



宇宙・素粒子スプリングスクール2024

重力波天文学

Member: 高島、中村、Wimmer、舘岡、中條

Supervisor: 田越先生、森崎先生、成川先生、内潟先生

Supporter: 小林さん

目次

- 1.目的
- 2.原理
- 3.解析方法
- 4.結果
- 5.考察
- 6.まとめ

1. 目的

1 目的

LIGOで観測された連星ブラックホール合体から放出された重力波データを使って、減衰振動が始まる時刻を推定する

合体後にできたブラックホール(BH)の質量とスピンを求める

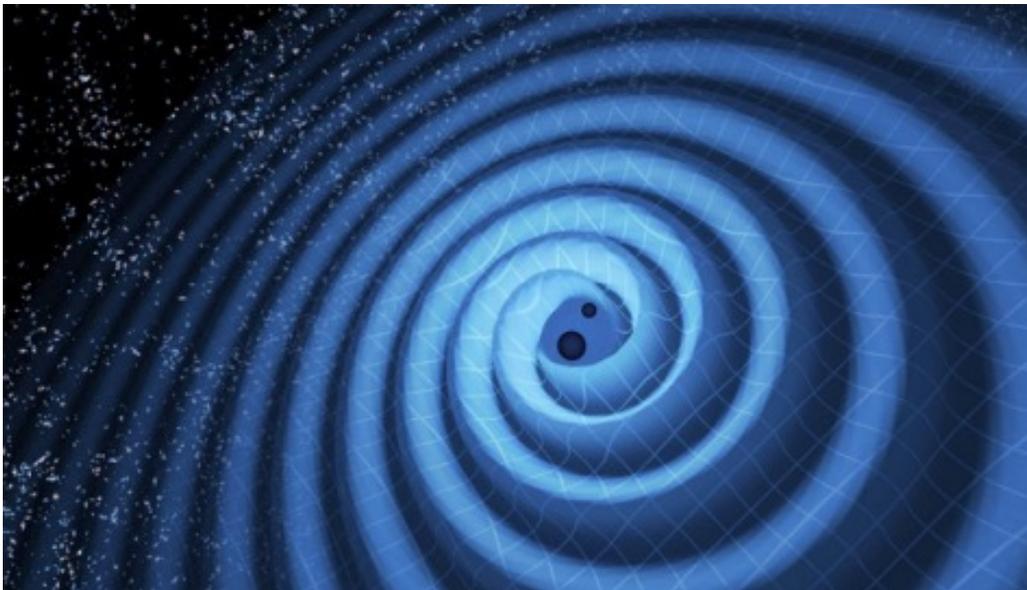
統計誤差を含めて質量とスピンのデータを参考値と比較する

2. 原理

2.1 重力波とは

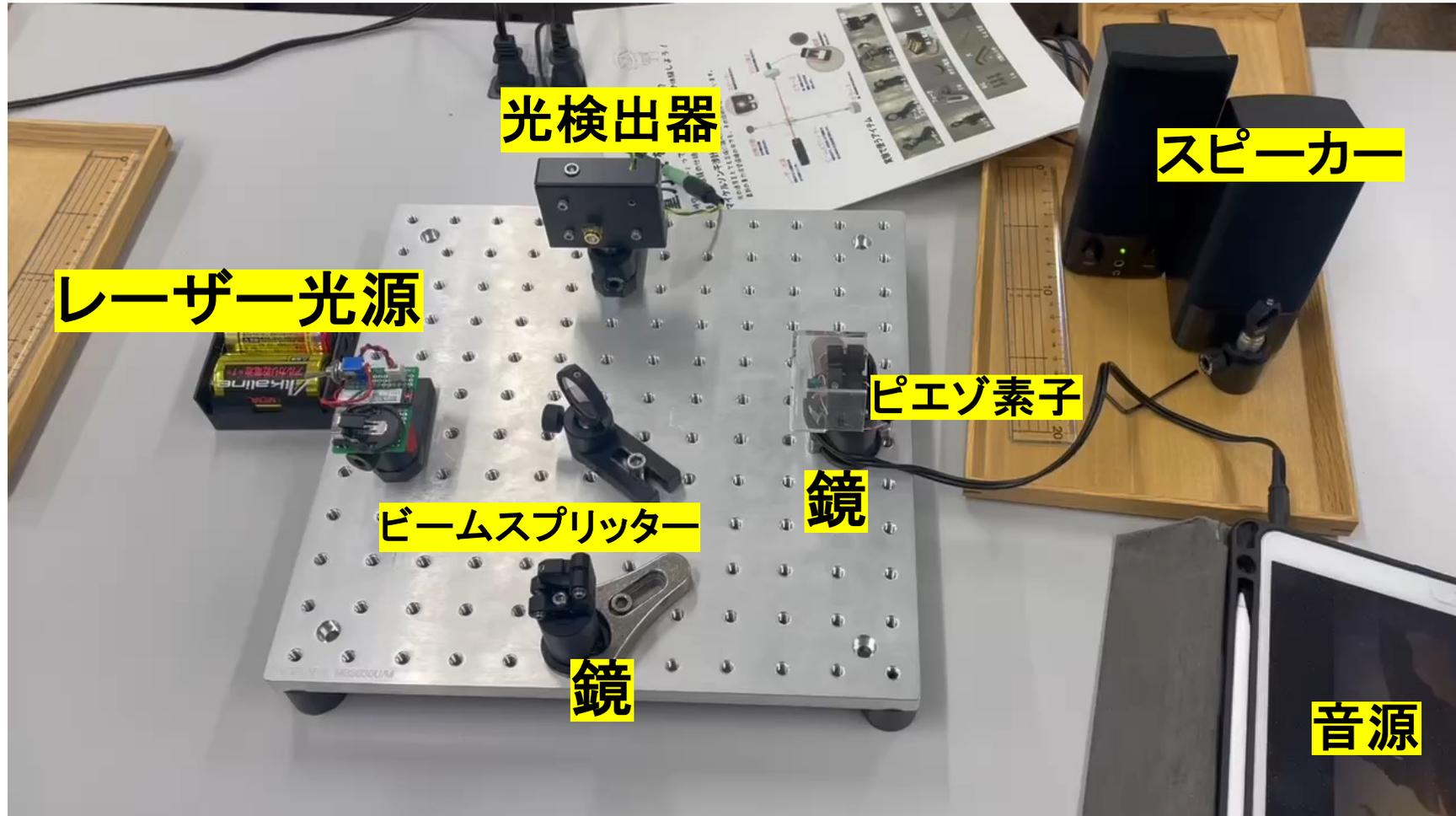
- ▶ 時空のゆがみが波として光速で伝搬する現象

例) ブラックホールや中性子星などの重い天体の連星が合体するとき

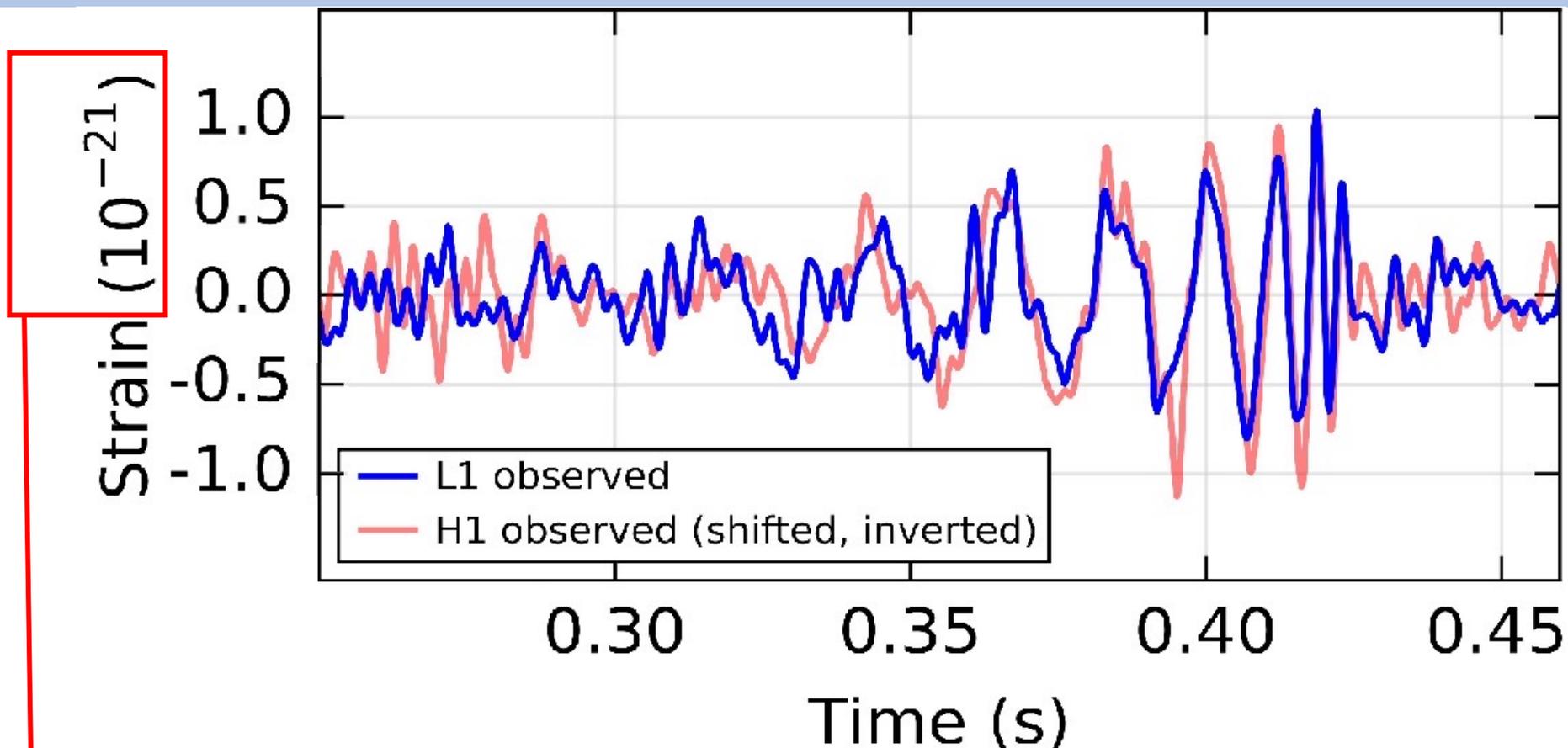


1916年, アインシュタインが一般相対論で重力波を持つことを式として示した

2.3 ミニレーザー干渉計



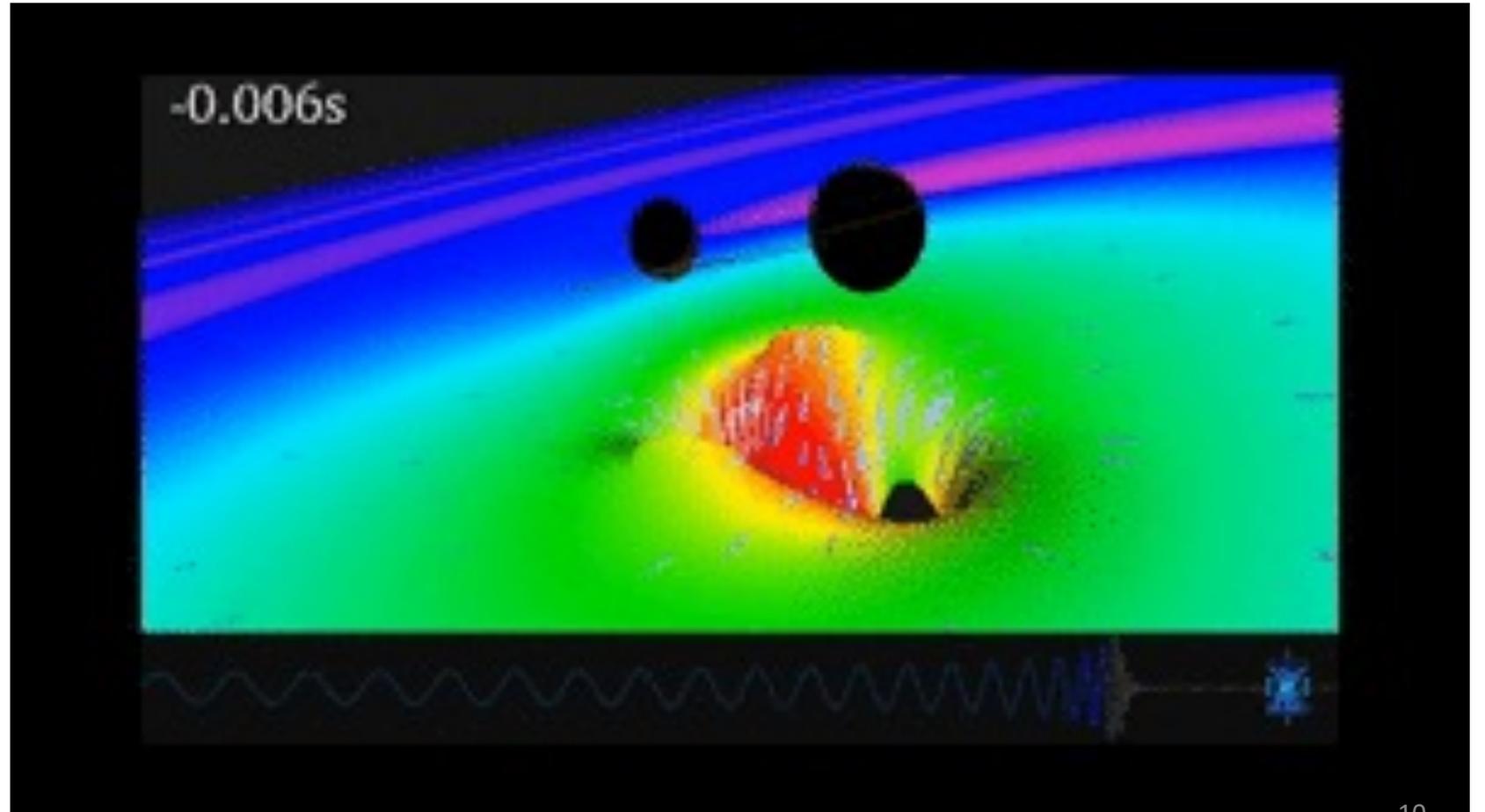
2.4 重力波の初観測(GW150914)



