_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



原理

Michelson干渉計

光の干渉を利用して、2つの方向の光路差を測定する

これを利用して時空の歪みかた(= 重力波)を検出

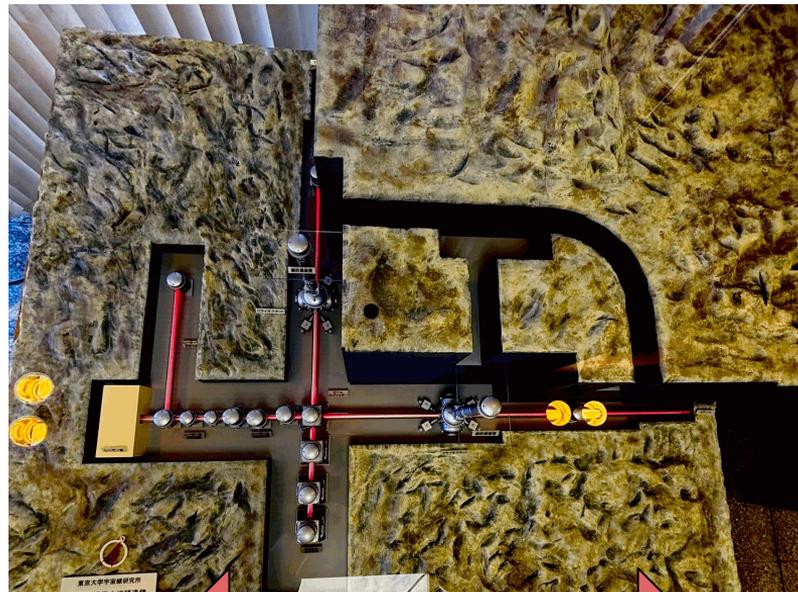
→ レーザー干渉計検出器

重力波発生

→ 光路長差が生じる

→ 干渉光の強度変化 ← 電圧に変換して検出!

KAGRA(大型低温重力波望遠鏡)



腕の長さ : 3 km

振幅 h の重力波による、距離 L 離れた2点の間隔のずれは

$$\Delta L \sim L \times h$$

→ L が大きい方が観測しやすい

実験方法

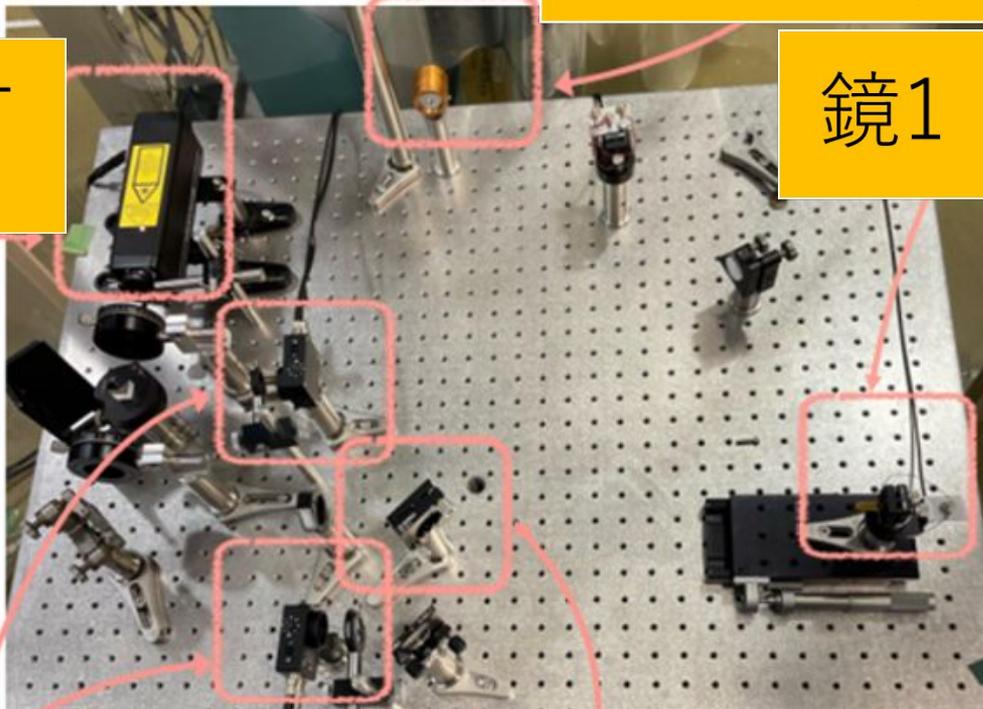
干渉計図

He-Neレーザー
入射部

鏡2 (振り子)

鏡1 (Piezo素子)

L: アームの長さ
L = 42.0cm



フォトディテクター
PD

ビームスプリッター
(光を2分割)

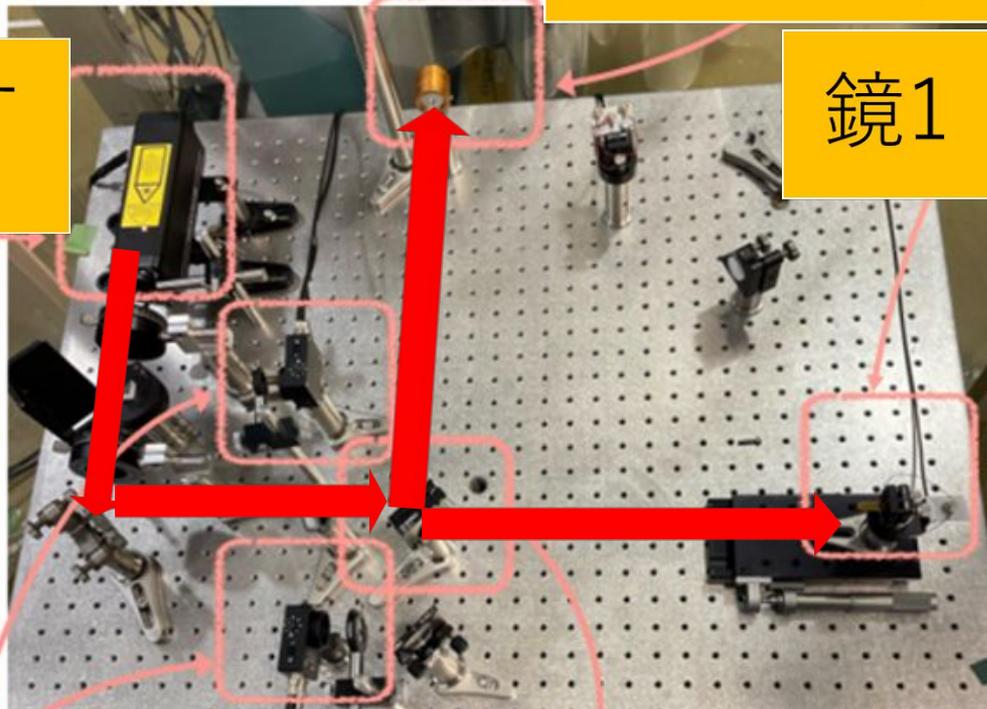
干渉計図

He-Neレーザー
入射部

鏡2 (振り子)

鏡1 (Piezo素子)

L: アームの長さ
L = 42.0cm



フォトディテクター
PD

ビームスプリッター
(光を2分割)

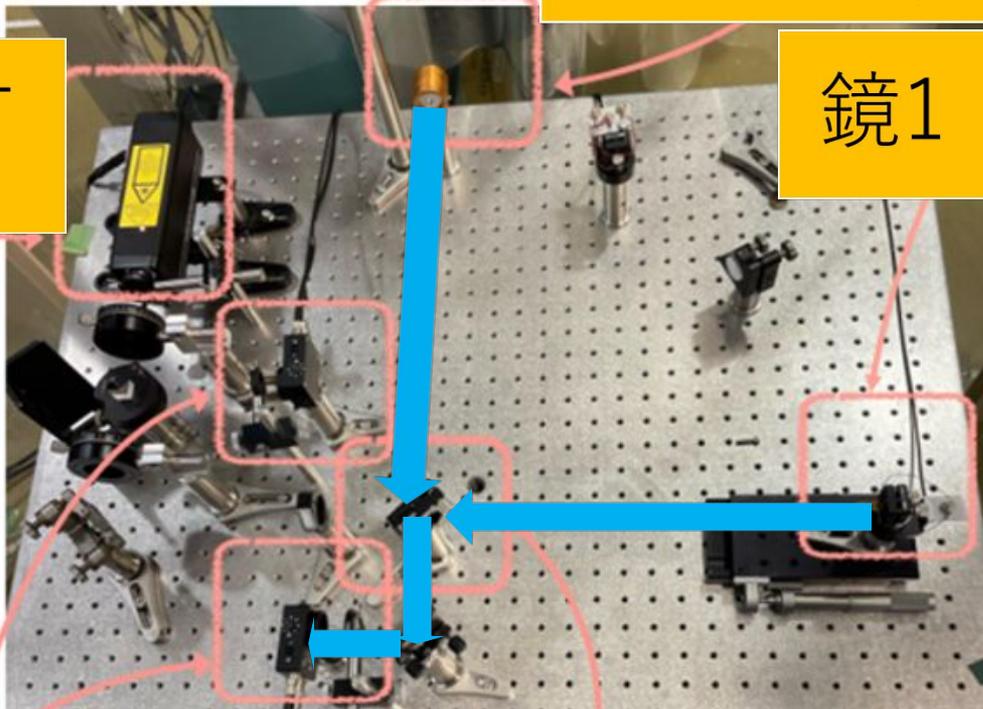
干渉計図

He-Neレーザー
入射部

鏡2 (振り子)

鏡1 (Piezo素子)

L : アームの長さ
L = 42.0cm



フォトディテクター
PD

ビームスプリッター
(光を2分割)