この重力波の振幅は 4kmの腕の長さが、
 4×10^{-18} m 変化する大きさ

2.5 連星BH合体

- 信号の強い重力波源
- 約80個発見



動画: <https://www.ligo.caltech.edu/video/ligo20160211v10>

2.6 BHの準固有振動(QNM)

- どんな物体にも固有振動がある
- BHにも固有振動があるが、時空の振動であるから時間とともに減衰する
→準固有振動(QNM: Quasi Normal Modes)

\vec{n} : 雑音

\vec{d} : 実験データ

\vec{h} : シグナル

$$\vec{d} = \vec{h}(M, a, A, B) + \vec{n}$$

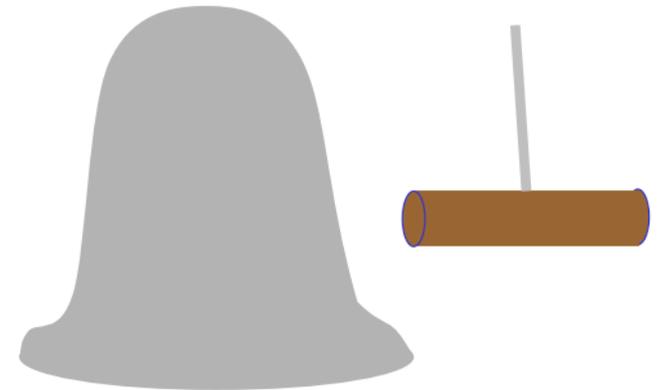
$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft)) \quad (\text{周波数}f, \text{減衰率}\tau)$$



BHの質量・スピンの分かる



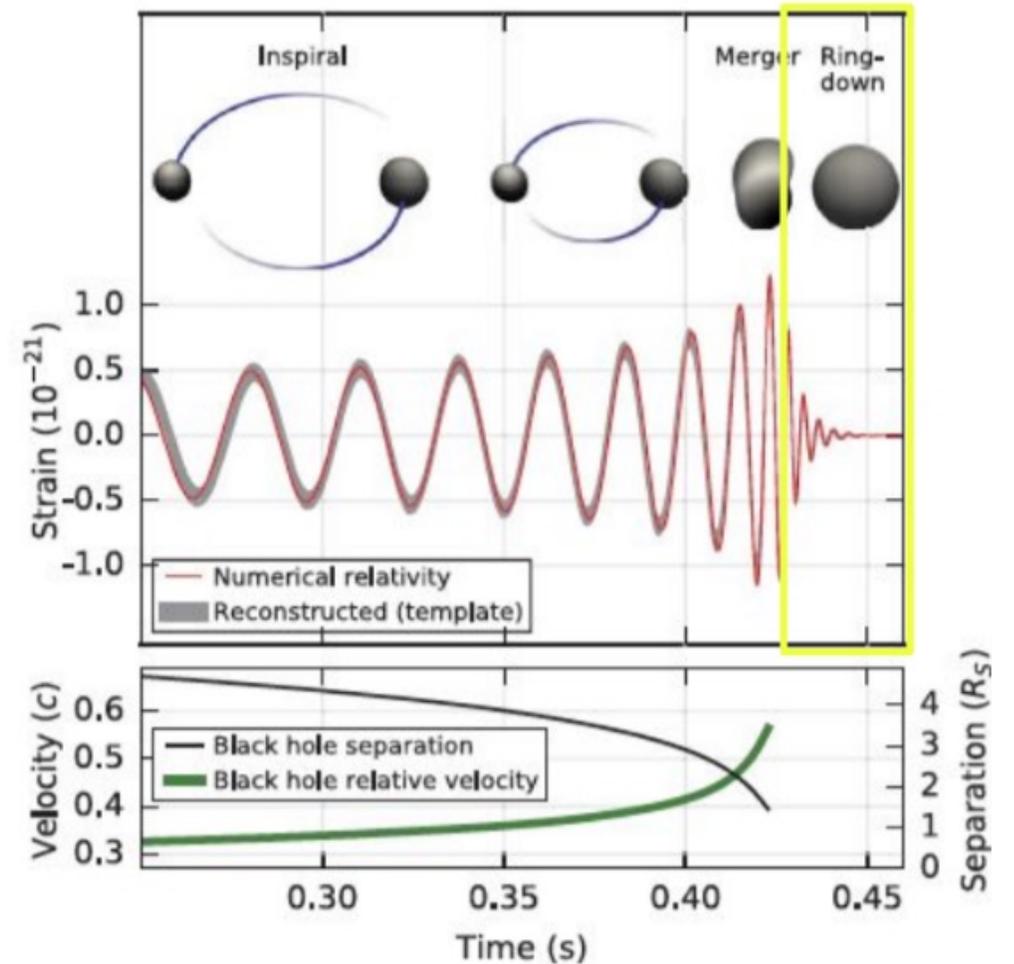
≈



2.8 QNMを検出する

検出が難しい！

- QNMの時間が短い(数ms)
- 振幅最大の時刻 \neq 周波数最大の時刻
- どこからQNMが始まっている？



2.9 理論的にQNMを求める

BH時空の摂動方程式を解く

波動関数 $\Phi = e^{-i\omega t} e^{im\phi} S(\theta) R(r)$

動径方向 $\Delta_r^{-s} \frac{d}{dr} (\Delta_r^{s+1} + \frac{dR(r)}{dr}) + V(r, \omega, \lambda, s) R(r) = 0$

角度方向 $\frac{d}{d\mu} (\Delta_\mu \frac{dS(\mu)}{d\mu}) + W(\mu, \omega, \lambda, s) S(\mu) = 0$

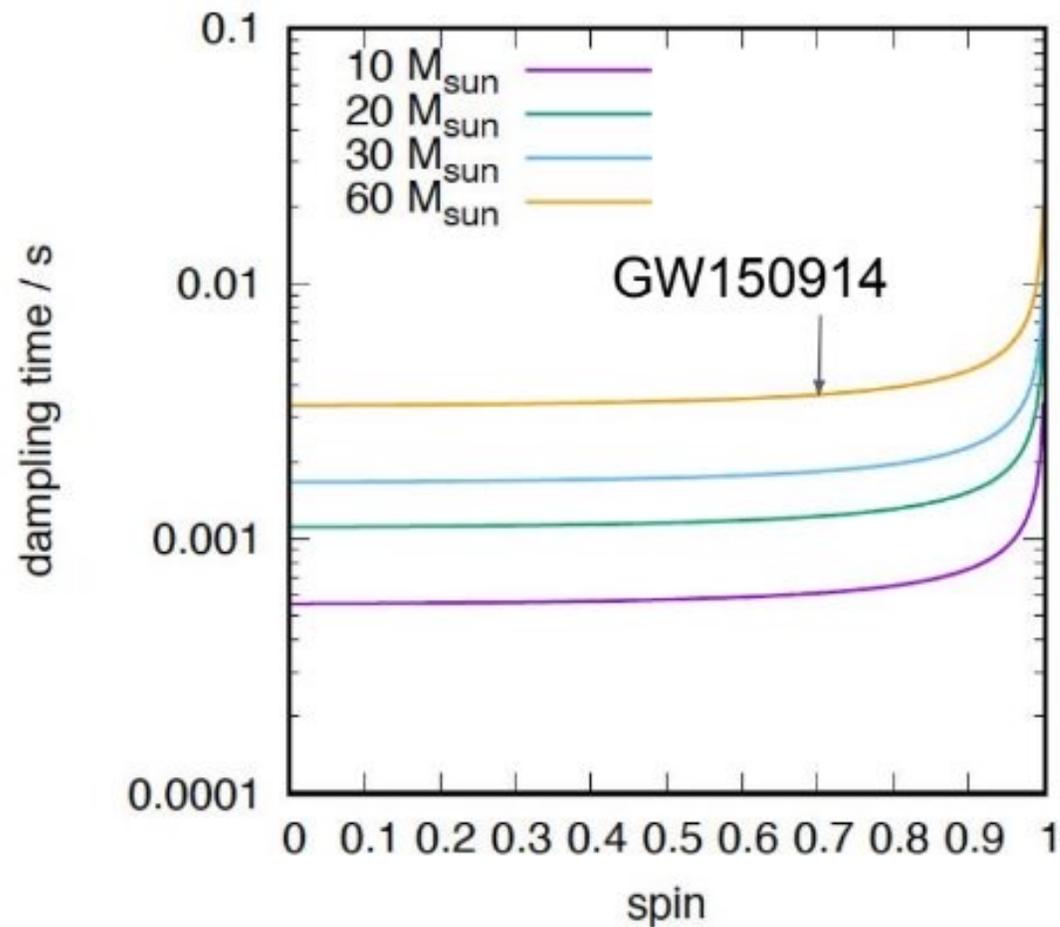
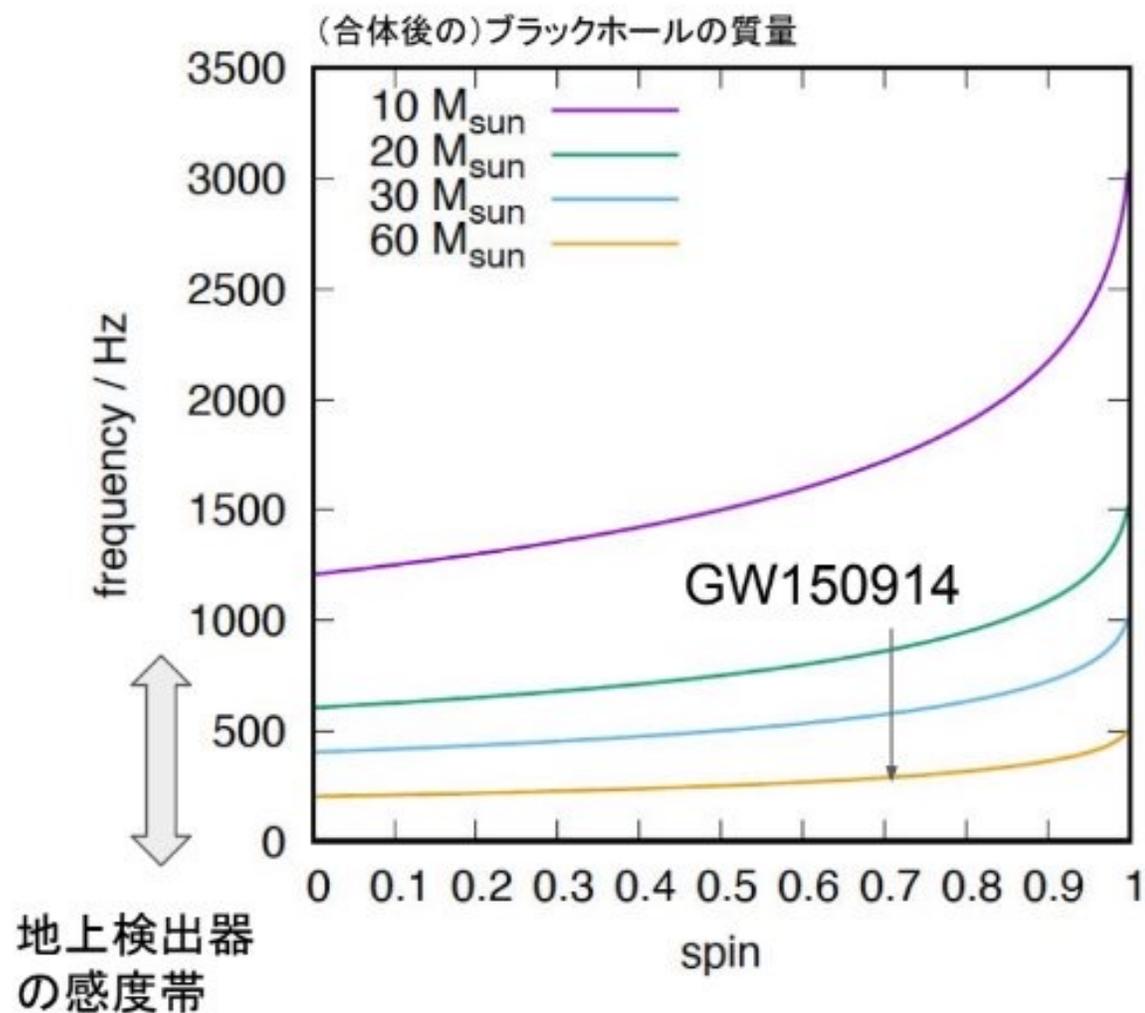
境界条件

BH近傍で内向きの波
無限遠方で外向きの波



BHのQNMの
周波数・減衰率

2.10 QNMと質量・スピンの関係



(credit: Uchikata)

3. 解析方法

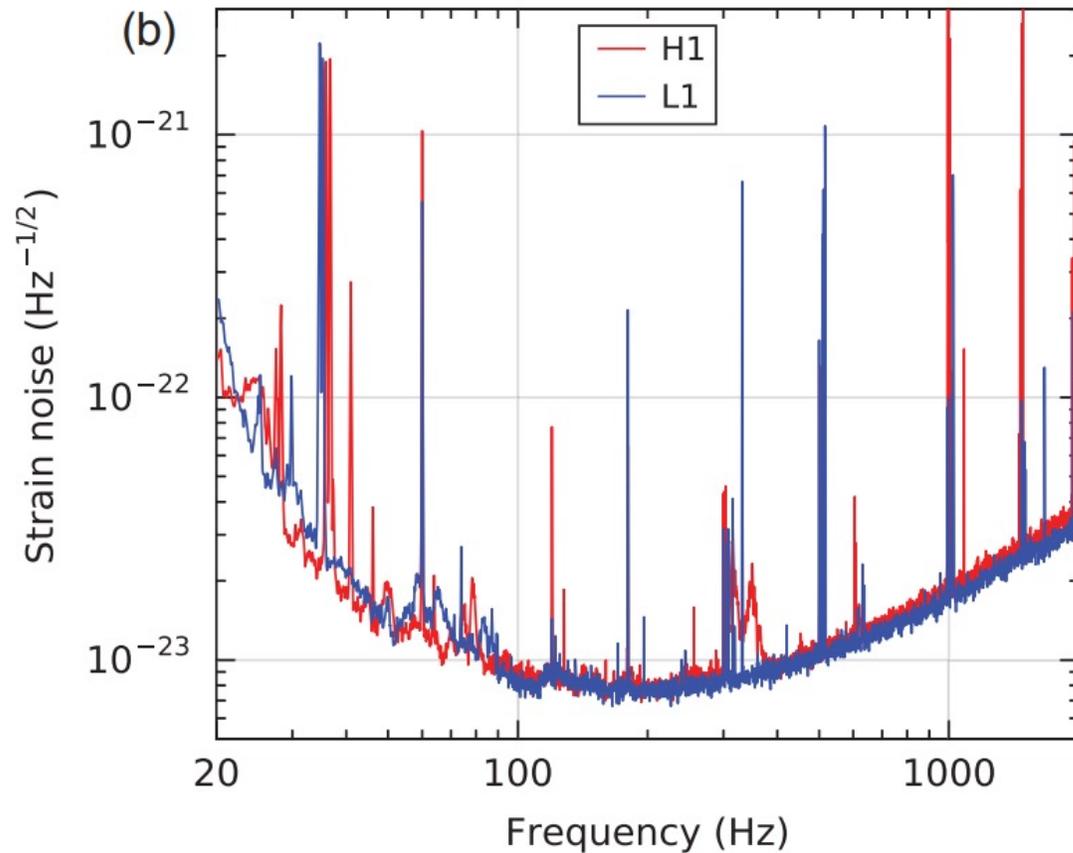
3.1 尤度解析のアウトライン

コードの順番:

1. High-pass Filterの適用(低周波数ノイズ除去)
2. 自己相関関数の計算
3. シグナルを減衰振動波形のモデル化
4. 尤度関数 $p(M, a)$ の最大化
5. 尤度関数の図化

3.1 High-pass Filterの適用(低周波数ノイズ除去)

High-pass Filter

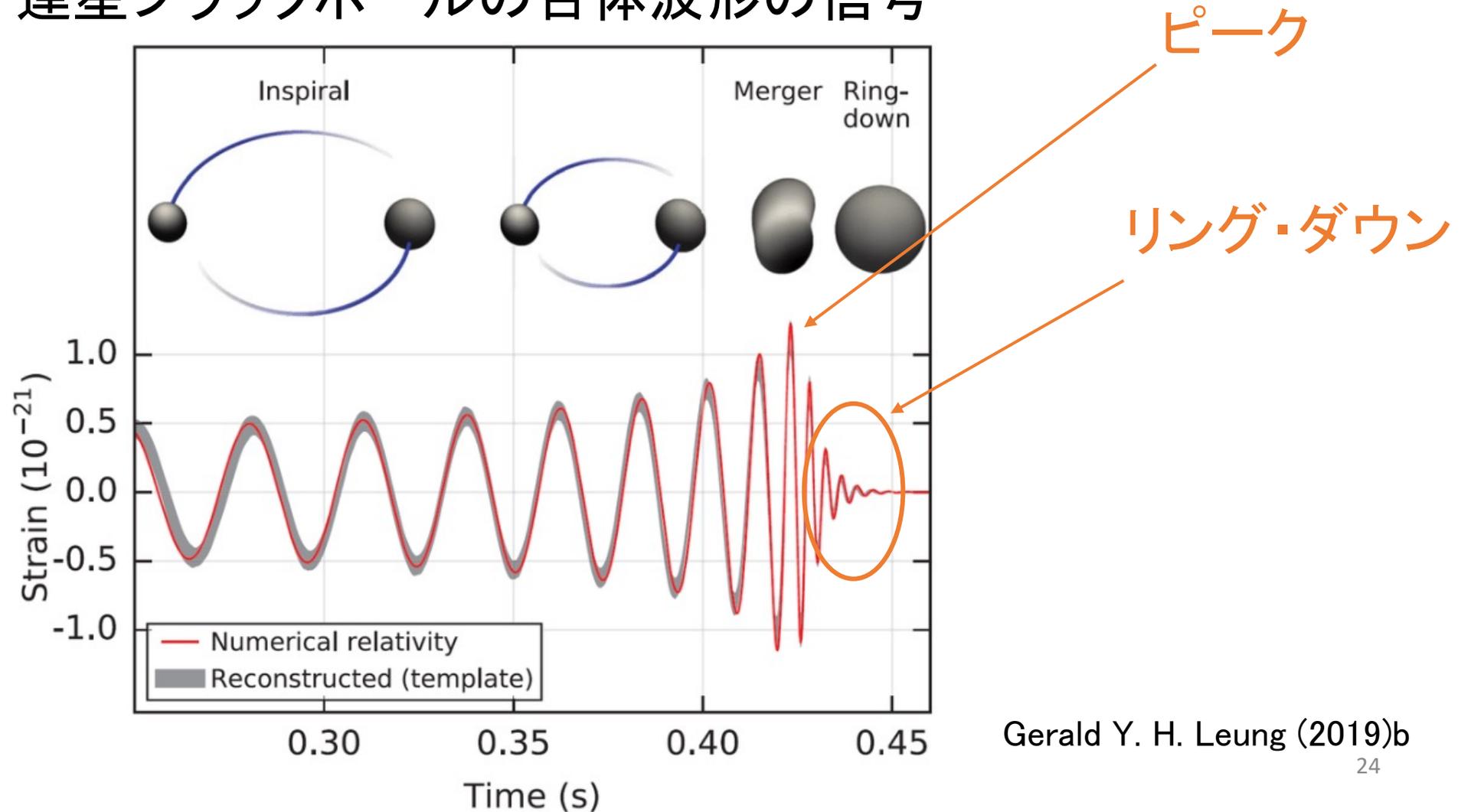


LIGO (2016)

- 低周波領域はノイズが多い
- データから低周波数ノイズを除去
($f < 20$ Hzのノイズをフィルターする)
- 100 Hz付近の重力波観測を狙う

3.2 連星ブラックホールの合体の時間経過

連星ブラックホールの合体波形の信号



Gerald Y. H. Leung (2019)b

3.3 $h(t)$ を減衰振動波形のモデル化

\vec{n} : 雑音
 \vec{d} : 実験データ
 \vec{h} : シグナル

Strain(t)

$$\vec{d} = \vec{h} + \vec{n}$$

連星ブラックホールの合体波形の
リングダウン期信号は減衰振動波形として記述可能:

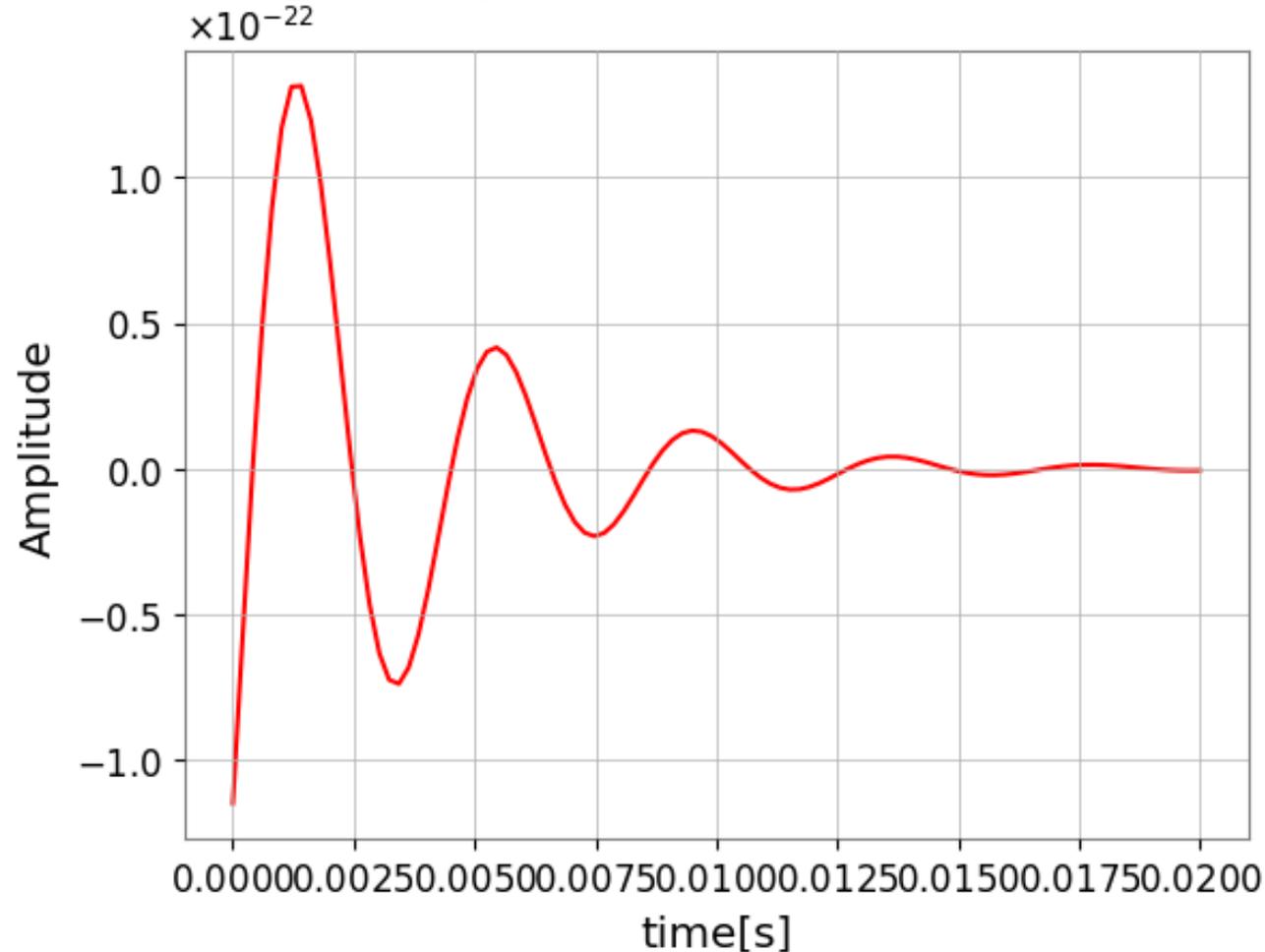
$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft))$$