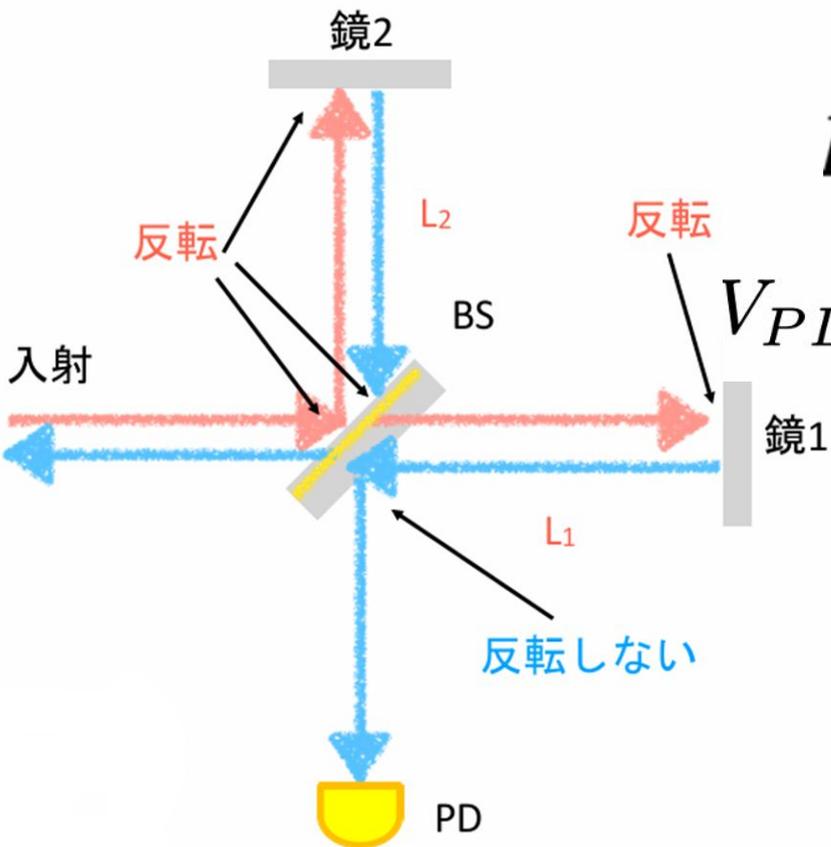
・振り子式の鏡



干渉計の片方を吊るし振り子にする

- ・地面からの揺れを防止できる
- ・自由質点にする事で重力波を検出しやすくする
- ・固定した方からの相対的な揺れを検出

・干渉計の信号



干渉した電場 $E_{inf}(t)$

PDの出力信号 V_{PD}

$$E_{inf}(t) = E_0 e^{i(\Omega_0 t - \phi_+)} i \sin \phi_-$$

$$V_{PD} \propto E_0^2 \sin^2 \phi_- = \frac{E_0^2}{2} (1 - \cos 2\phi_-)$$

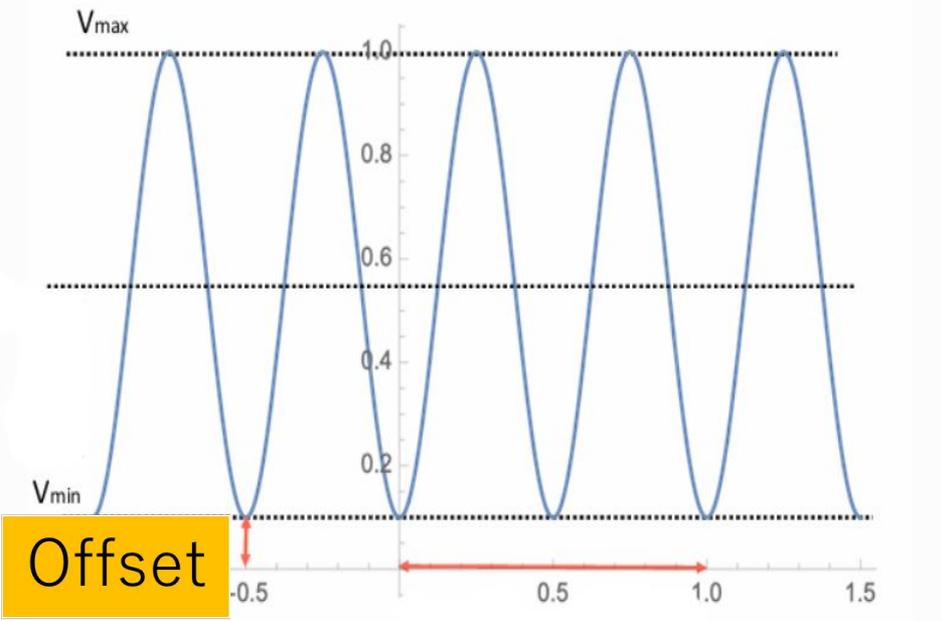
$$\phi_- = \phi_1 - \phi_2 = k(L_1 - L_2)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$L_1 - L_2 = x$$

・干渉計の信号

干渉計の変換効率を表すC(Contrast)

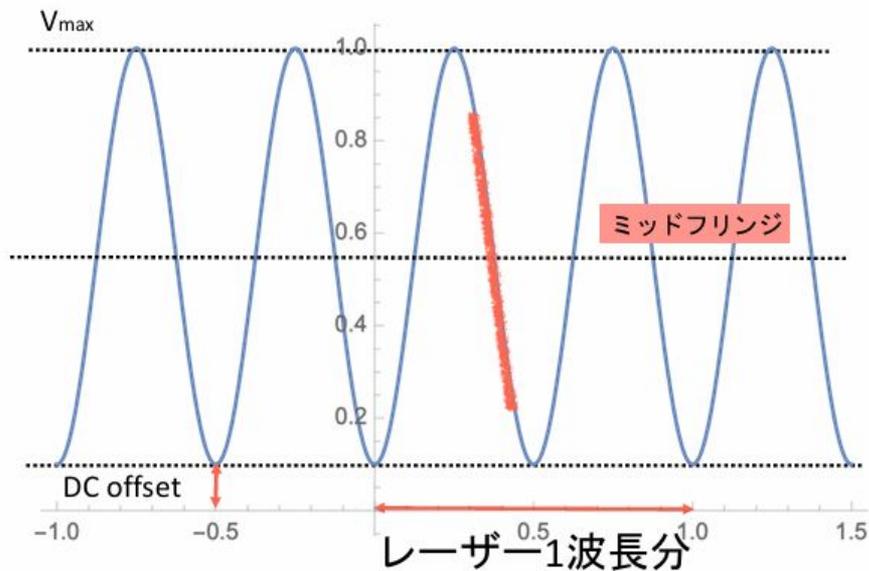


$$C \equiv \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max} + V_{min}}$$

$$V_0 = V_{max} + V_{min}$$

$$V_{PD}(x) = \frac{V_0}{2} \left(1 - C \cos \frac{2 \times 2\pi x}{\lambda} \right)$$

・ミッドFRINGジロック



・ミッドFRINGジ点

マイケルソン干渉計において干渉縞の明暗の中間にあたる動作点

- ・ x の微小変化に対して出力信号の変化が最大
- ・ x に対して出力が直線的に変化する領域

$$V_{PD}(x) = \frac{V_0}{2} \left(1 - C \cos \frac{2 \times 2\pi x}{\lambda} \right)$$

$$\frac{dV_{PD}}{dx} = \frac{CV_0}{2} \frac{4\pi}{\lambda} \sin \left(\frac{4\pi x}{\lambda} \right)$$

・ミッドフリンジロック

ミッドフリンジロック

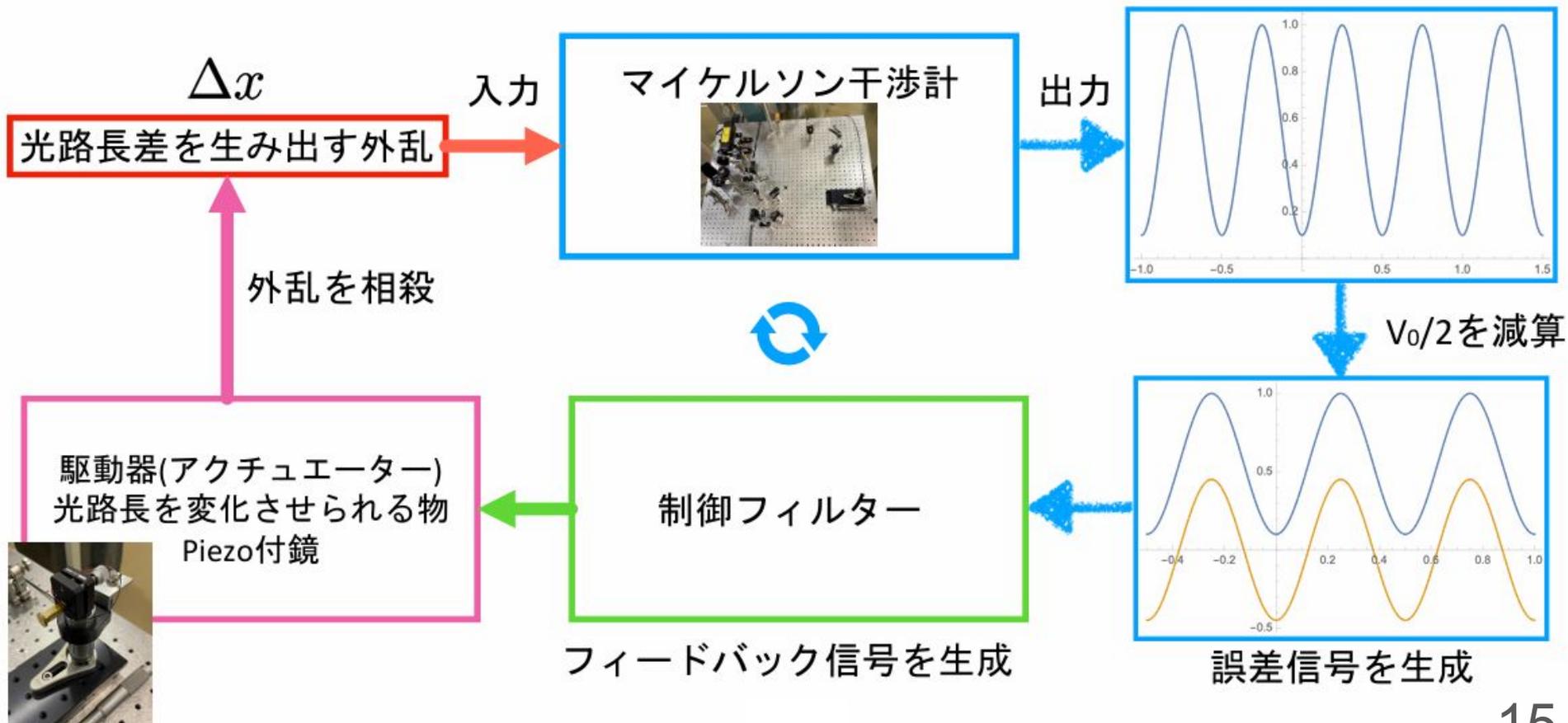
誤差信号をゼロに保つようフィードバック制御

→高感度を維持

誤差信号 $E_S(x)$:ミッドフリンジ点からのズレ

$$E_S(x) = \frac{V_0}{2} - V_{PD}(x) = \frac{V_0 C}{2} \cos \frac{4\pi x}{\lambda}$$

・フィードバック制御

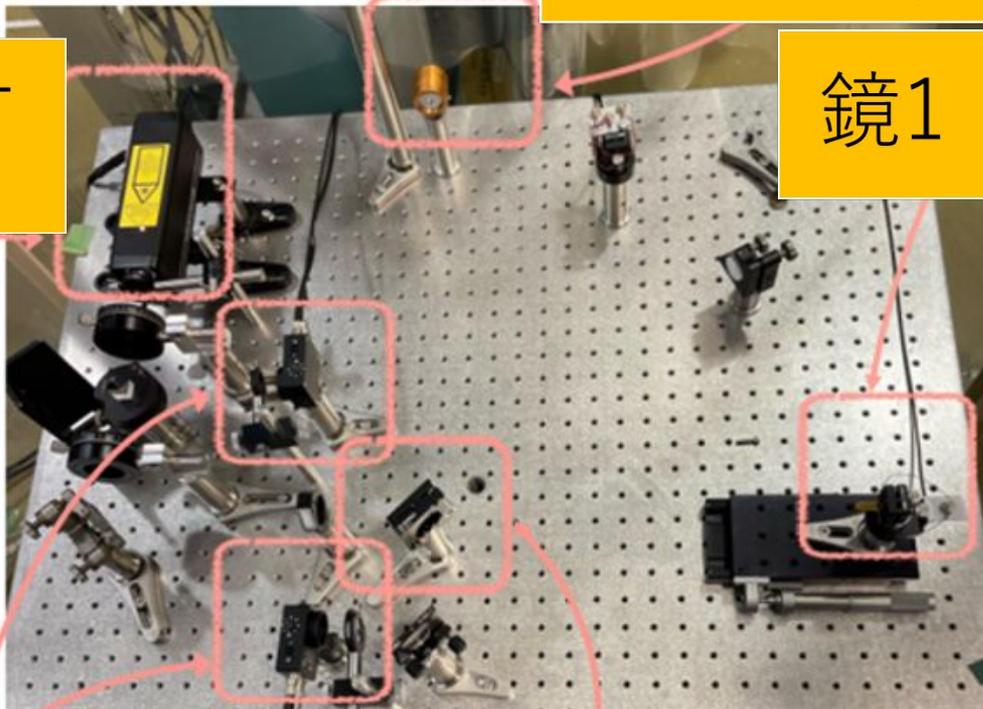


鏡2 (振り子)

鏡1 (Piezo素子)

He-Neレーザー
入射部

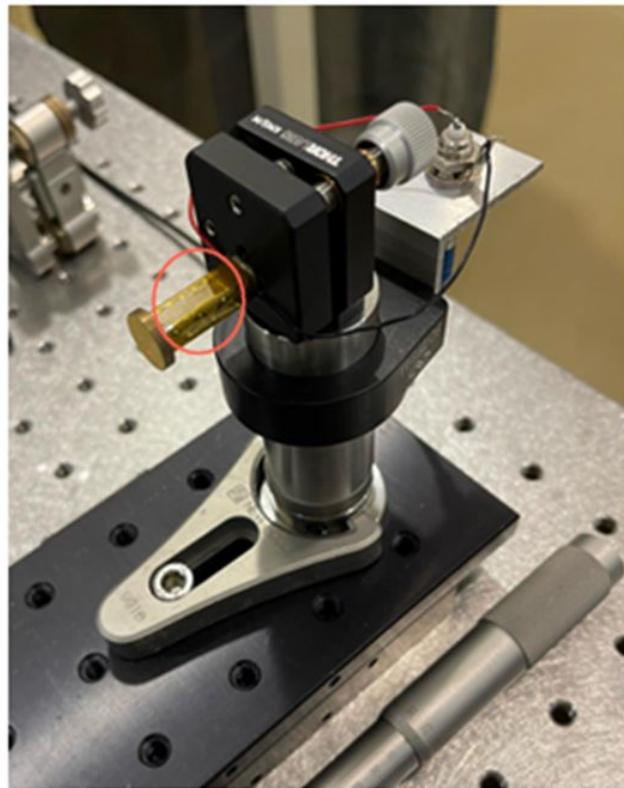
L: アームの長さ
L = 42.0cm



フォトディテクター
PD

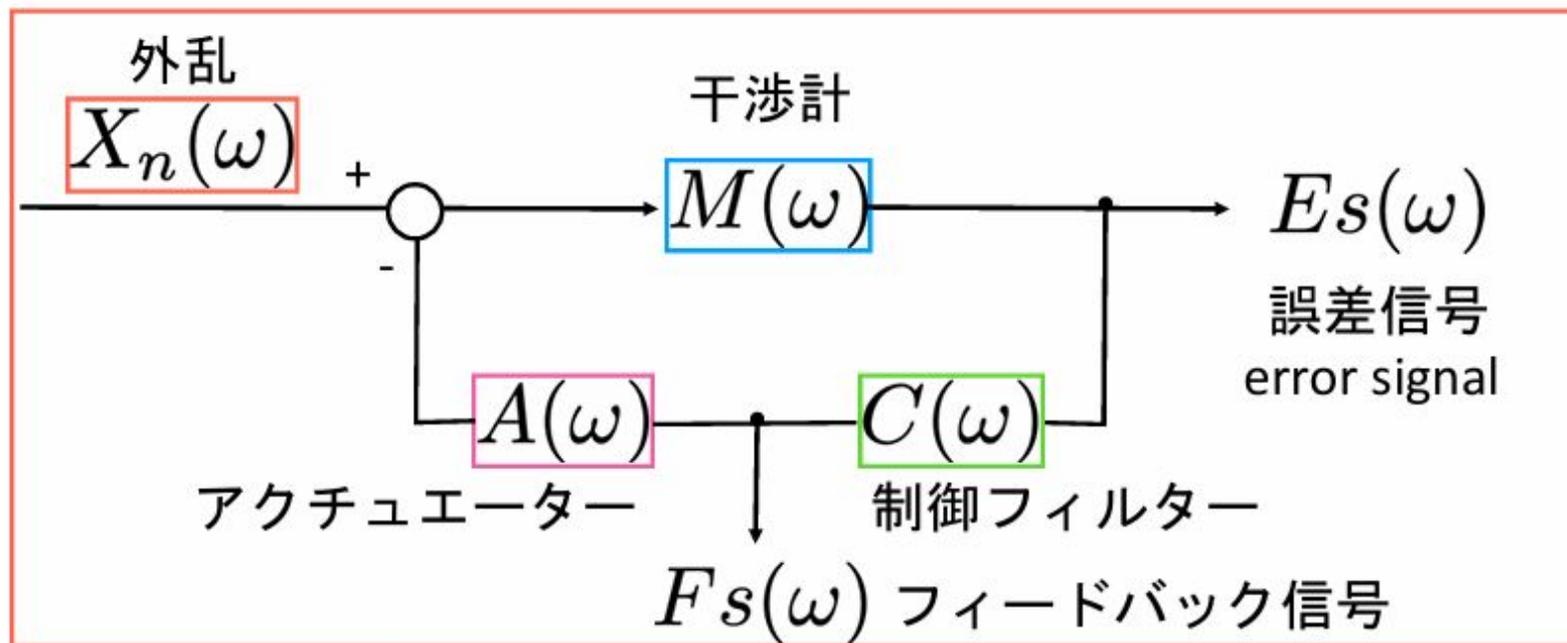
ビームスプリッター
(光を2分割)

- フィードバック制御
Piezo素子



- 左の写真の茶色の直方体がPiezo素子。チタン酸ジルコン酸鉛(PZT)。
- Piezo効果=圧電効果。
- 圧力を加えると、電圧を発生します。これが圧電効果。
- 逆に電圧を加えると伸び縮みします。この性質を使って、鏡を動かします。
- マイケルソン干渉計にフィードバック制御をかけるときに活躍します。

・フィードバック制御

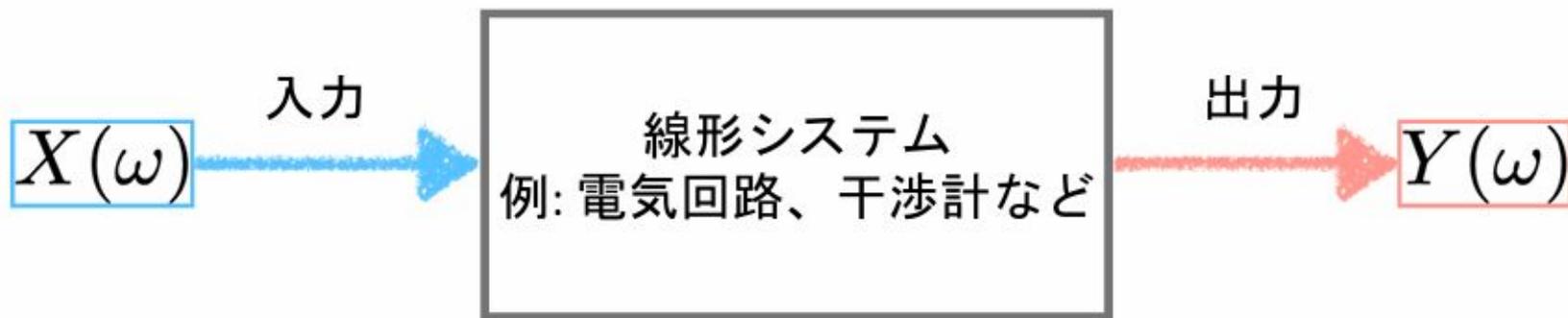


ブロック線図

・フィードバック制御

・伝達関数

線形システムに正弦波信号 $X(\omega)$ を入力し、出力 $Y(\omega)$ が得られた場合を考える。



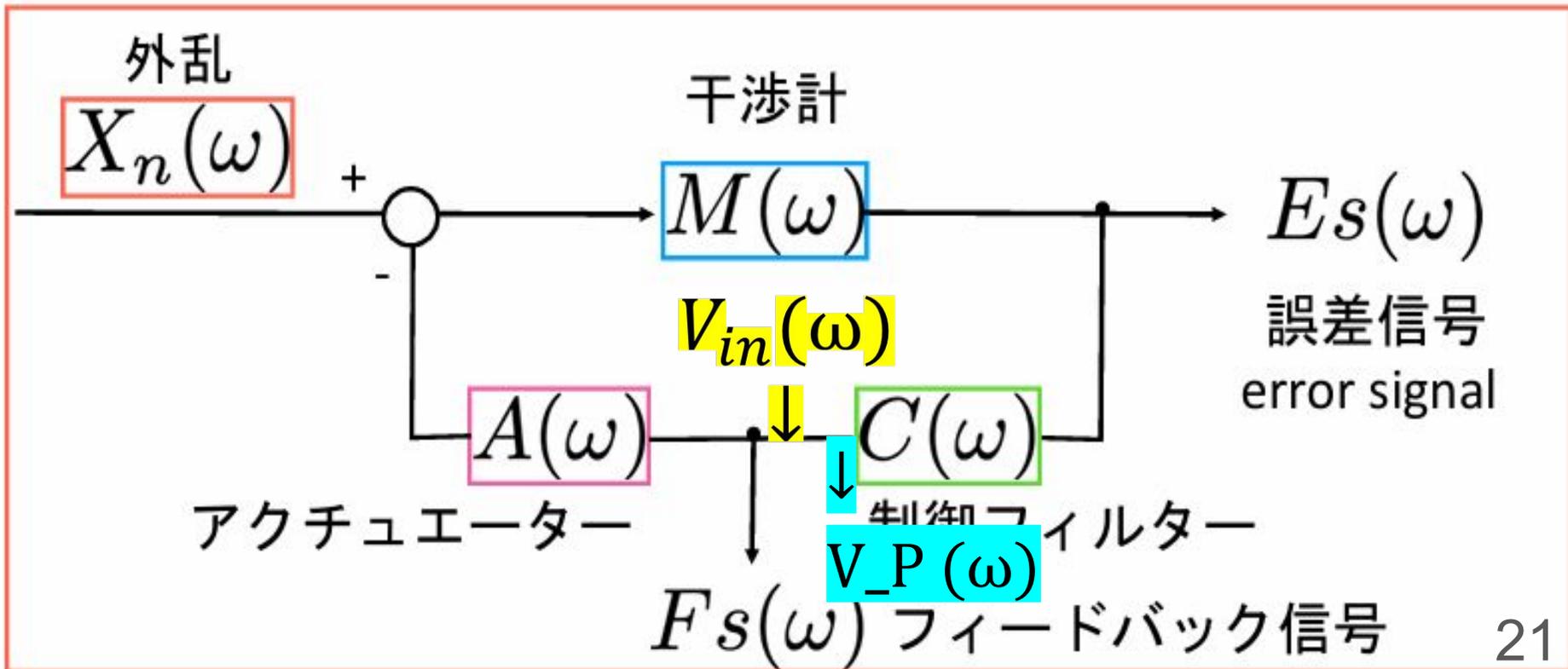
この線形システムは以下に定義される周波数伝達関数または周波数応答関数を持つ。

$$G(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

・フィードバック制御
各伝達関数を求める

$V_{in}(\omega)$: テスト信号

$V_P(\omega)$: テスト信号挿入前の信号



・フィードバック制御

M(ω) - 干渉計の伝達関数

光路長変化を電気信号に変換する係数

単位:[V/m](ボルト/メートル)

$$M(\omega) = \frac{dV_{PD}}{dx} = \frac{CV_0}{2} \frac{4\pi}{\lambda} \frac{[V]}{[m]}$$