周波数 f と減衰時間 τ は合体後のブラックホールの質量 M 、スピン a に依存

$$f = f(M, a), \quad \tau = \tau(M, a)$$

3.3 $h(t)$ を減衰振動波形のモデル化（例）

Modeling of damped vibration waveform($a=0.5$, $M=62$)



$h(t)$ の式に A, B, a, M を適当に代入したものの

(右図は $a=0.5, M=62$)

3msで減衰している

→実際の重力波を再現している

3.4 $h(t)$ を減衰振動波形のモデル化

$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft))$$

$$\vec{d} = \vec{h}(M, a, A, B) + \vec{n} \quad \therefore \quad \vec{n} = \vec{d} - \vec{h}(M, a, A, B)$$

Dimensionless spin: $a = \frac{c}{GM^2} J$

任意パラメータ

(Kerrブラックホールの)角運動量

太陽質量単位

合体後にできたブラックホール(BH)の質量:

$$M[M_{\odot}]$$

3.5 自己相関関数の計算

重力波検出器の雑音：地面振動、熱雑音、レーザーのショット雑音
→「定常ガウス過程」でモデル化

尤度関数： $p(\vec{n}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\vec{n}^T C^{-1}\vec{n}\right]$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} n(t_0) \\ n(t_1) \\ \vdots \\ n(t_{N-1}) \end{pmatrix}$

M, a, A, B が与えられた時に、信号データを得る確率

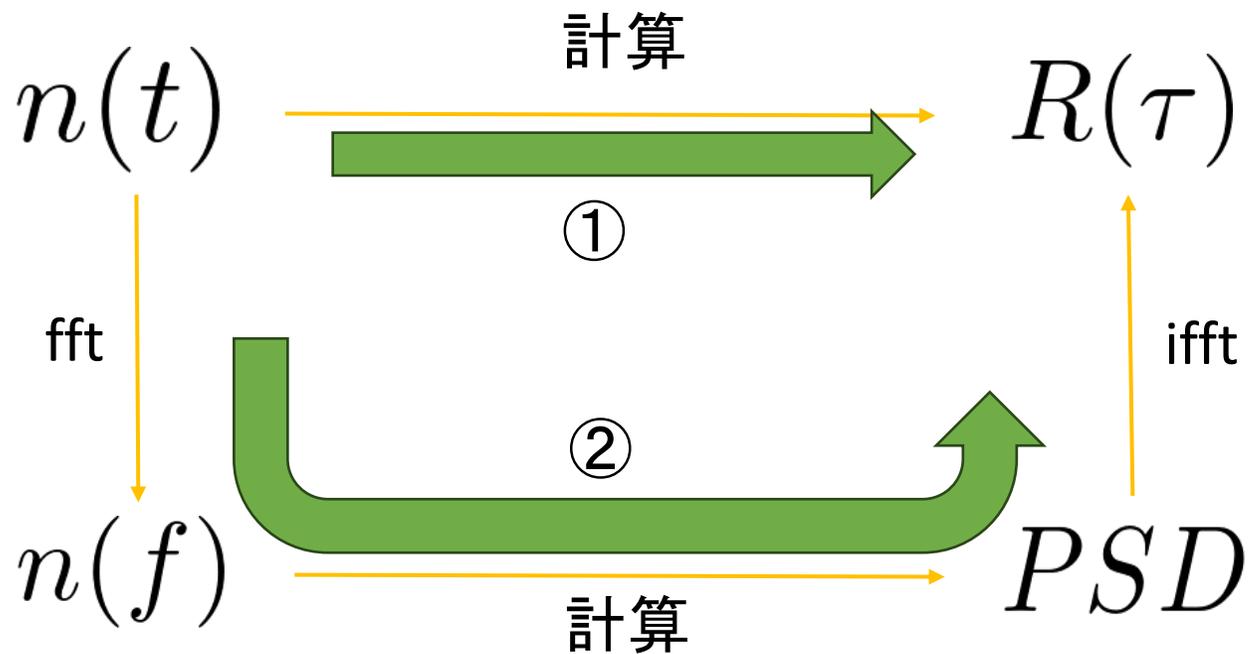
自己相関関数:

$$C_{ij} = \langle n(t_i)n(t_j) \rangle = R(|t_i - t_j|)$$

- 定常性を仮定
- 自己相関が時間差のみに依存

3.5 自己相関関数の計算

2種類の方法で自己相関関数を計算



自己相関関数①:
変数を t のまま計算

自己相関関数②:
PSD(パワースペクトラム密度)
を利用して計算

それぞれの方法でノイズを消去

3.6 (f, τ) と (M, a) との関係式 (Fitting)

TABLE I. The fitting constants in Eqs. (9) and (10), for the 21, 22, 33 and 44 modes, for the dominant $n = 0$ overtone [15].

(l, m)	f_1	f_2	f_3	q_1	q_2	q_3
(2, 1)	0.6000	-0.2339	0.4175	-0.3000	2.3561	-0.2277
(2, 2)	1.5251	-1.1568	0.1292	0.7000	1.4187	-0.4990
(3, 3)	1.8956	-1.3043	0.1818	0.9000	2.3430	-0.4810
(4, 4)	2.3000	-1.5056	0.2244	1.1929	3.1191	-0.4825

Gossan et al. (2018)

$$f(M, a) = \frac{c^3}{2\pi G M_\odot} \frac{f_1 + f_2(1-a)^{f_3}}{M}$$

$$\tau(M, a) = \frac{q_1 + q_2(1-a)^{q_3}}{\pi f(M, a)}$$

Beti et al. (2006)

優勢多重極モード: $(l, m) = (2, 2)$

3.7 尤度関数

信号パラメータ M, a, A, B が与えられた時にデータ \vec{d} を得る確率(尤度関数):

$$p(\vec{d} | M, a, A, B) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\vec{d} - \vec{h}(M, a, A, B) \right)^T C^{-1} \left(\vec{d} - \vec{h}(M, a, A, B) \right) \right]$$

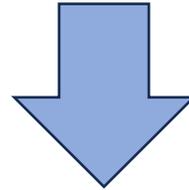
$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft))$$

p を最大にする $M, a, A, B \iff$ データ 最も整合的な値

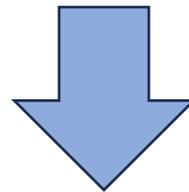
$$\hat{M}, \hat{a}, \hat{A}, \hat{B} = \operatorname{argmax}[p(\vec{d} | M, a, A, B)]$$