V_0 : 検出信号の最大値と最小値の和

C : 干渉計の質

λ : レーザー波長

・フィードバック制御

Open Loop TRF $G(\omega)$

フィードバック制御の安定性と
制御の評価を示す数値

$$G(\omega) = \frac{V_P(\omega)}{F_S(\omega)}$$

$$G(\omega) = M(\omega)C(\omega)A(\omega)$$

$V_P(\omega)$: テスト信号挿入前の信号

$F_S(\omega)$: フィードバック信号

$C(\omega)$: 制御フィルターの伝達関数

・フィードバック制御

$A(\omega)$ - アクチュエーターの伝達関数

電気信号を物理的な変位に変換する

例:Piezo素子の応答特性

単位:[m/V](メートル/ボルト)

$$M(\omega)A(\omega) = \frac{E_S(\omega)}{F_S(\omega)}$$

$E_S(\omega)$: 誤差信号

$F_S(\omega)$: フィードバック信号

・フィードバック制御

その他式の説明1

入力外乱 X_n とフィードバック信号の関係式

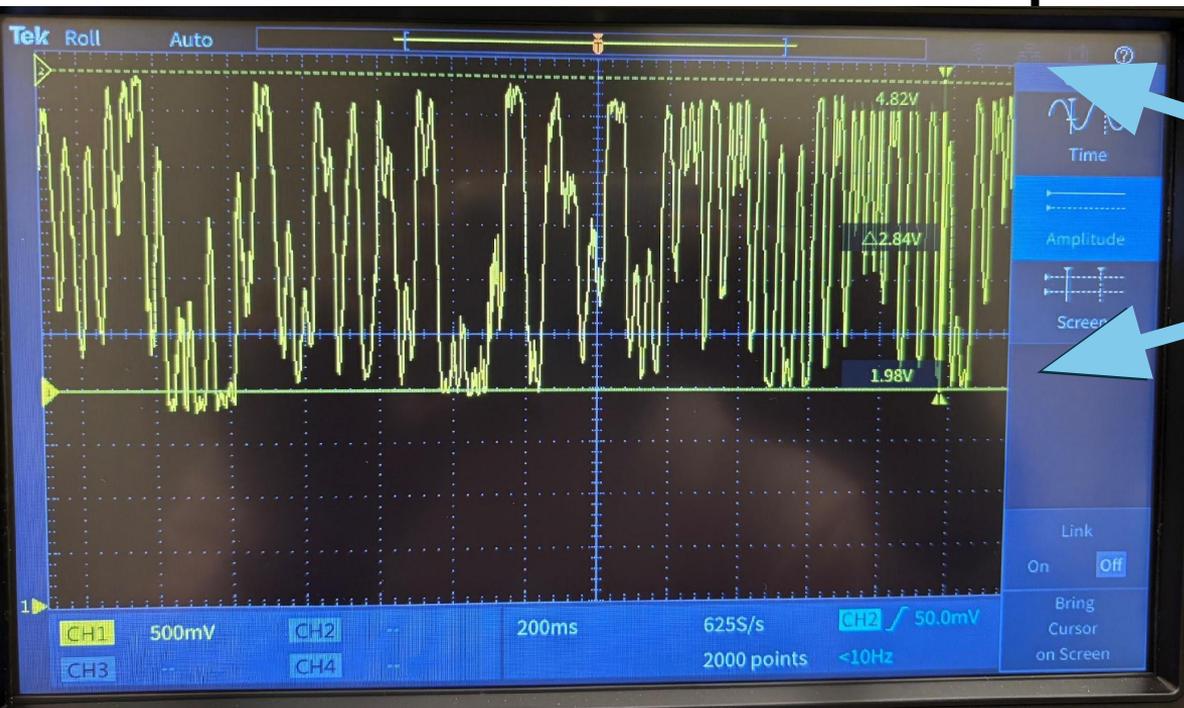
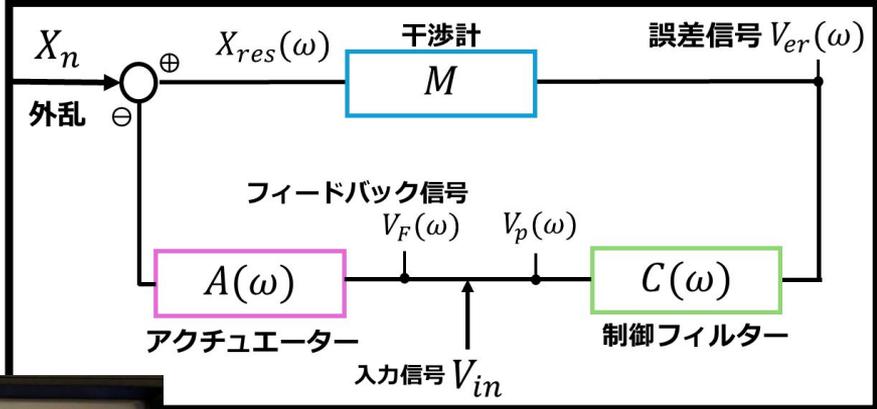
$$X_n = \frac{1 + G}{G} AF_s$$

$$X_n \approx AF_s \quad (G \gg 1)$$

測定結果

装置の特性の測定

コントラスト C の測定 (V_{er} を測定)



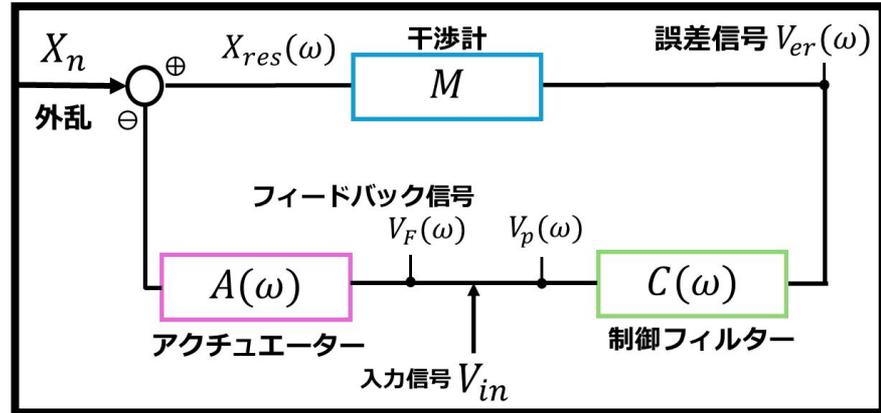
$$V_{max} = 5.16 \text{ V}$$

$$V_{min} = 0.240 \text{ V}$$

$$V_0 = V_{max} + V_{min} = 5.40 \text{ V}$$

$$C = \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max} + V_{min}} \times 100 = 91.1 \%$$

干渉計の伝達関数 M の測定



M の定義

$$\frac{dV_{er}}{dx_{res}} = \frac{CV_0}{2} \frac{4\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{4\pi\Delta L}{\lambda}\right) = M \sim \frac{CV_0}{2} \frac{4\pi}{\lambda}$$

測定したコントラスト c を代入して求める

$$C = 91.1 \%$$

$$V_0 = 5.40 \text{ V}$$

$$\lambda = 632.8 \text{ nm}$$



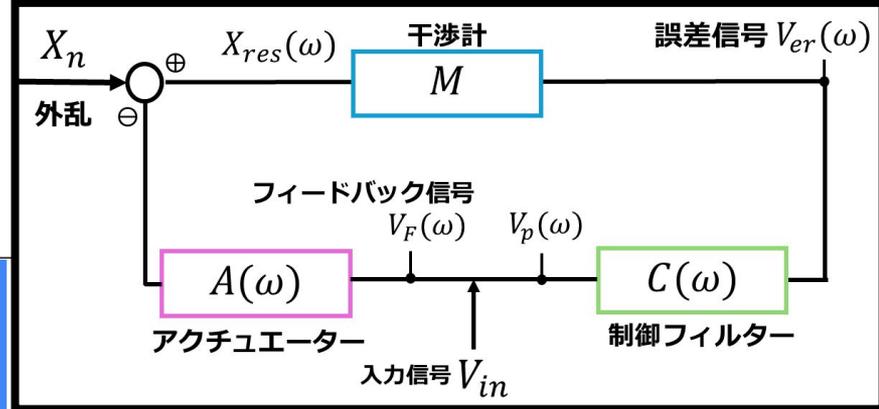
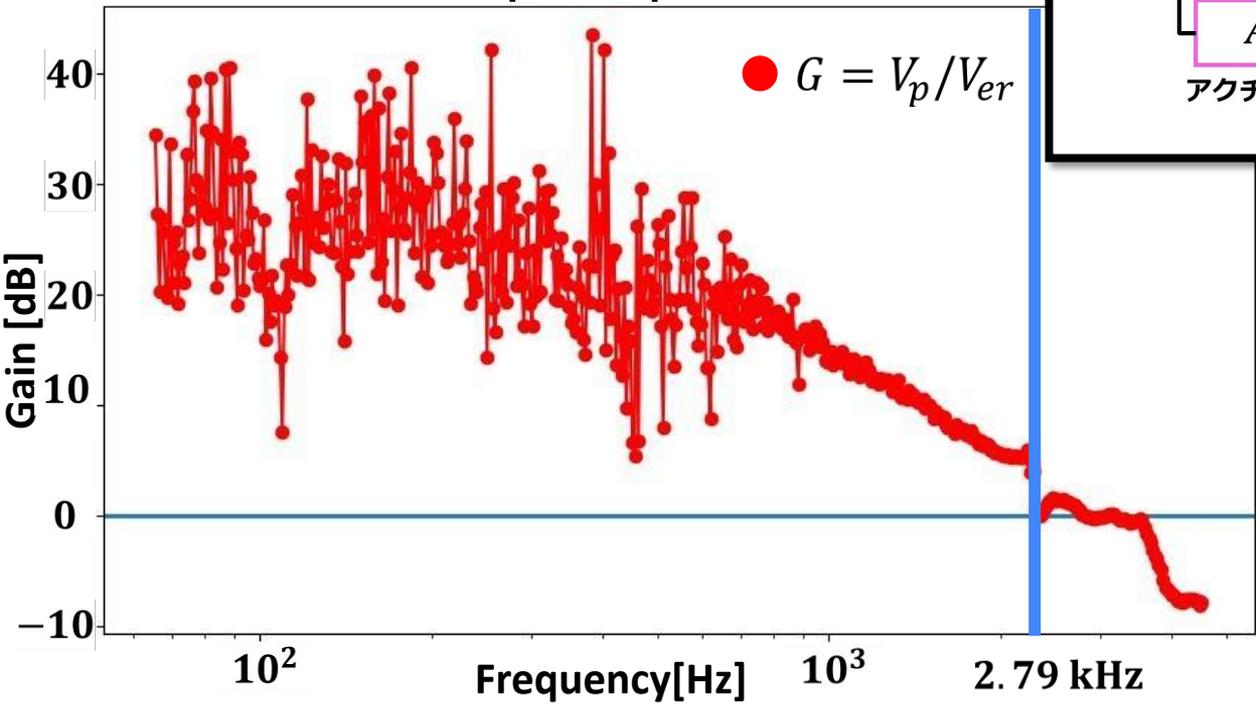
$$M = 4.88 \times 10^7 \text{ V/m}$$

M : 光路差(距離) x_{res} を誤差信号(電圧) V_{er} に変える係数($V_{er} = Mx_{res}$)

$G(= M \times C \times A)$ の測定

V_p と V_{er} の比を測定

Open loop transfer

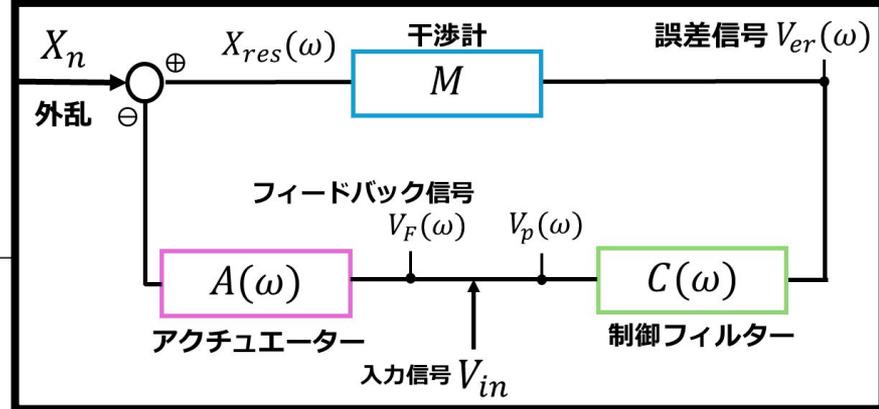
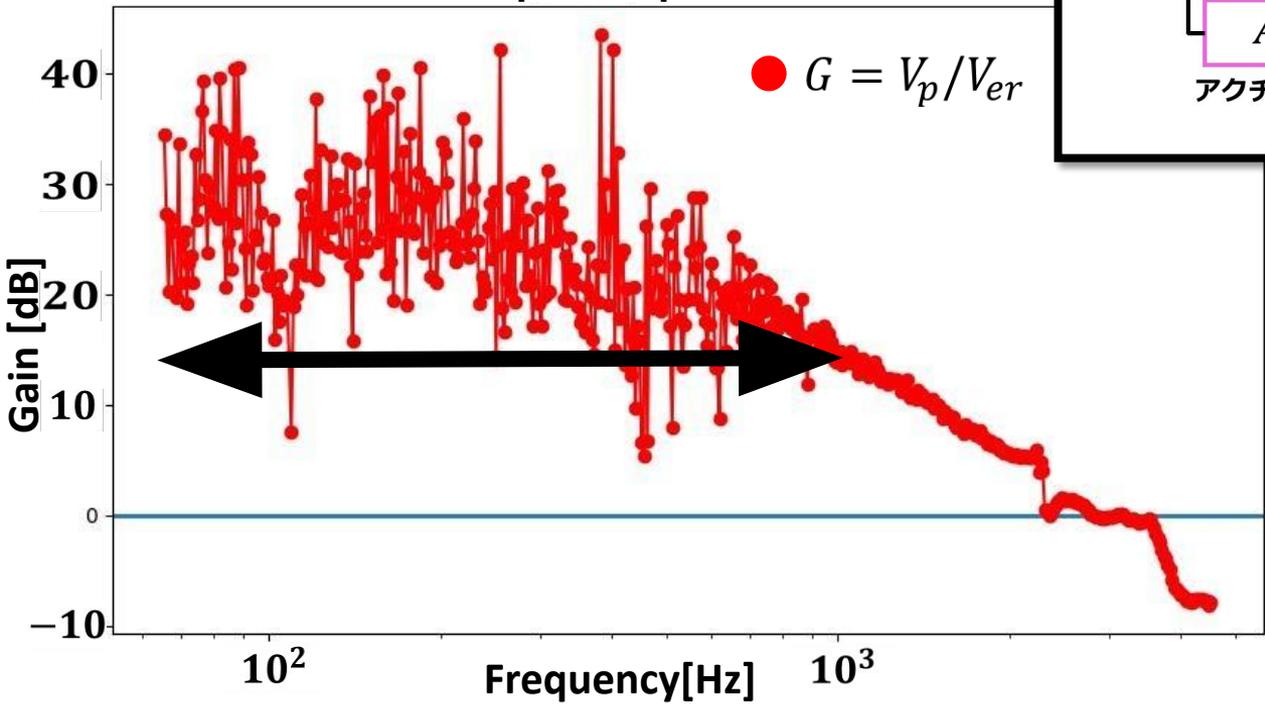


$$Gain = 20 \log(G(\omega)) = 20 \log(V_p/V_{er})$$

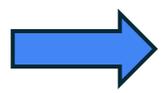
$G(= M \times C \times A)$ の測定

V_p と V_{er} の比を測定

Open loop transfer



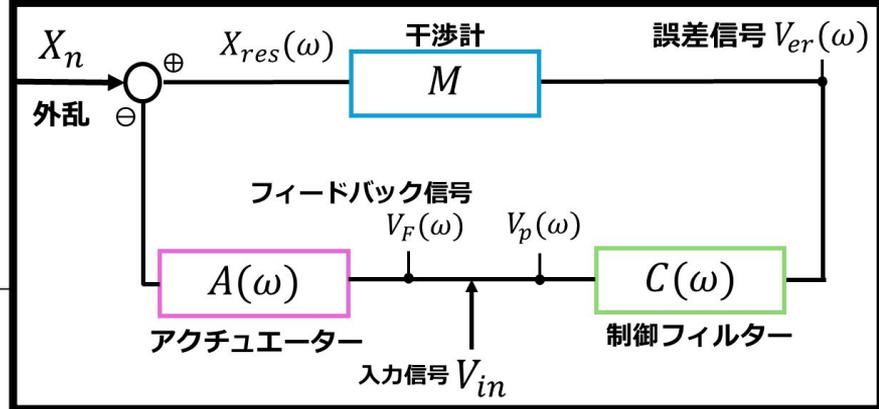
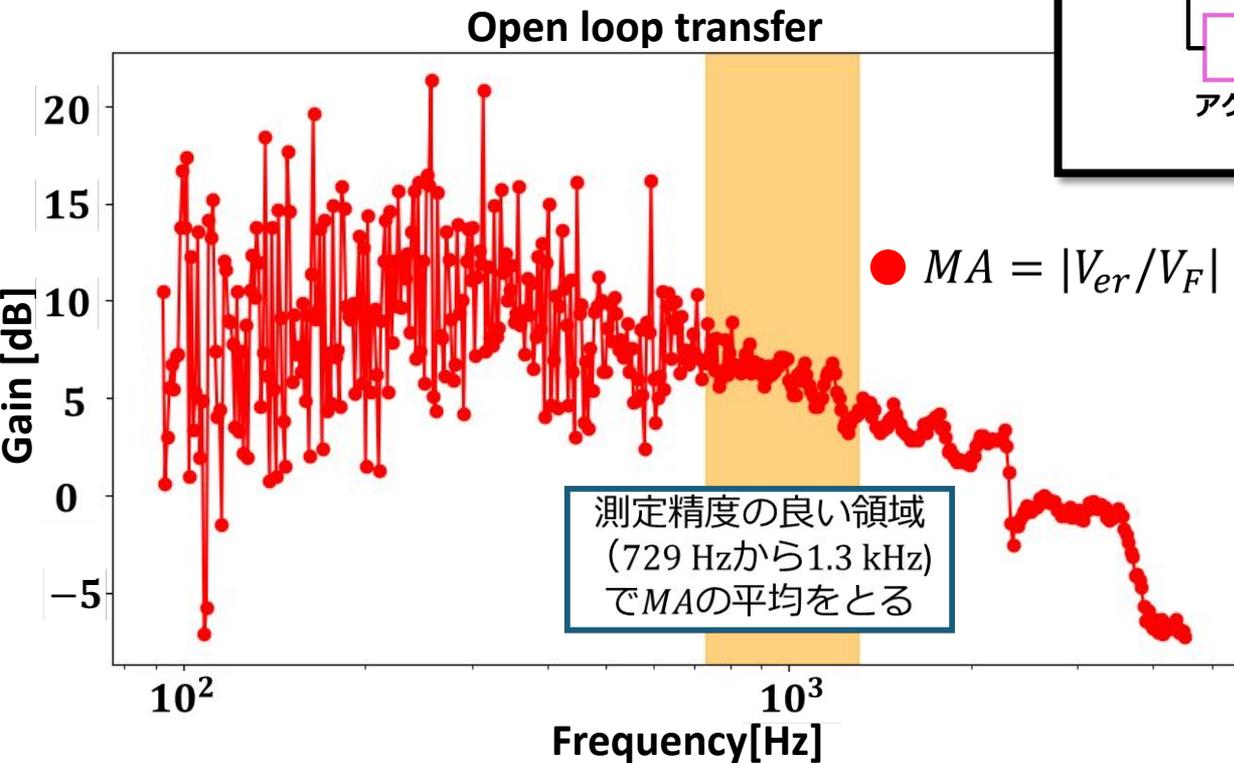
重力波が観測される $f < 10^3$ Hz で G が十分大きい



$$\frac{X_n}{V_F} = \frac{1+G}{G} A \sim A \text{ の近似が成立}$$

Aの測定

V_F と V_{er} の比を測定



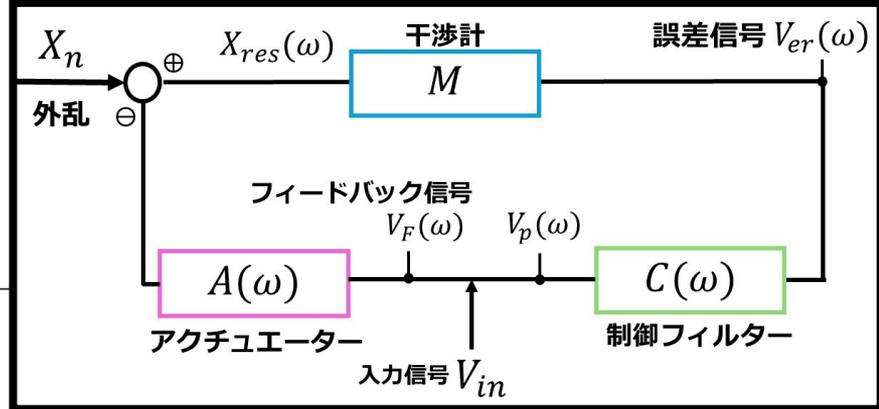
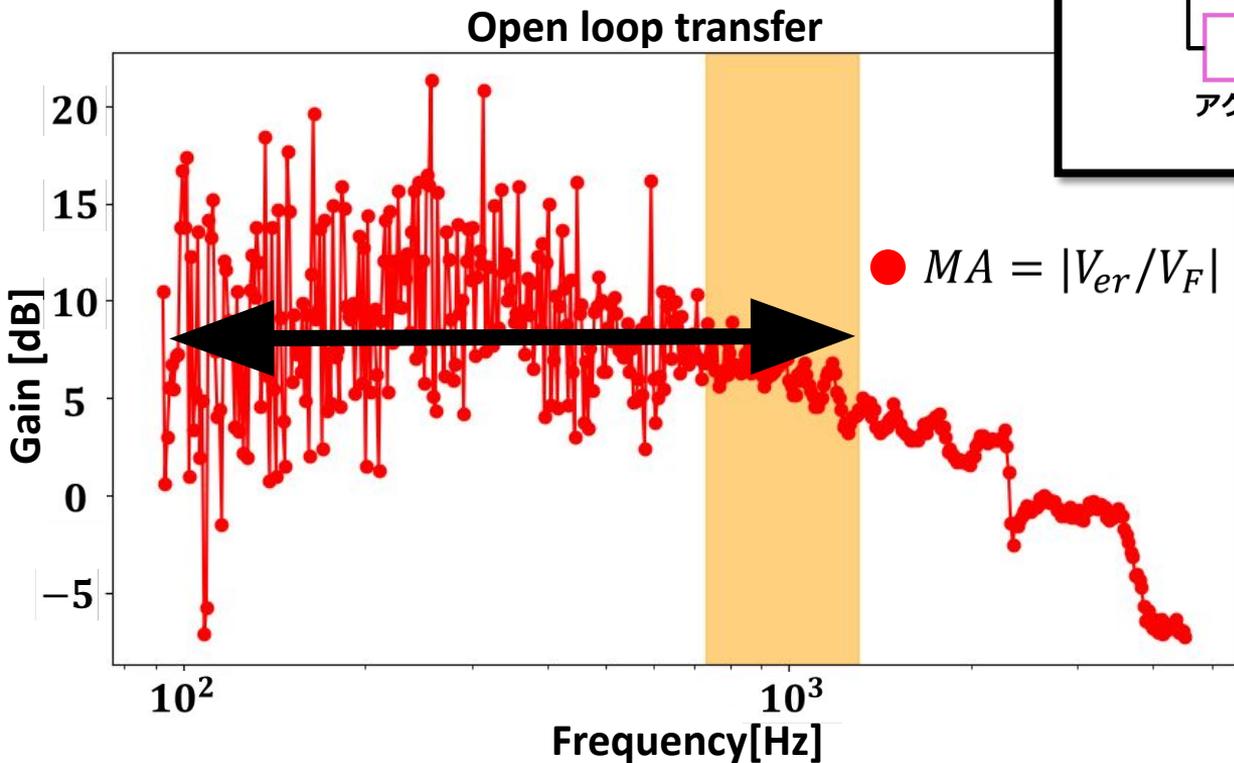
平均値 $MA_{\text{mean}} = 2.04$
 $M = 4.88 \times 10^7 \text{ V/m (定数)}$