3.8 尤度関数の最大化

解析的に $p(M, a, A, B)$ を A と B に関して最大化



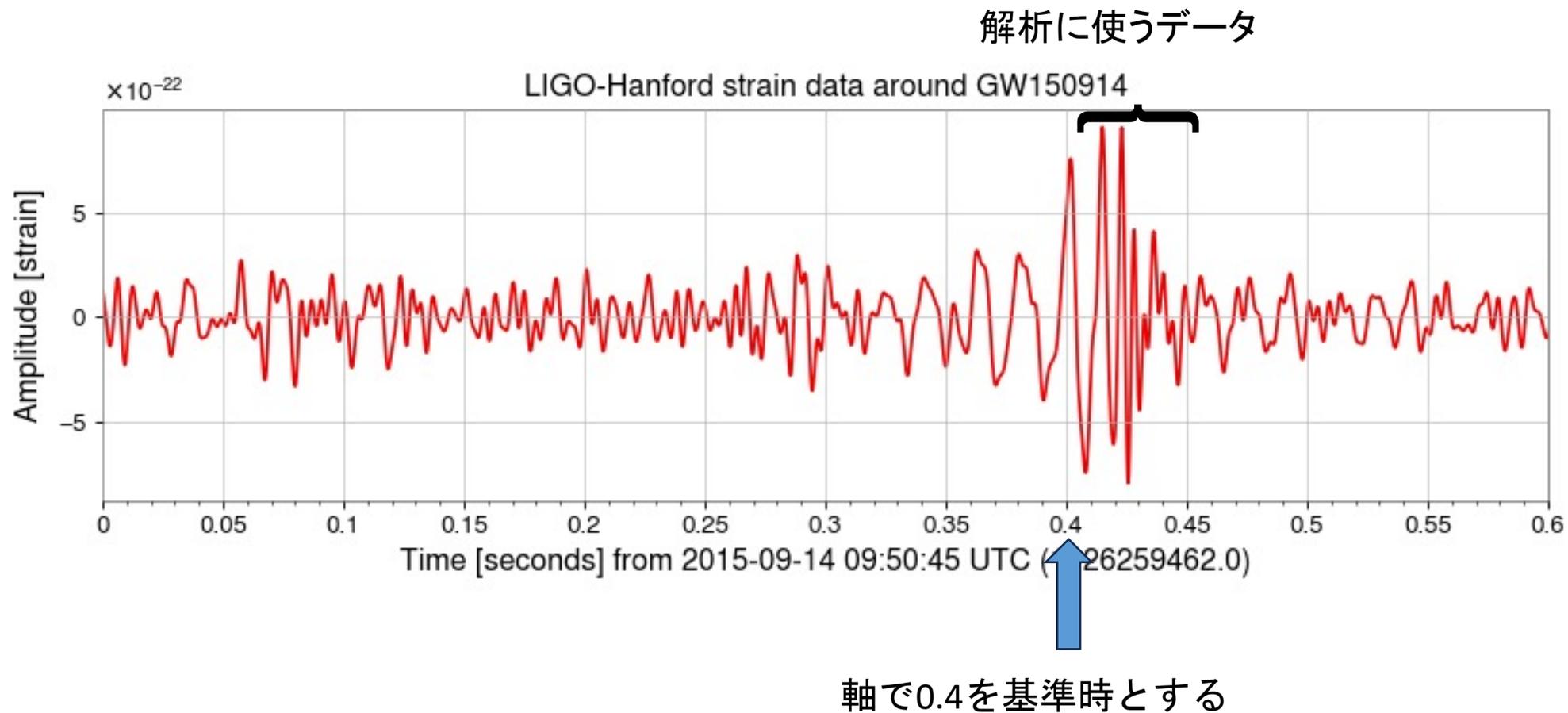
$p(M, a, A, B)$ を M と a に関して最大化



BHの質量 M とスピン a が決まる

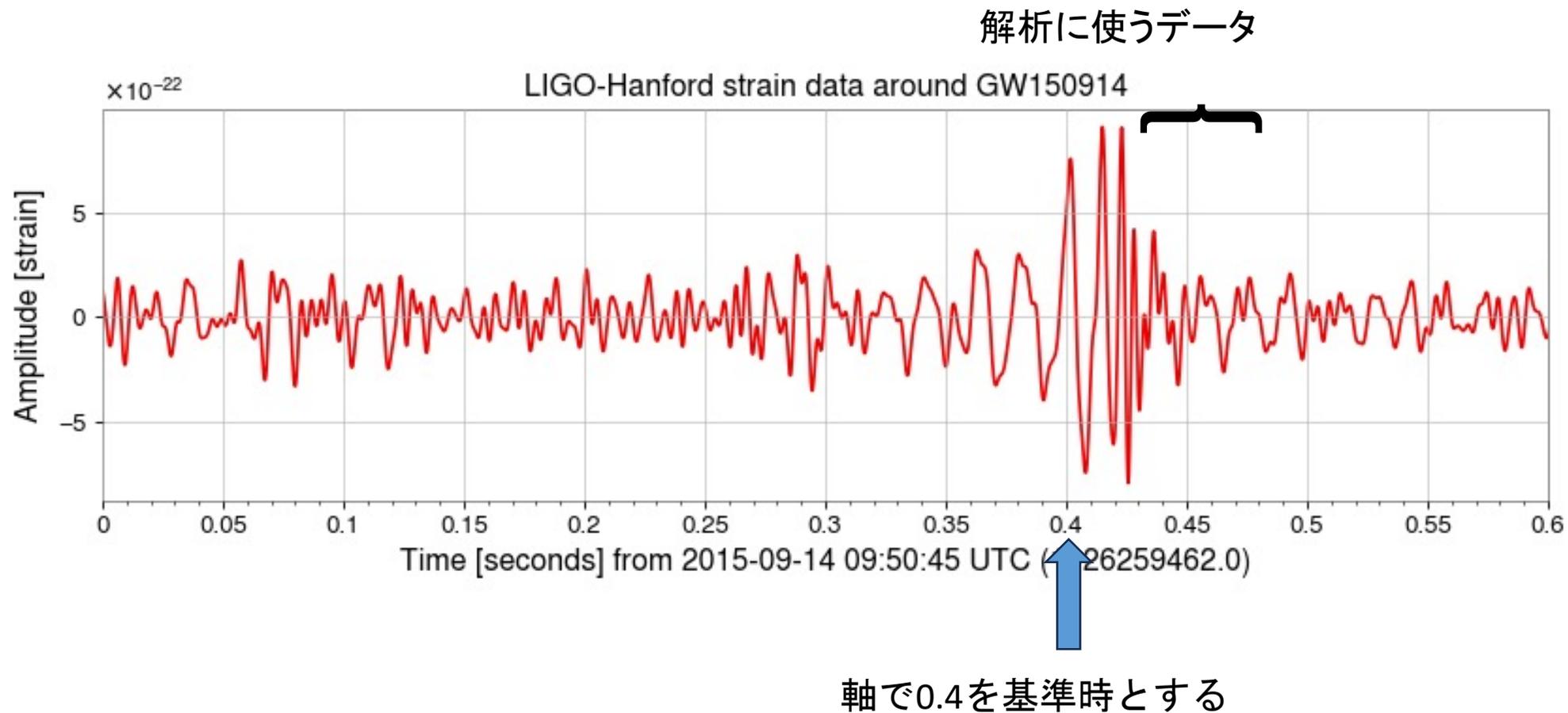
4. 結果

4 結果



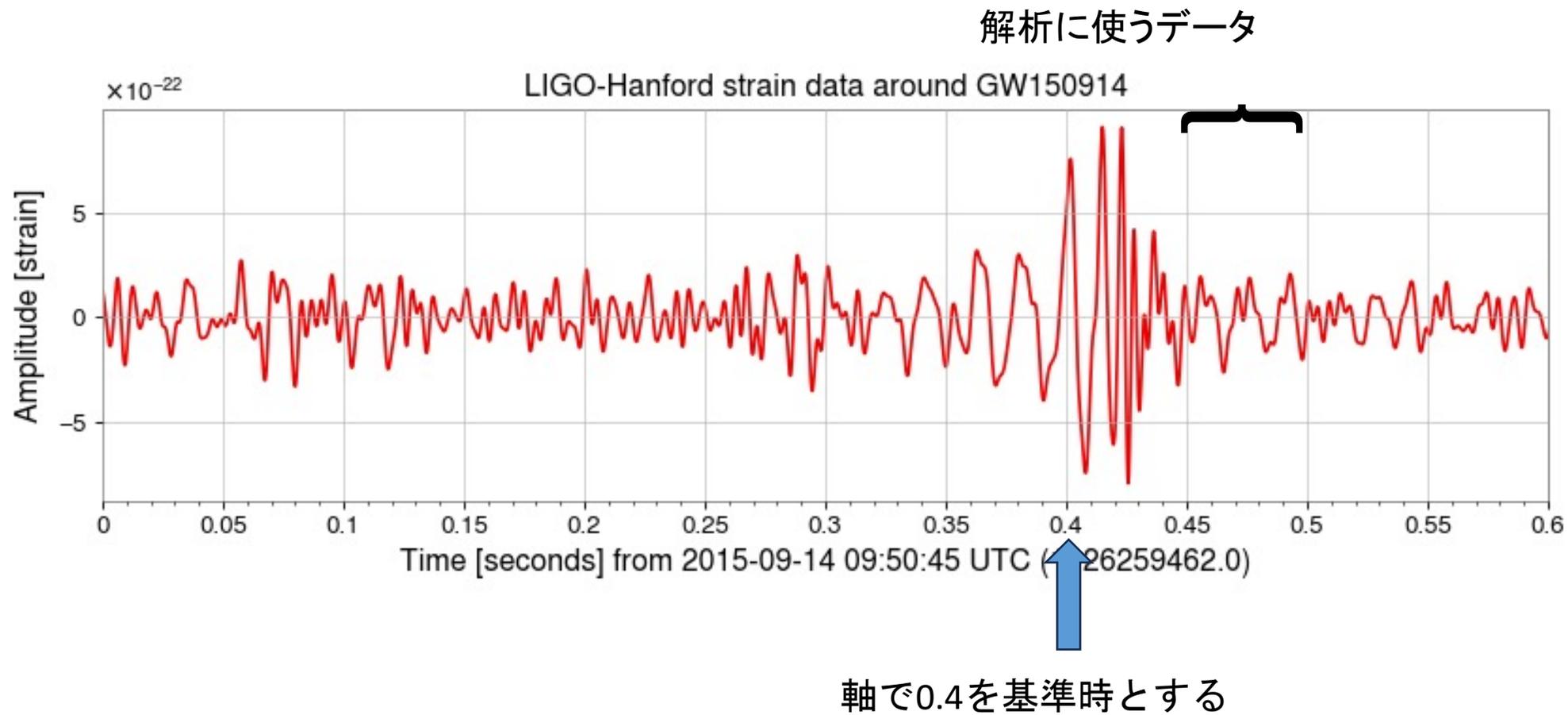
<https://gwpy.github.io/docs/stable/examples/signal/gw150914/>

4 結果



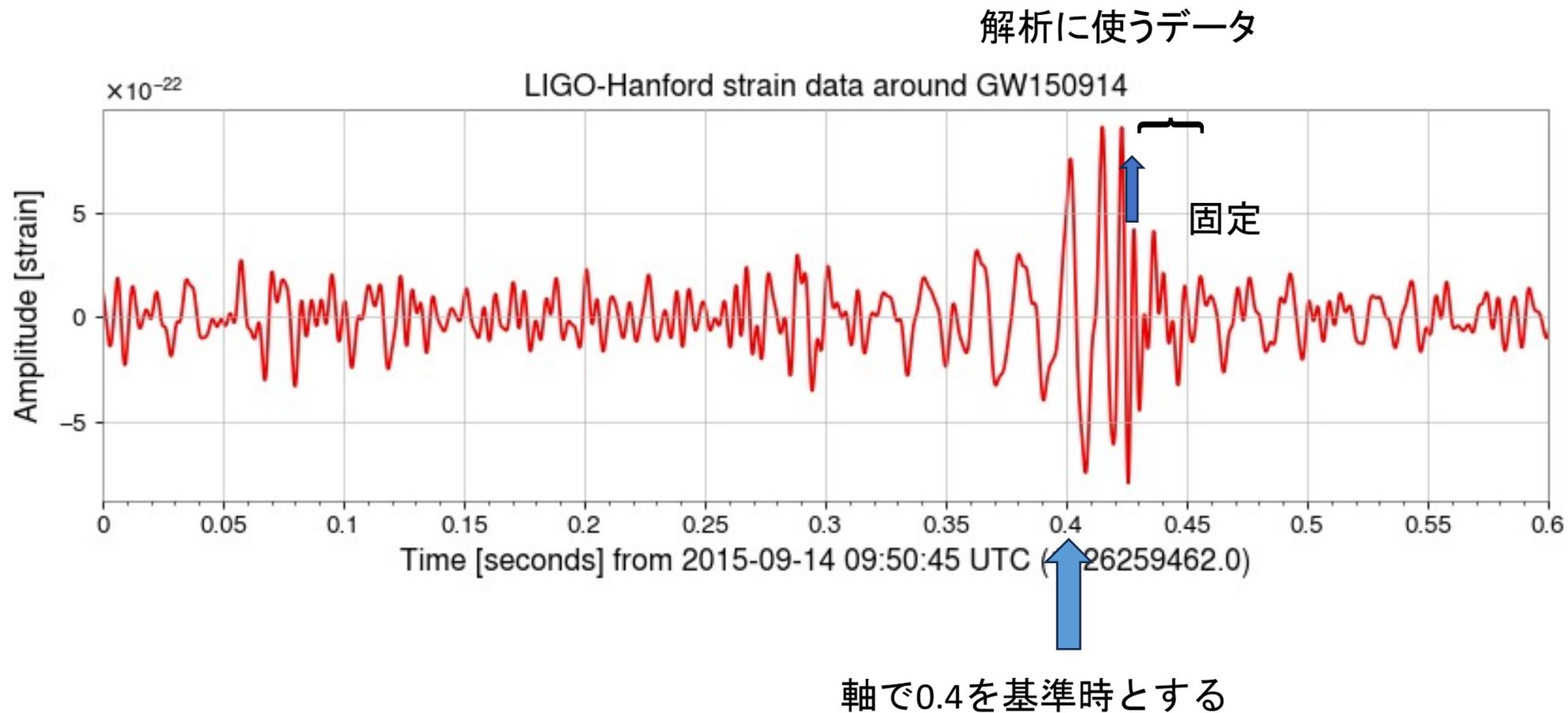
<https://gwpy.github.io/docs/stable/examples/signal/gw150914/>

4 結果



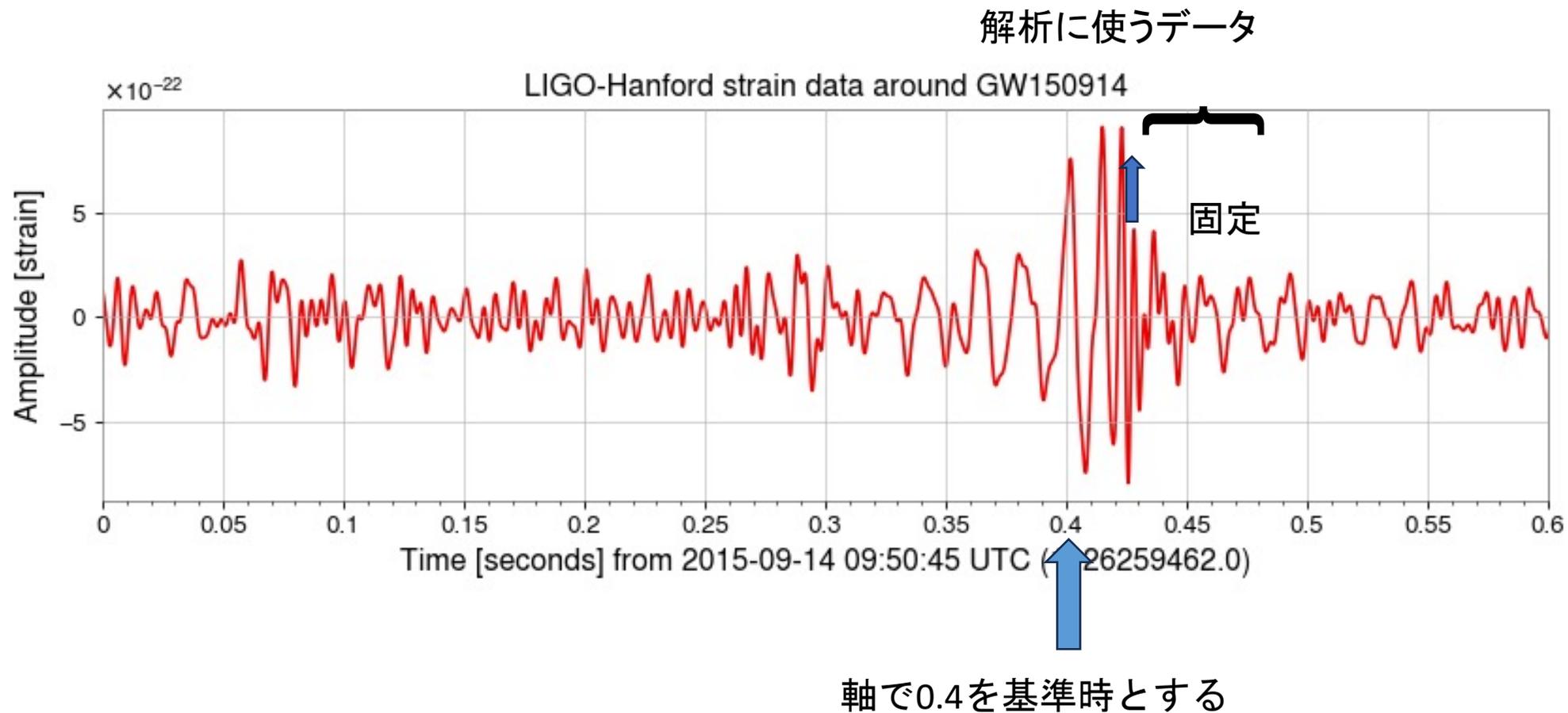
<https://gwpy.github.io/docs/stable/examples/signal/gw150914/>