$A = 3.80 \times 10^{-8} \text{ m/V}$

Aの測定

V_F と V_{er} の比を測定

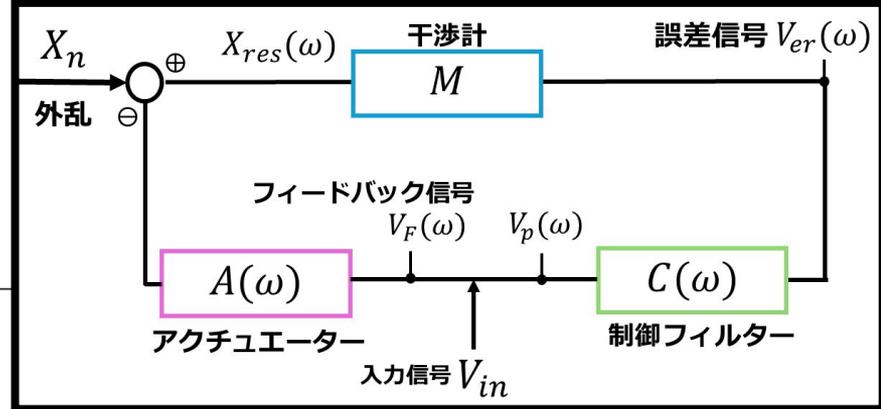
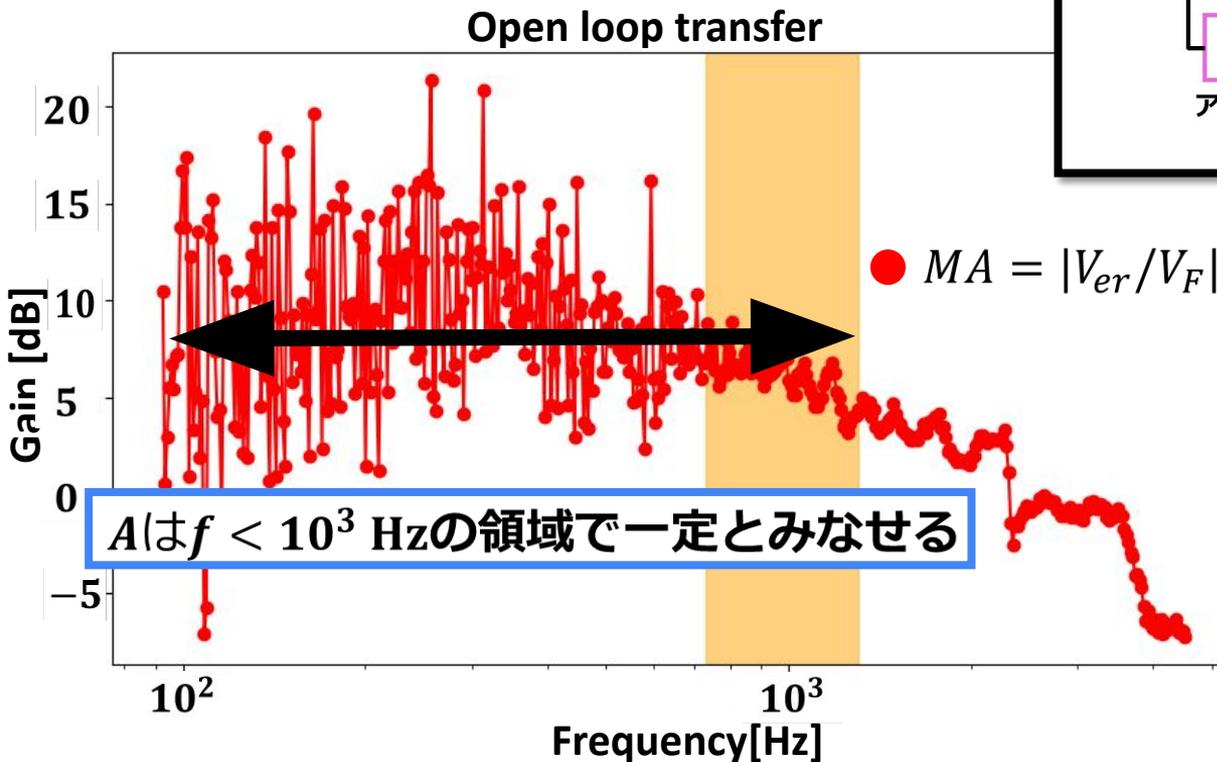


平均値 $MA_{\text{mean}} = 2.04$
 $M = 4.88 \times 10^7 \text{ V/m (定数)}$

$A = 3.80 \times 10^{-8} \text{ m/V}$

Aの測定

V_F と V_{er} の比を測定



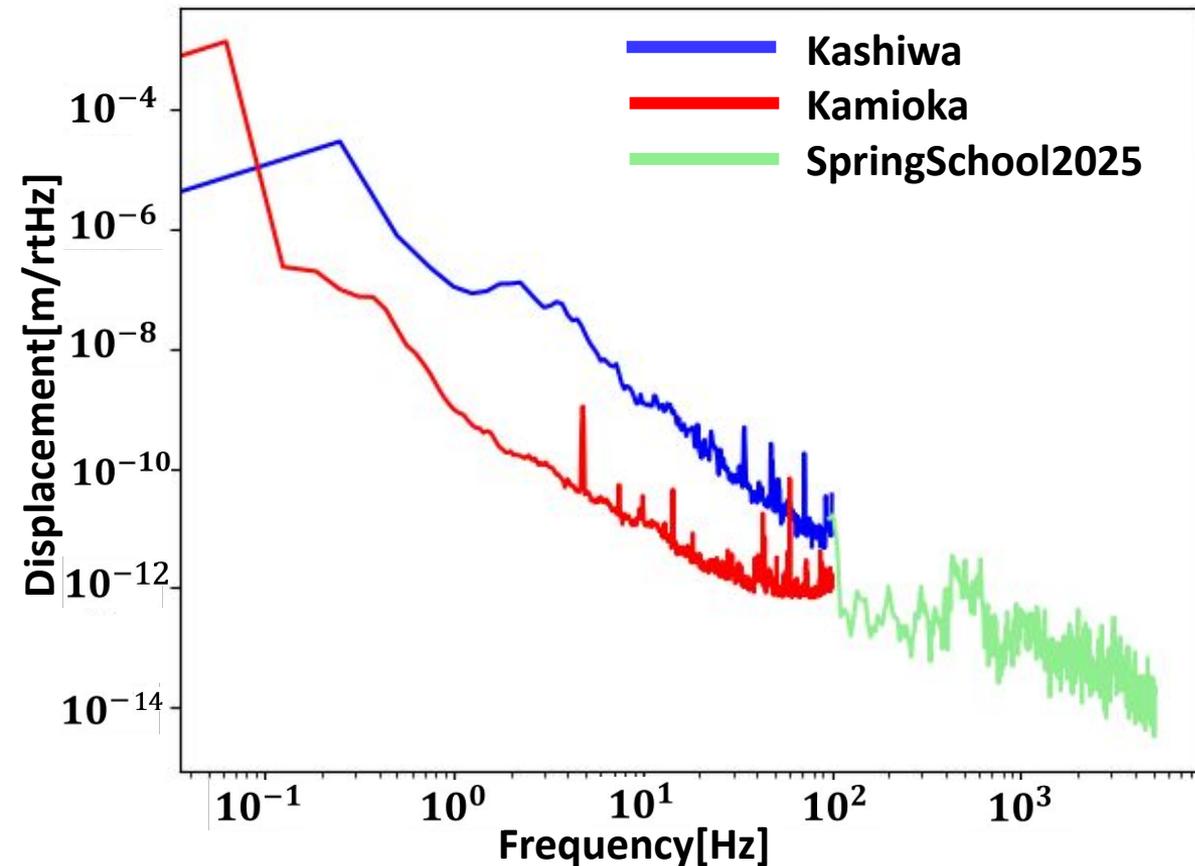
平均値 $MA_{\text{mean}} = 2.04$
 $M = 4.88 \times 10^7$ V/m (定数)

$A = 3.80 \times 10^{-8}$ m/V

以降の解析では定数として扱う

フィードバック制御中の変位感度

フィードバック制御でどれくらいノイズが抑えられているか？



測定周波数帯が異なるので
単純な比較はできないものの
柏、神岡よりも変位感度が高い



実験室(地下1階)は
重力波検出に適した環境

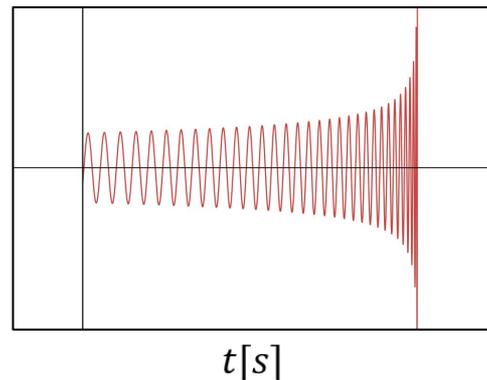
解析

解析

重力波をきちんと検出できるかを確認するために、

重力波を模した波形の電気信号を素子に流した(20秒)

$h_{\text{Volt}}(t)$



$$h_{\text{Volt}}(t) = \text{AmpVolt} \left(\frac{t_c - t}{M_c} \right)^{-1/4} \cos \left[2\phi_c - 1518.423 \left(\frac{t_c - t}{M_c} \right)^{5/8} \right]$$

$$M_c = (M_1 + M_2)^{3/5} / (M_1 M_2)^{1/5} = 10 M_{\odot}, \phi_c = 0, t_c = 340 \text{ s}, \text{AmpVolt} = 10^{-5} - 10^{-1}$$

→ 重力波データを取得(6分)