4 結果



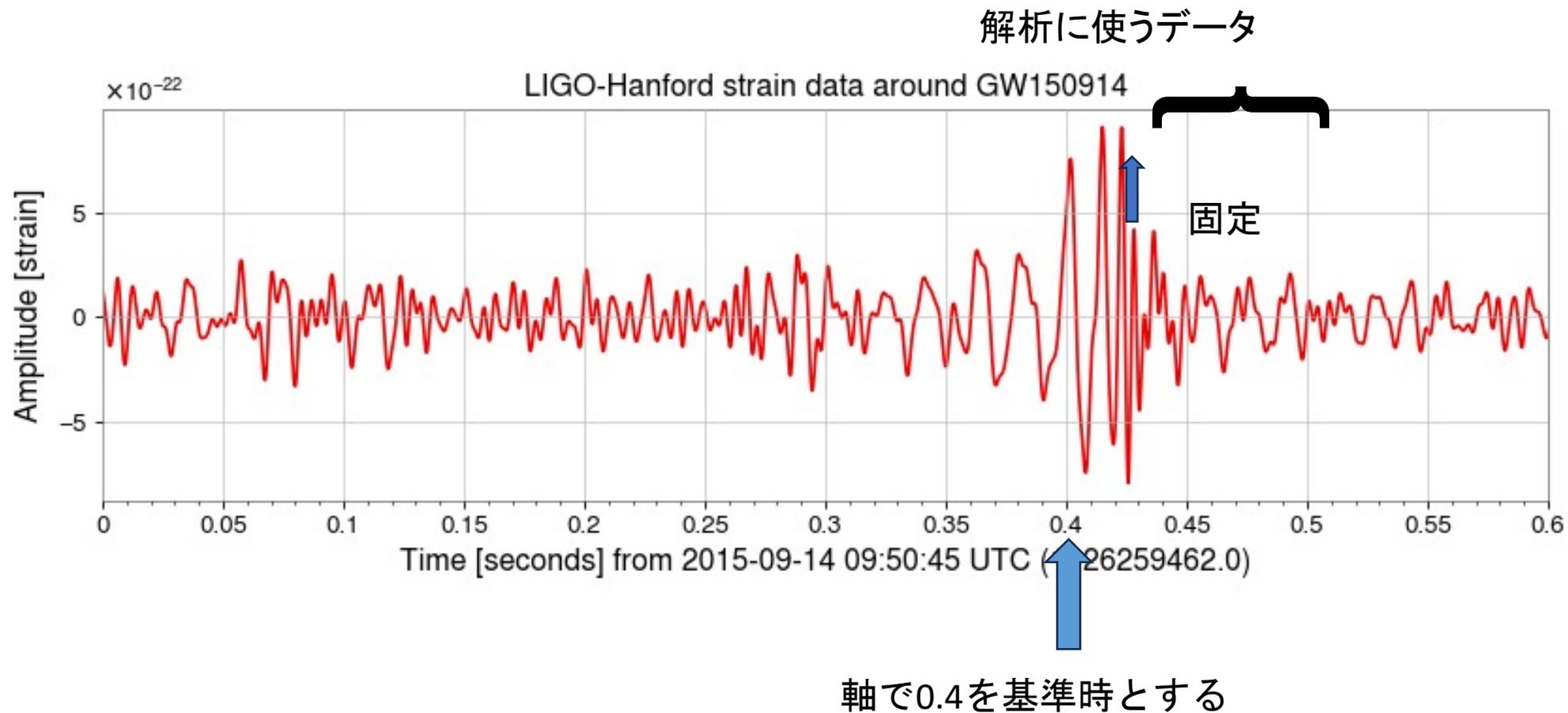
<https://gwpy.github.io/docs/stable/examples/signal/gw150914/>

4 結果



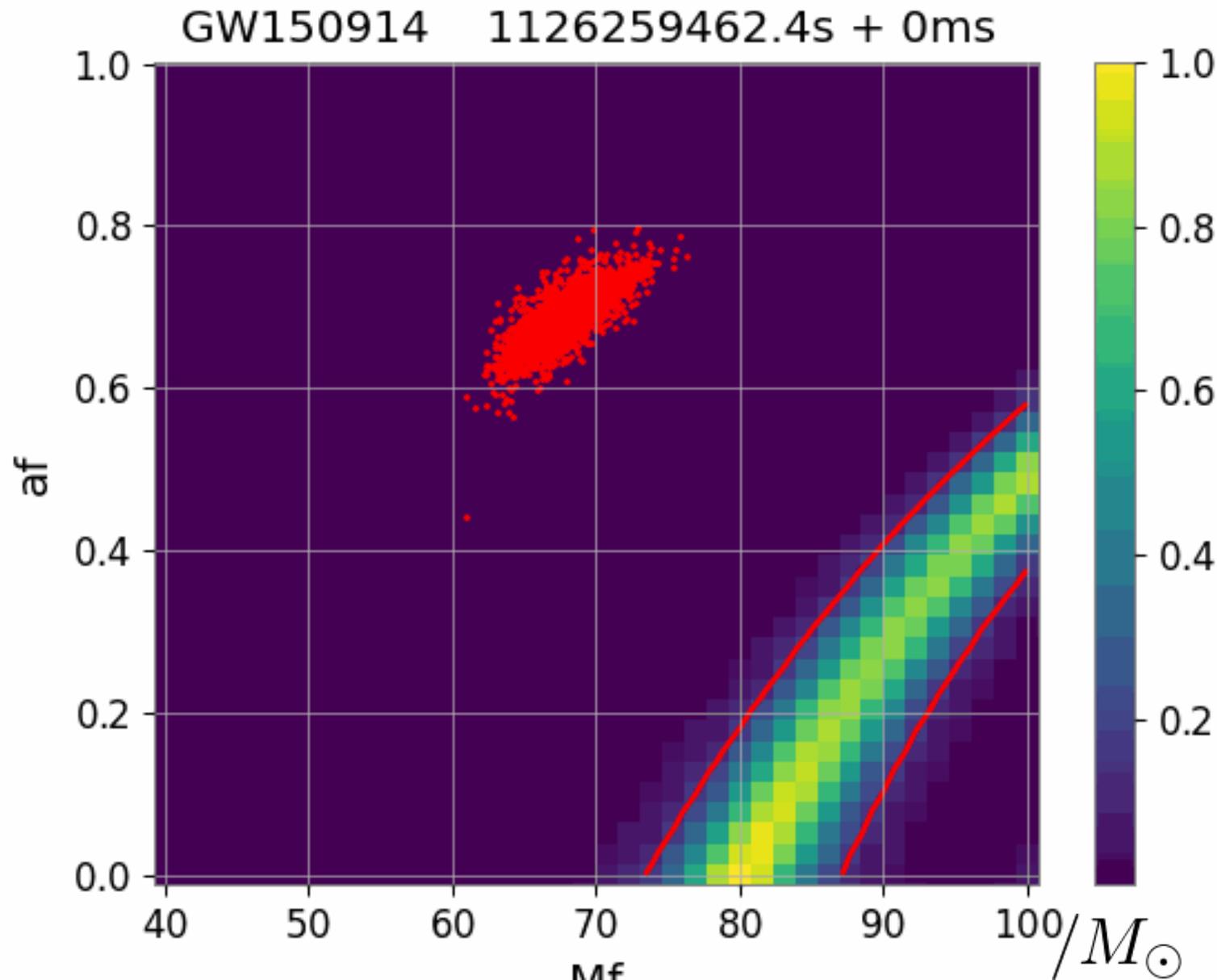
<https://gwpy.github.io/docs/stable/examples/signal/gw150914/>