振幅を1,10,10²,10³,10⁴ 倍にして5
回測定

解析手法

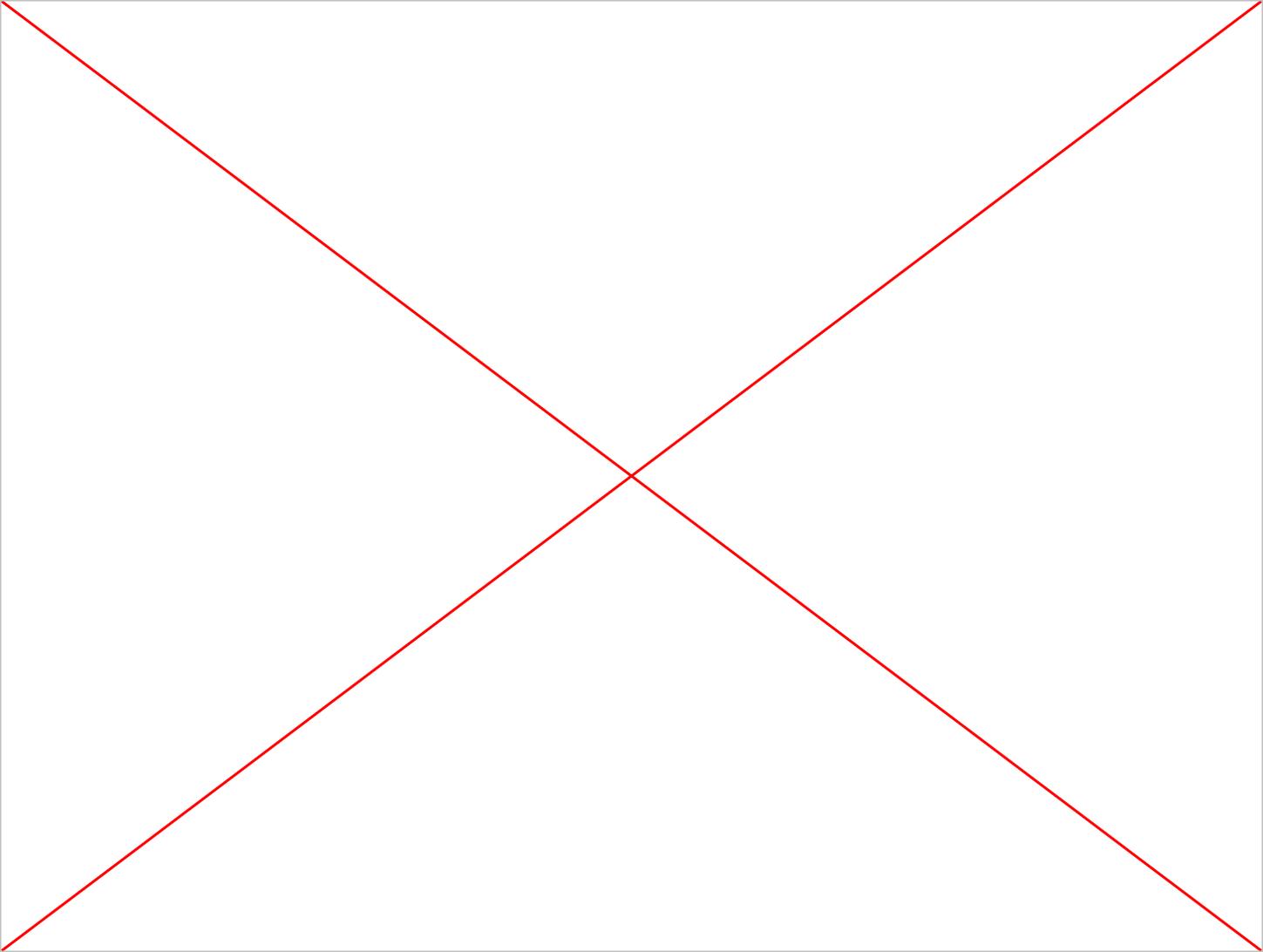
① Matched Filter

重力波の信号はノイズに埋もれて目視で確認できない

→重力波の波形をモデル化して(※)、そのテンプレートと取得データの相関を見る

※ 本来は連星の各質量を少しずつ変えて試す

(今回は既知 ($M_1 = 11.5M_\odot$, $M_2 = 1.5M_\odot$)



解析手法

① Matched Filter

ノイズでも、たまに大きく反応してしまうことがある(ノイズが大きいときなど)

→ 反応した「トリガー」で 検定 χ^2 を行って、重みづけを行う

テンプレート波形とトリガーの一致が良ければ $\chi^2 \simeq 1$

テンプレート波形とトリガーの一致が良くないと χ^2 重みづけで減らす

解析手法

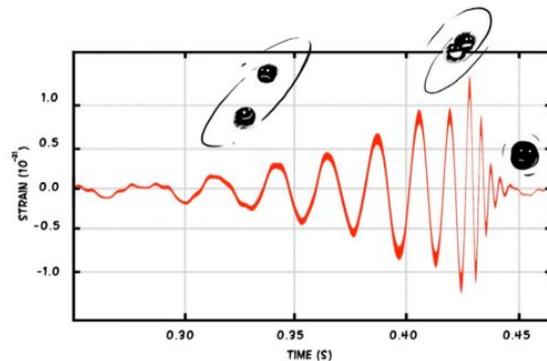
②時間-周波数マップ

重力波信号とノイズを視覚的に識別したい

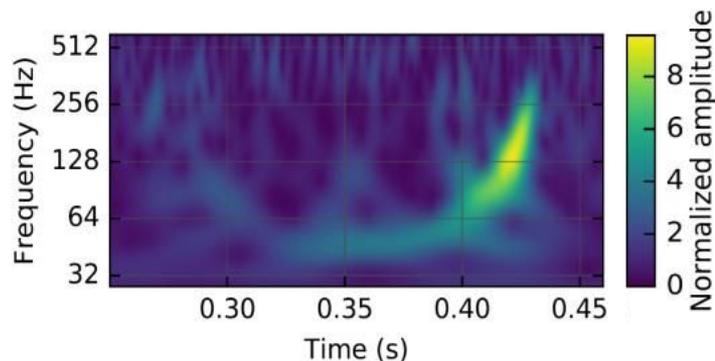
→ 時間-周波数マップを用いて、重力波データの周波数変化を可視化

連星が近づくとつれ、周波数が増加

→ 時間Tが増えると周波数Fも増えていく挙動に



[http://ligo.org/magazine/issue 8 3/2016](http://ligo.org/magazine/issue%208%203/2016) (2025-03-07)

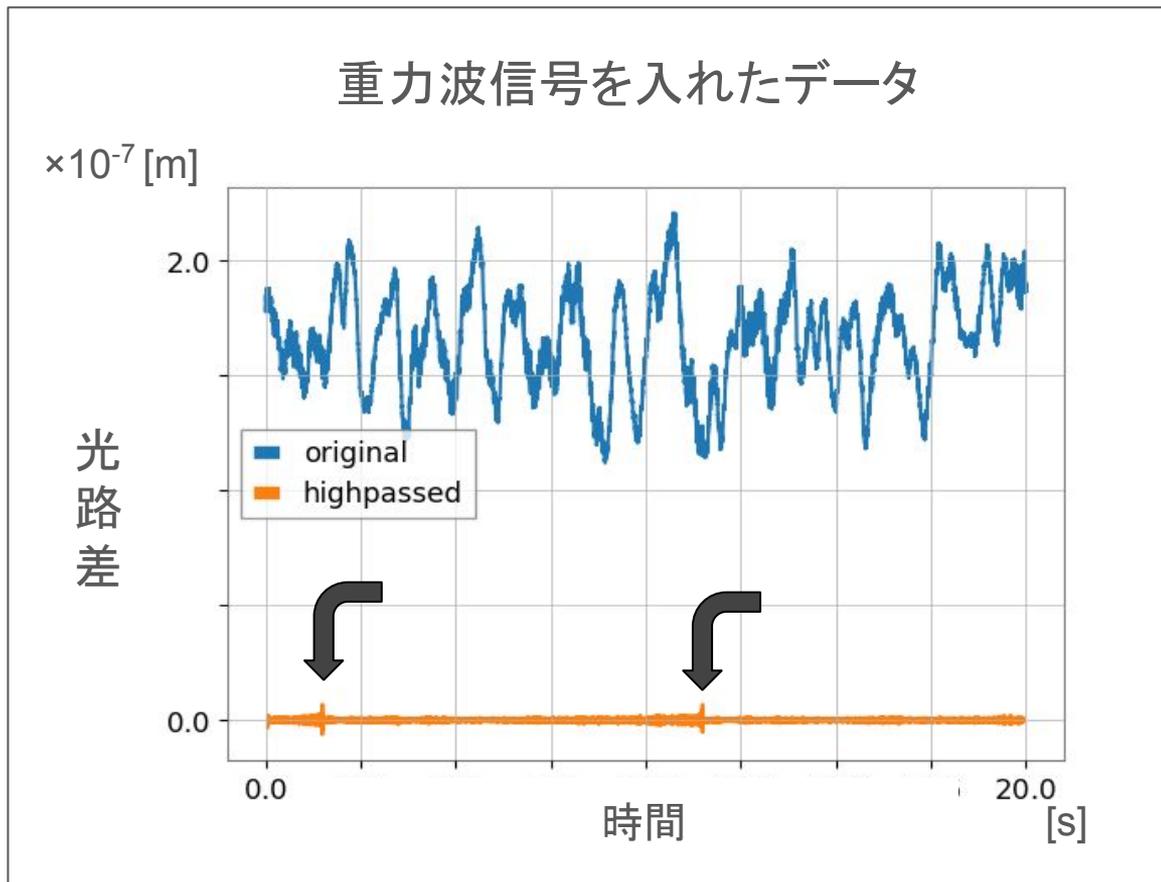


<https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20171016>
(参照2025-03-06)

解析

1.5秒,11.5秒にピーク

これが上記の方法で
検出できるか確かめる



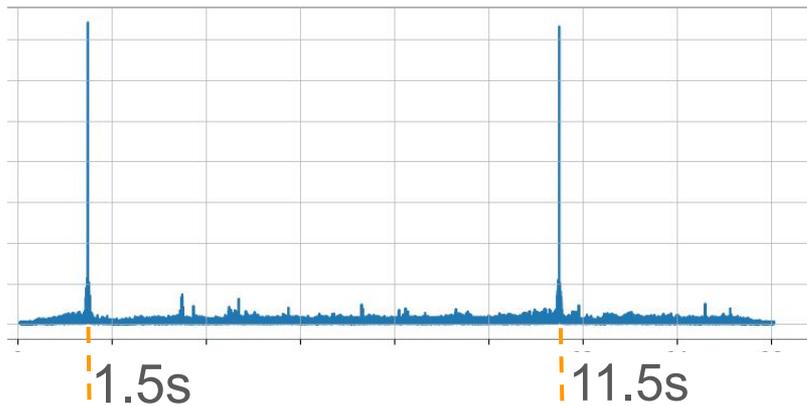
(振幅10³倍のデータ)