4 結果



<https://gwpy.github.io/docs/stable/examples/signal/gw150914/>

4 結果



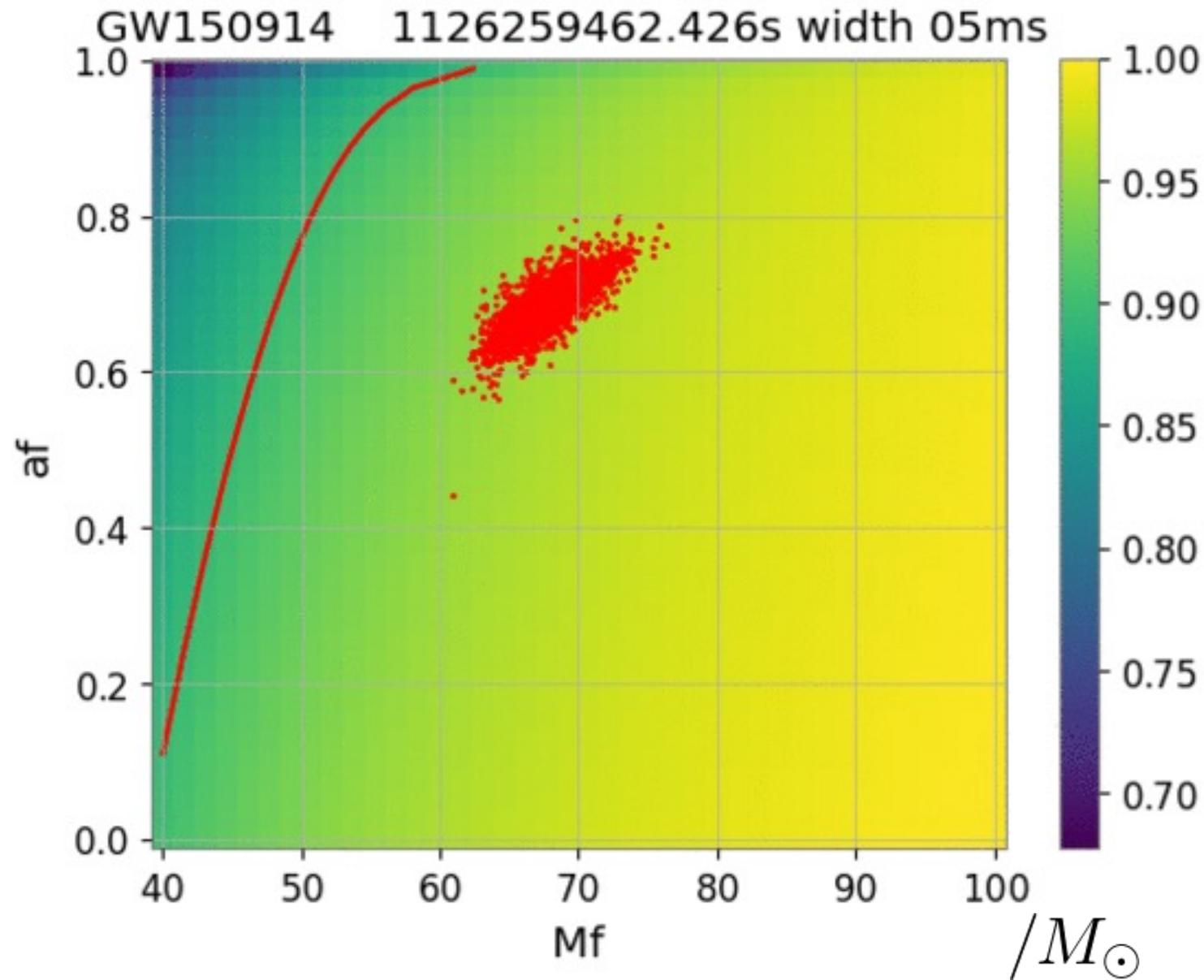
赤線で囲まれた領域：
90%信頼領域

赤点：
LIGOとVirgoの観測結果に
基づく a , M の候補値

明るさが大きいほど、
 a と M の値として尤もらしい

解析開始時刻を1msごとに
変化させていく

4 結果

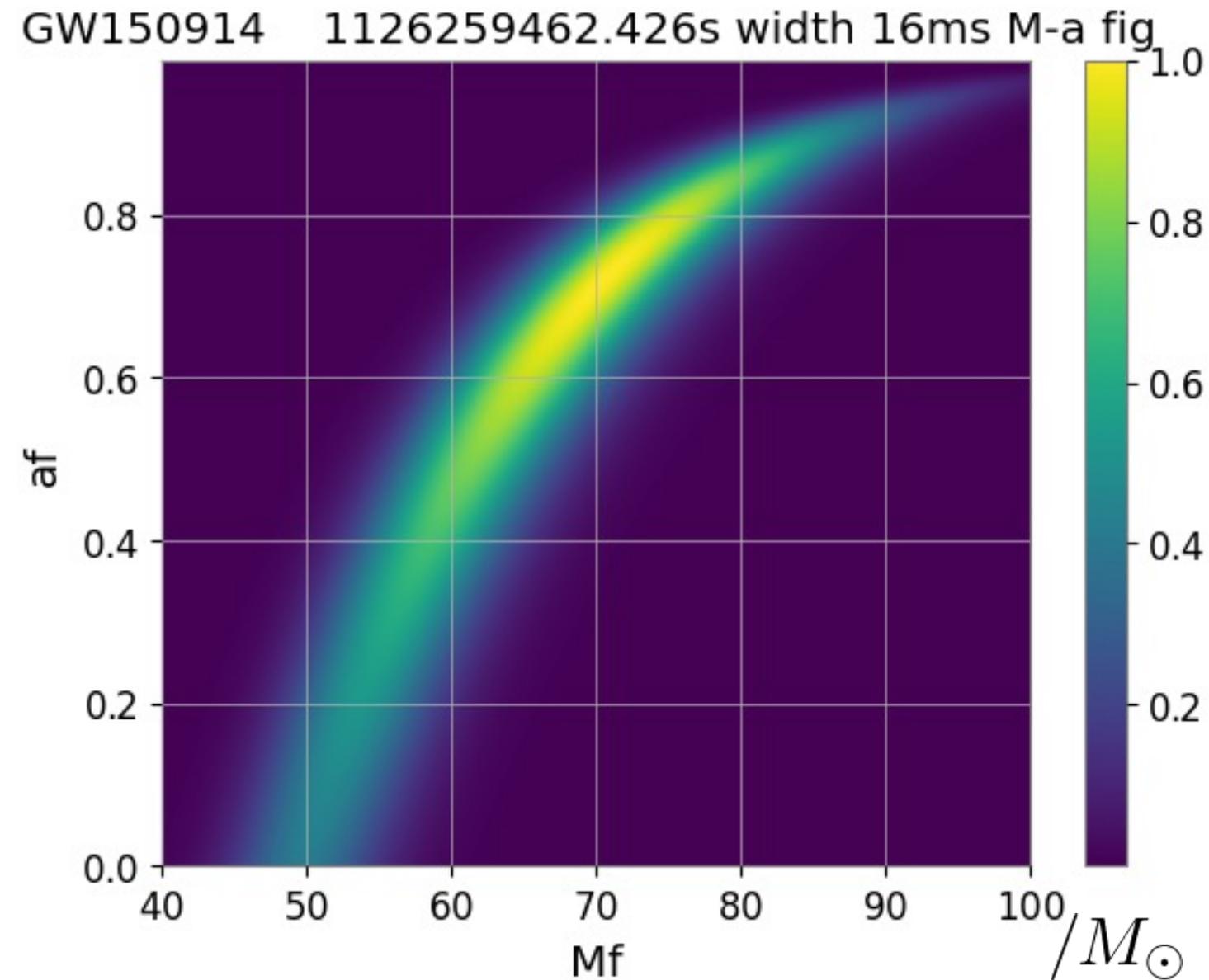


開始時刻を固定

計算に用いるデータの
時間幅を変化させる

明るさが大きいほど、
 a と M の値として尤もらしい

4 結果



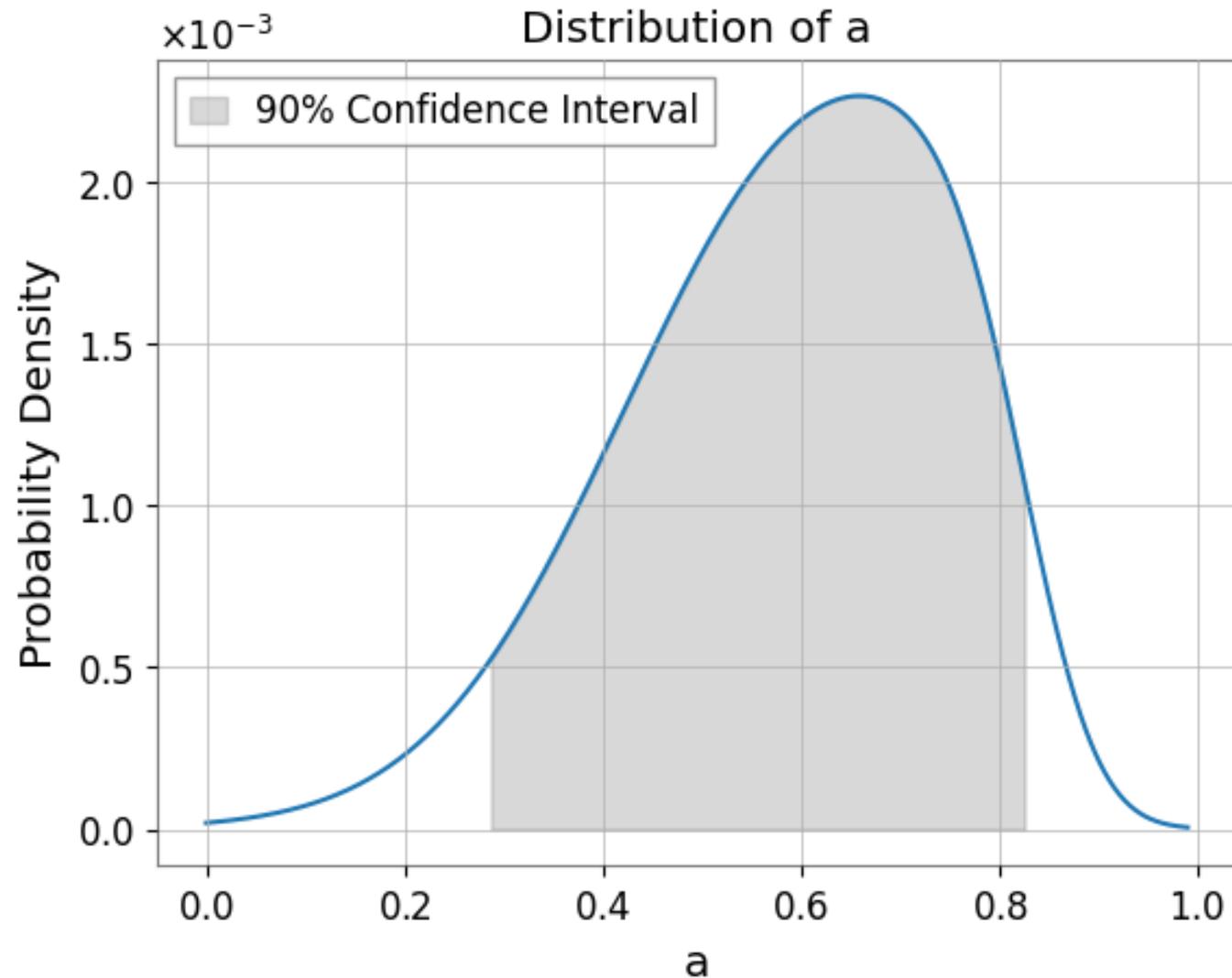
観測開始時間を固定

計算に使用するデータの
時間幅を固定

グリッドを 1000×1000 (1辺あたり
10倍細かく) にして、尤度関
数が最大になるグリッドを
見つける
→ a, M の代表値とする

https://zenodo.org/records/6513631/files/IGWN-GWTC2p1-v2-GW150914_095045_PEDataRelease_mixed_cosmo.h5