解析

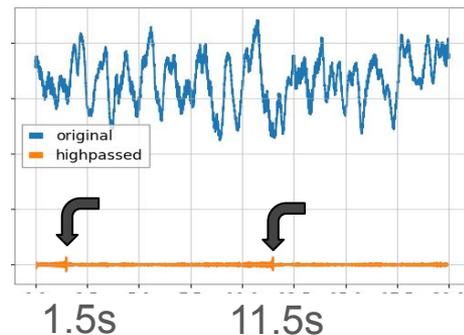
重力波を模した波の検出に成功

Matched Filter

信号
ノイズ比

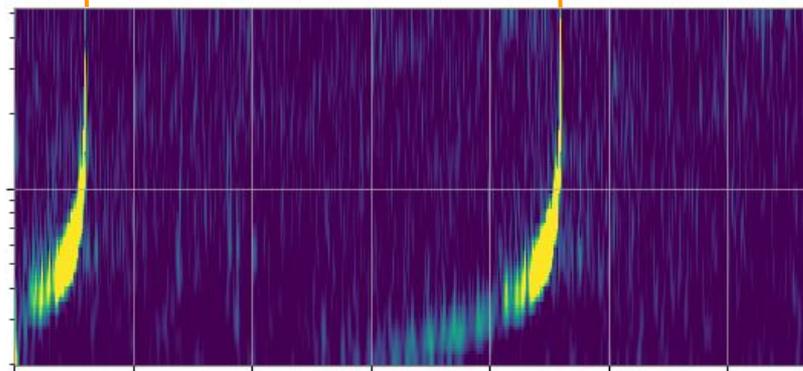


時間



時間-周波数マップ

周波数



時間

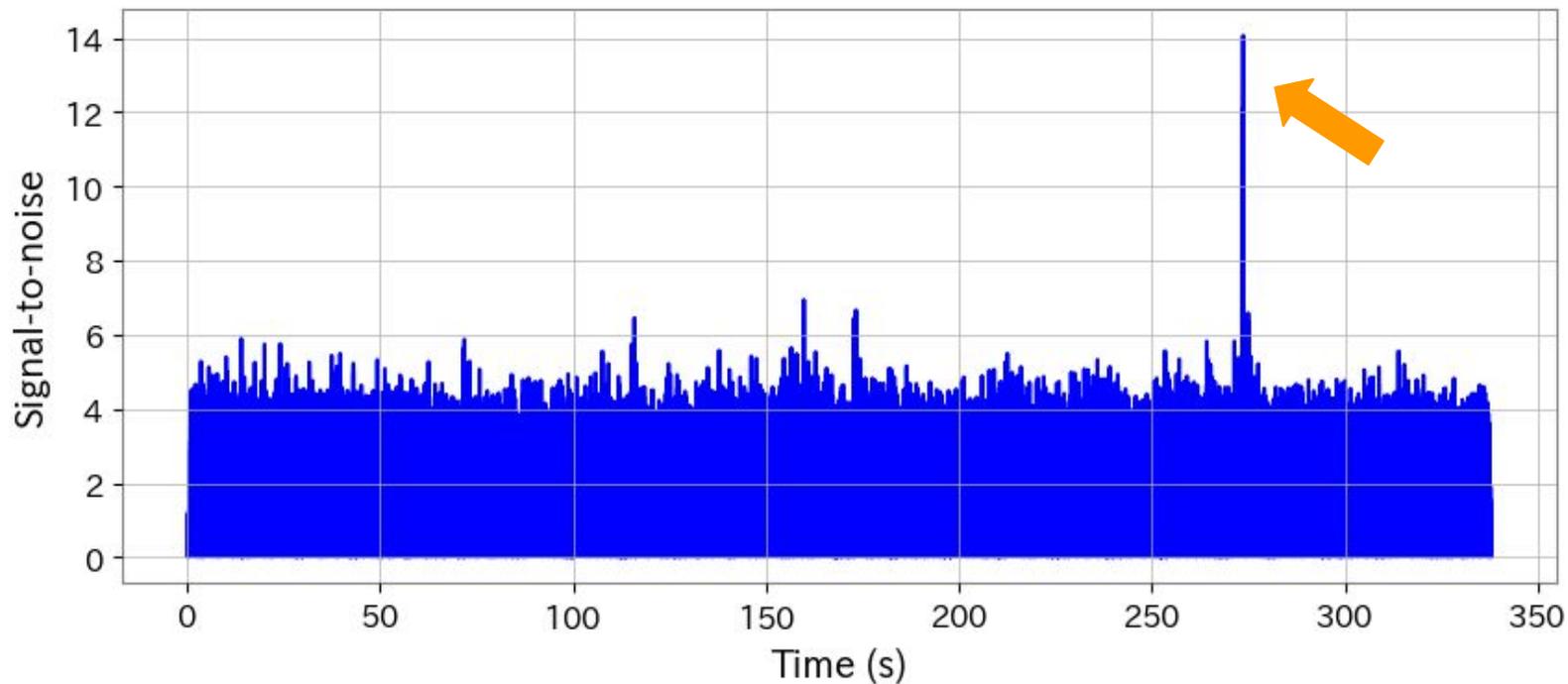
(振幅1000倍のデータ)

結果、考察

結果

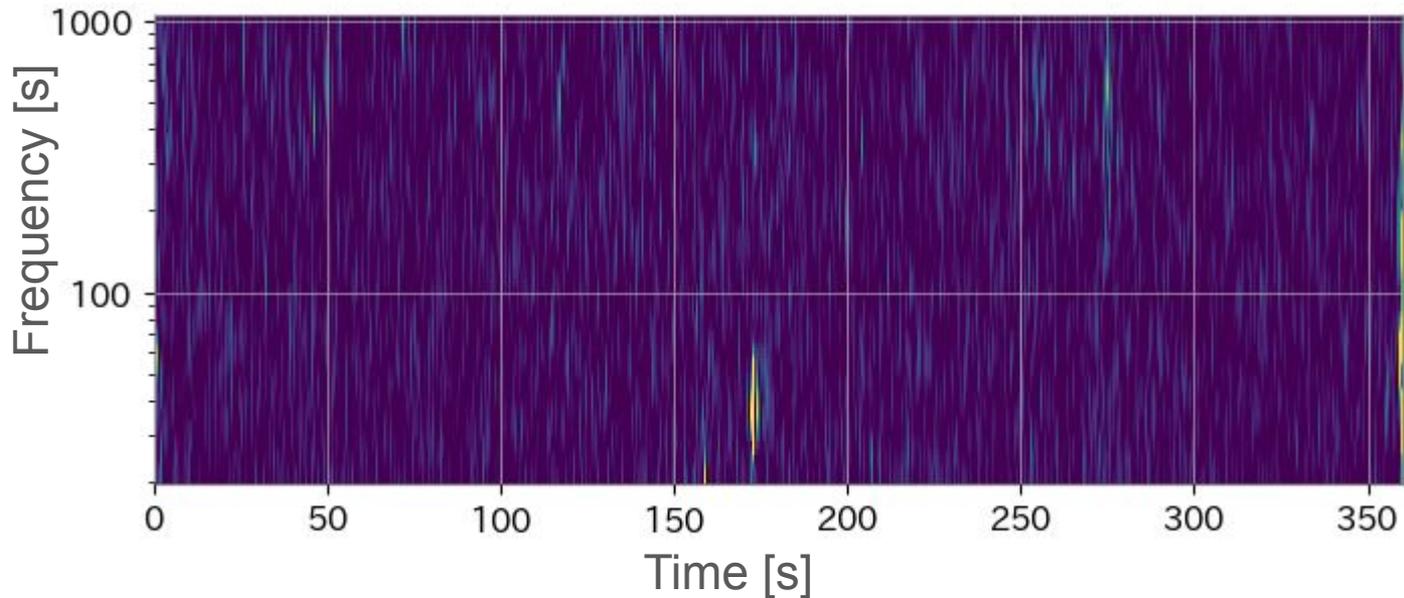
6分間のデータに重力波信号が含まれていたかを確認する。

Matched Filter

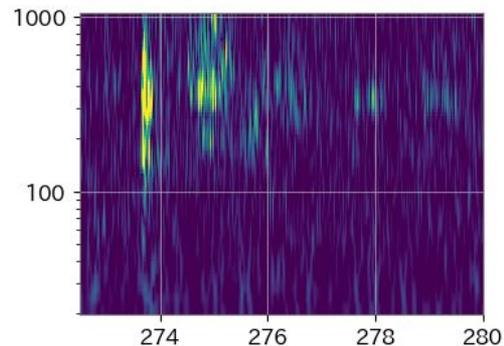


結果

時間-周波数マップ



拡大図



時間-周波数マップも立ち上がりは見られず、Matched Filterの検定でも弾かれていた($\sim \chi^2 > 1$)

↓
ただの高周波ノイズと判断、重力波は観測されなかった

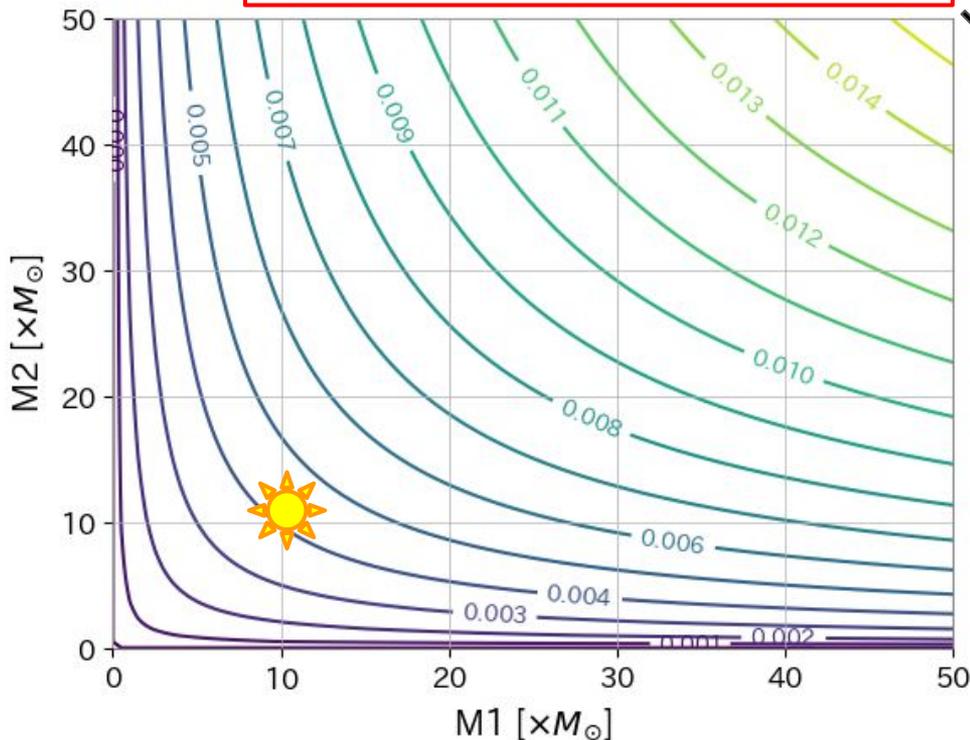
考察

- 逆に、
 - 宇宙のどの範囲で重力波がなかったといえるのか
 - どれくらいの強さの重力波が到来したらこのセッティングで重力波を観測できるのか

を見ていく

考察

天体の重さと、合体の際の重力波が観測できる上限の距離[pc]の関係



$$d_H = \frac{G^{5/6} M^{1/3} \mu^{1/2}}{c^{3/2} \pi^{2/3} \rho} \sqrt{\frac{5}{6} \int_{f_1}^{f_2} \frac{f^{-7/3}}{S(f)} df}$$

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$$

$S(f)$ = 周波数ごとのノイズの強さ

今回の波形のテンプレートに

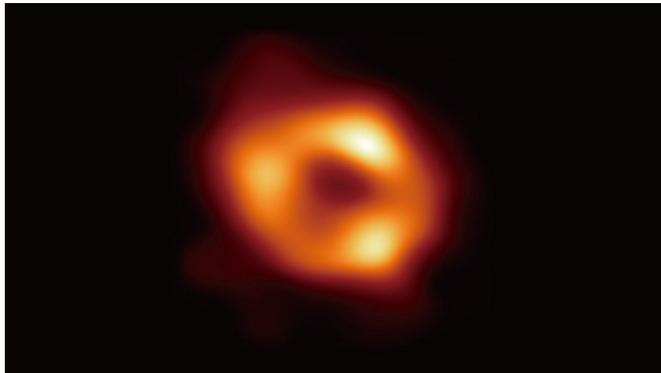
用いた条件  $M_1 = 11.5 M_\odot$, M_2 ではなく $5 M_\odot$

約 $0.004 \text{ pc} = 825 \text{ au}$ 以内での合体であれば重力波を検知できる

考察

天の川銀河とアンドロメダ銀河は近いうち(40億年後)に衝突する

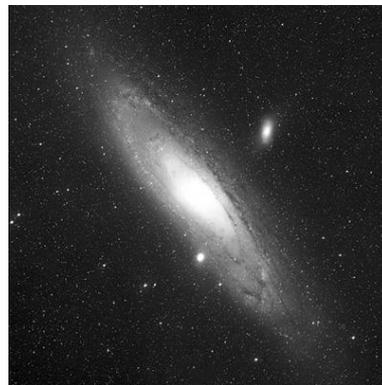
その時の銀河中心のブラックホール同士が合体したら、どれくらいの距離に検出器を置けば重力波を検出できる？



2年前に初観測された
天の川銀河中心ブラックホール

$$M = 4 \times 10^6 M_{\odot}$$

<https://www.nao.ac.jp/news/science/2022/20220512-eh.html>



<https://www.isas.jaxa.jp/j/column/famous/15.shtml>

アンドロメダ銀河中心ブラックホール

$$M \simeq 1 \times 10^8 M_{\odot}$$

<https://pubs.aip.org/aip/acp/article/2290/1/050050/1003183/Determine-the-mass-of-supermassive-black-hole-in>

考察

- ・先ほどの計算を行うと、616 pc (\sim 2009光年)の距離であれば合体の重力波を検出できる。
- ・地球から天の川銀河の銀河中心までの距離は約2万7000光年^[1]。
- ・現在の10倍ほど銀河中心に近づけば、重力波の振幅が今回のセッティングで検出できるようになる。

(ただし、周波数は合体0.1s前でも0.12Hz, 検出器の感度帯には入らない)

[1]:<https://www.nao.ac.jp/news/science/2022/20220512-eht.html>

まとめ

- ・腕の長さ 42 cm のレーザー干渉計を作成し、動作と検出効率を確認した
- ・6分間測定したところ、ノイズに埋もれない(振幅 3×10^{-9} m 以上の)信号は検出されなかった
 - 825 au 以内で11.5M 同士の連星合体による重力波は生じていないことがわかった