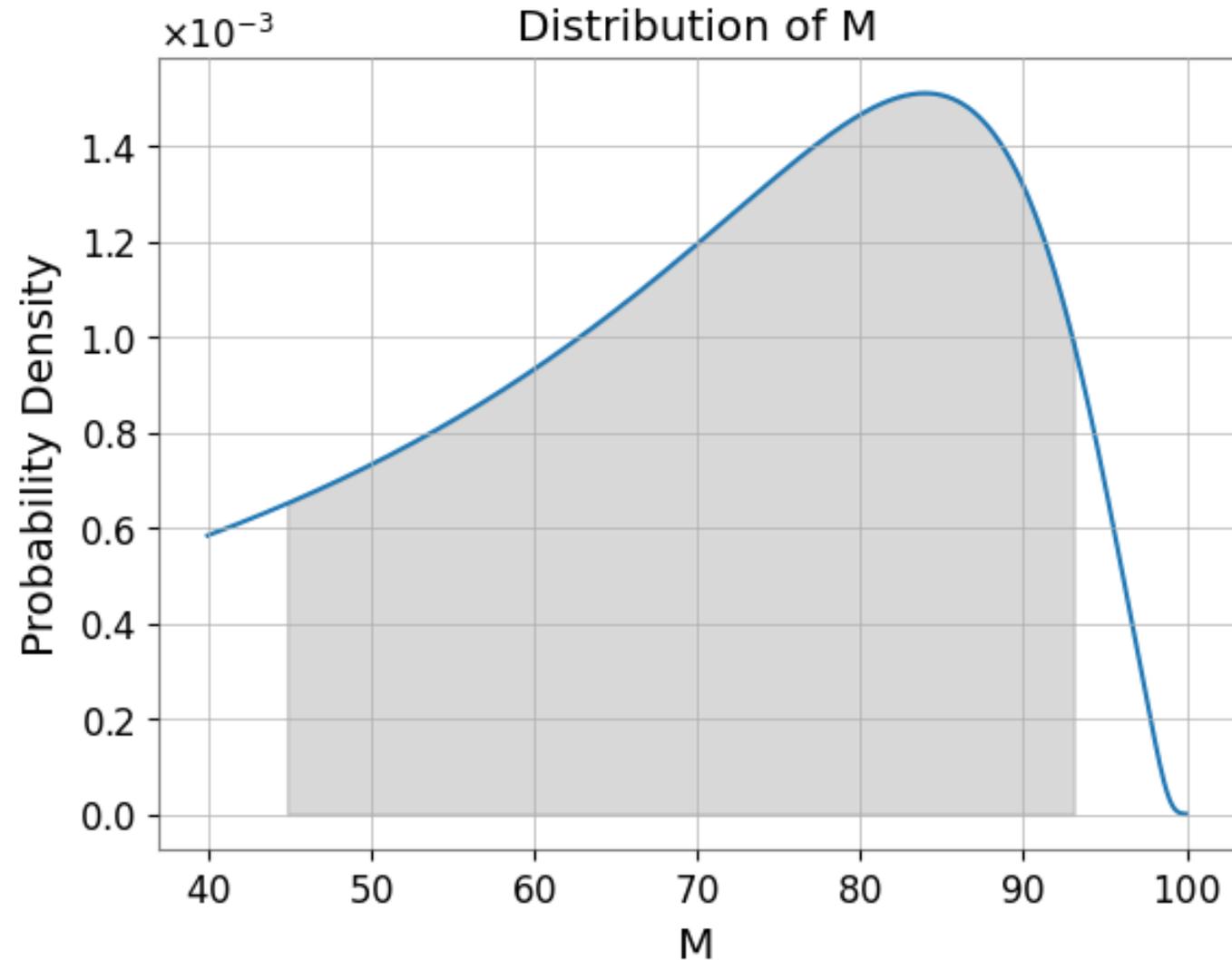
4 結果



統計誤差を評価するために、 a について90%信頼区間を求める

- ・各 a の値に対する全ての M の値での確率密度の和を計算
- ・正規化して累積分布関数を計算し、信頼区間の下限と上限を求めた。

4 結果



M についても、90%信頼区間を求める

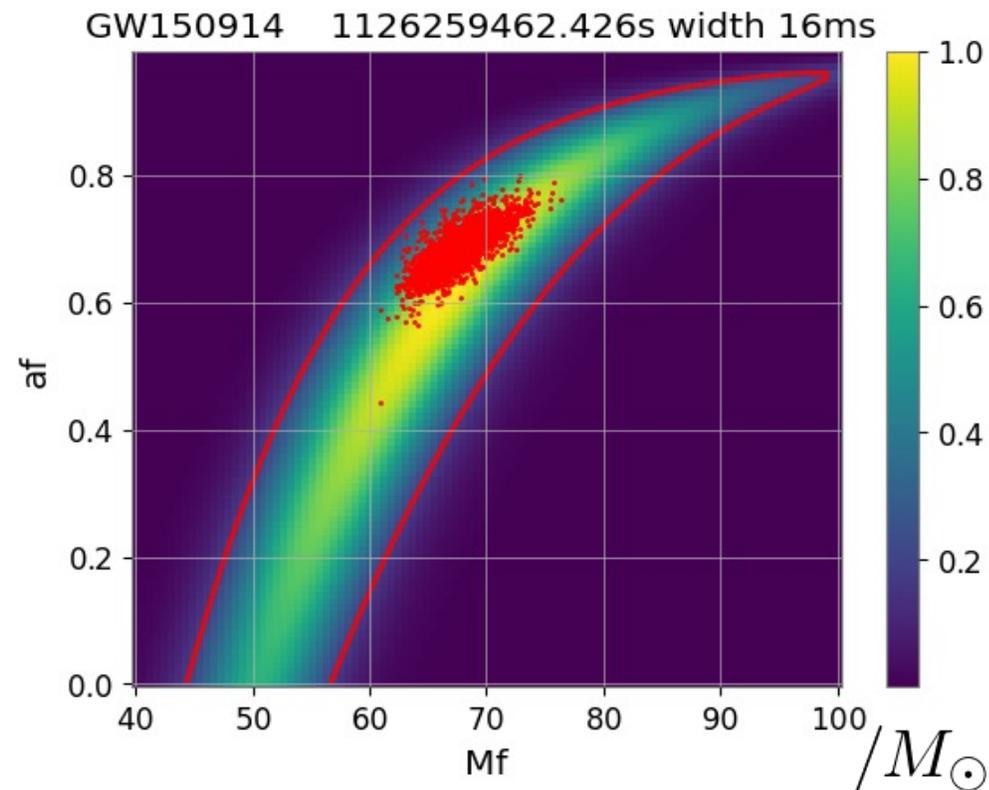
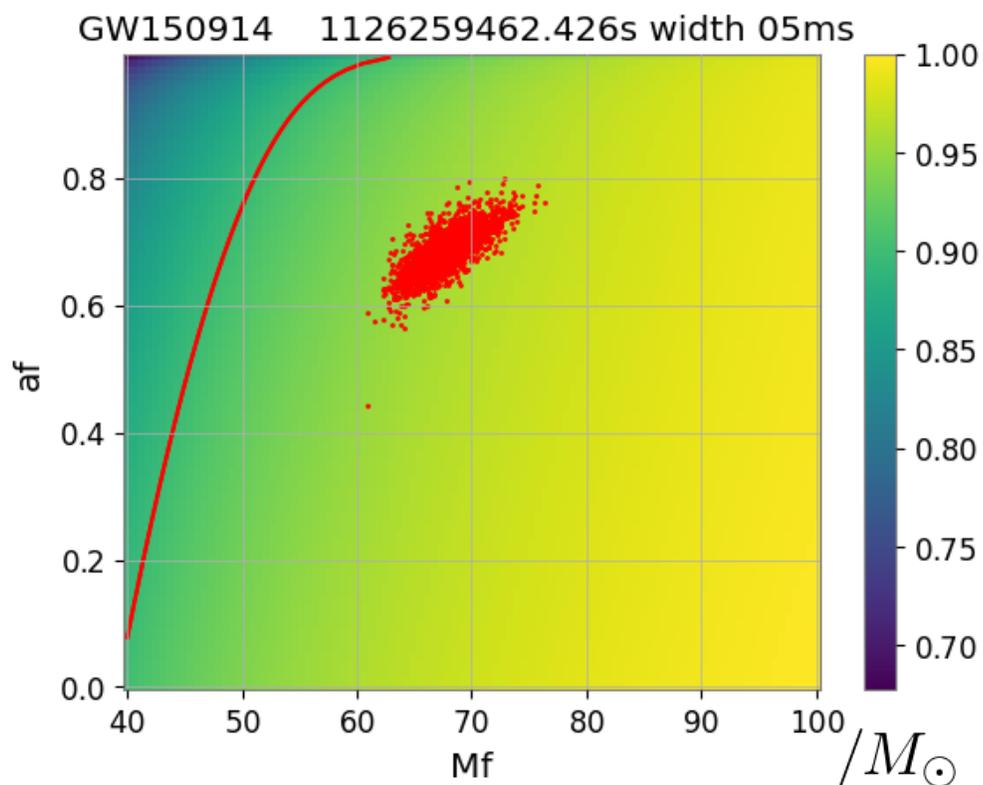
- ・各 M の値に対する全ての a の値での確率密度の和を計算
- ・正規化して累積分布関数を計算し、信頼区間の下限と上限を求めた。

4 結果

	Spin a	Mass [M_{\odot}]
二次元マップの最大値 自己相関関数①	$0.66^{+0.1}_{-0.5}$	68.4^{+23}_{-24}
二次元マップの最大化 自己相関関数②	$0.72^{+0.002}_{-0.6}$	70.6^{+23}_{-26}
LIGO, Virgo (Physical Review Letters)	$0.67^{+0.05}_{-0.07}$	$67.4^{+4.5}_{-5.2}$

4 結果

重力波のピークから3ms後をリングダウン開始としたパターンにおいて
計算に使用したデータの時間幅が短い場合の計算結果は、反対に時間幅が長い場合に
比べて a, M の尤度のエラーが大きかった



→重力波の減衰しきった領域へのフィットでエラーが抑えられている?

5. 考察

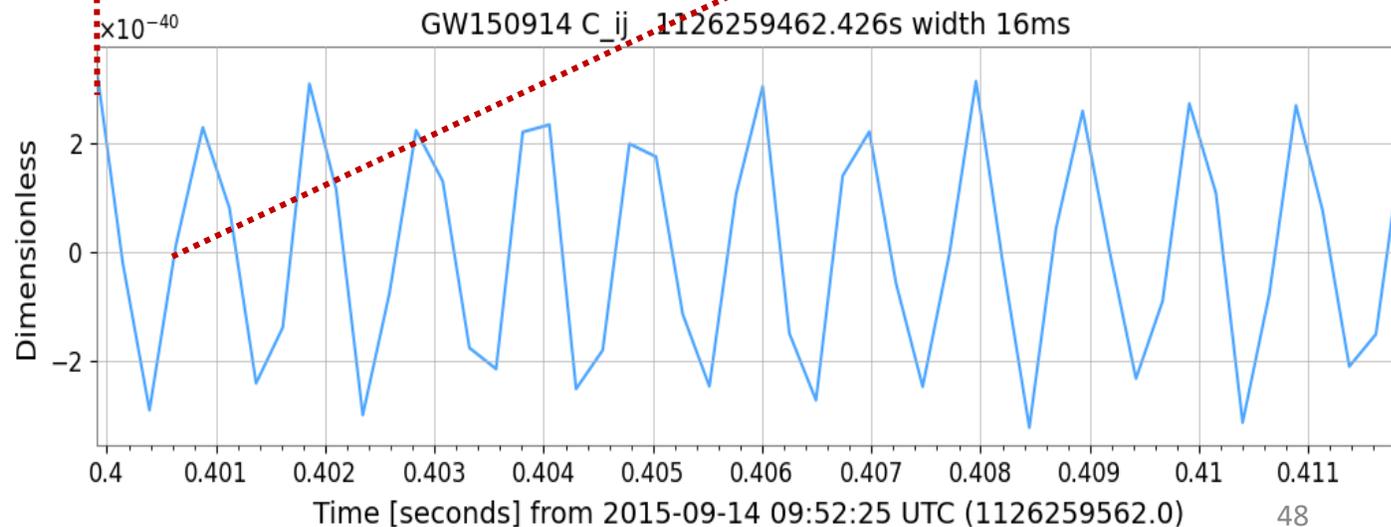
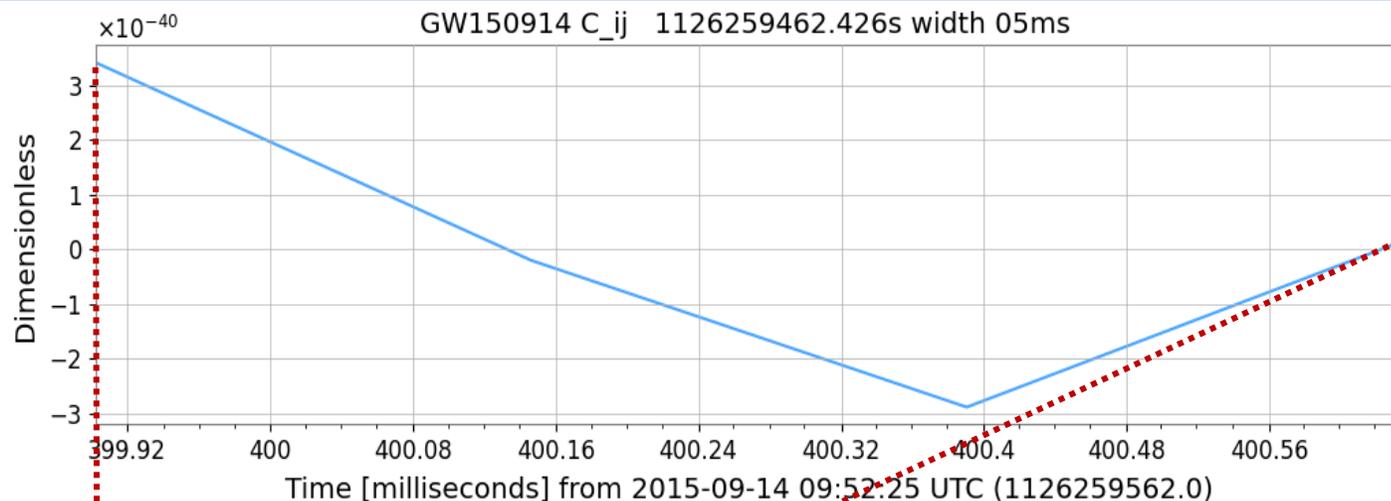
5 考察

自己相関関数の要素数は
データの時間幅の長さに依存する

データの時間幅が短い(上図)
→自己相関関数は荒い関数

データの時間幅が長い(下図)
→自己相関関数の精度は良くなる

時間幅の増加により
自己相関関数の精度が収束
⇒計算結果と参考値の一致



5 考察

求めた a, M の値の誤差範囲に

LIGO, Virgo の解析値が入っている誤差が大きい

→ 簡易的な解析のために 4kHz のデータを用いたのが一因

16kHz のデータを用いれば、データ点の増加による解析精度の改善が期待できる。

a の誤差の範囲に偏りが見られる

→ ① が $0.66^{+0.1}_{-0.5}$, ② が $0.72^{+0.002}_{-0.6}$

a の値は代表値以上になる可能性はほとんどない

6 まとめ

できたこと:

- QNMの開始時刻を推定することができた
- a, M の値を解析的に求めた
- 代表値はLIGO, Virgoの結果と類似

改善が求められること:

- 統計誤差が大きくなってしまった
- 誤差の分布に謎の偏りが見られた

参考文献

ブラックホールの準固有振動と重力波放出

https://www.asj.or.jp/geppou/archive_open/1991/pdf/19910415.pdf

GWpy:

<https://gwpy.github.io/docs/stable/index.html>

質疑応答対策1

GW150914

合体前 $36M_{\odot}+29M_{\odot}$

合体後 $62M_{\odot}$

推定距離410Mpc, $z=0.09$

↓

$30M_{\odot}$ のBHの存在

初代星かも？

~ $10M_{\odot}$ のBH候補天体はX線連星として見つかっているが、これほど重たいBHのは明らかではなかった

でも本当にBH候補天体？

2.10の下図から合体寸前はわずか数百kmしかはなれていなかったことを示唆。重力波の周波数が150Hzになっても合体することなく接近するにはBHしかありえない、推測されたトータル質量からして一対の中性子星はこれほど重くないし、BHとNSだともっと低い周波数で合体したはず

ApJ Lett., 818:L22 (2016)

ASTROPHYSICAL IMPLICATIONS OF THE BINARY BLACK-HOLE MERGER GW150914

ABSTRACT

The discovery of the gravitational-wave source GW 150914 with the Advanced LIGO detectors provides the first observational evidence for the existence of binary black-hole systems that inspiral and merge within the age of the Universe. Such black-hole mergers have been predicted in two main types of formation models, involving isolated binaries in galactic fields or dynamical interactions in young and old dense stellar environments. The measured masses robustly demonstrate that relatively “heavy” black holes ($\gtrsim 25 M_{\odot}$) can form in nature. This discovery implies relatively weak massive-star winds and thus the formation of GW150914 in an environment with metallicity lower than $\simeq 1/2$ of the solar value. The rate of binary black-hole mergers inferred from the observation of GW150914 is consistent with the higher end of rate predictions ($\gtrsim 1 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$) from both

大質量のBH連星の形成シナリオ

• 重元素量が少ない

⇒ 透明度が高い

⇒ 星形成段階での弱いフィードバック ← 低い重元素量は

⇒ 星風による質量放出が弱い ← 不可欠な要素

• 星の高速回転

⇒ 対流領域の増加による一様化

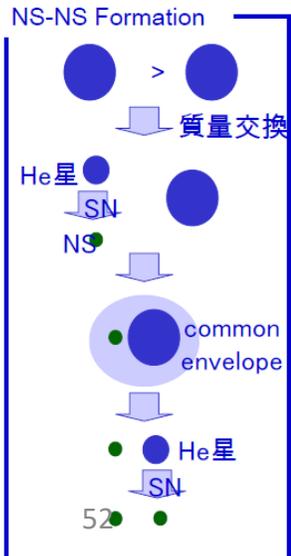
⇒ 星がよりコンパクトになり、星風による質量放出が弱い

BH-BH連星形成

初代星は大質量星が多い。進化過程での質量放出がefficientでないためNS連星を作ろうとすると超新星爆発の質量放出で連星が解体してしまう。

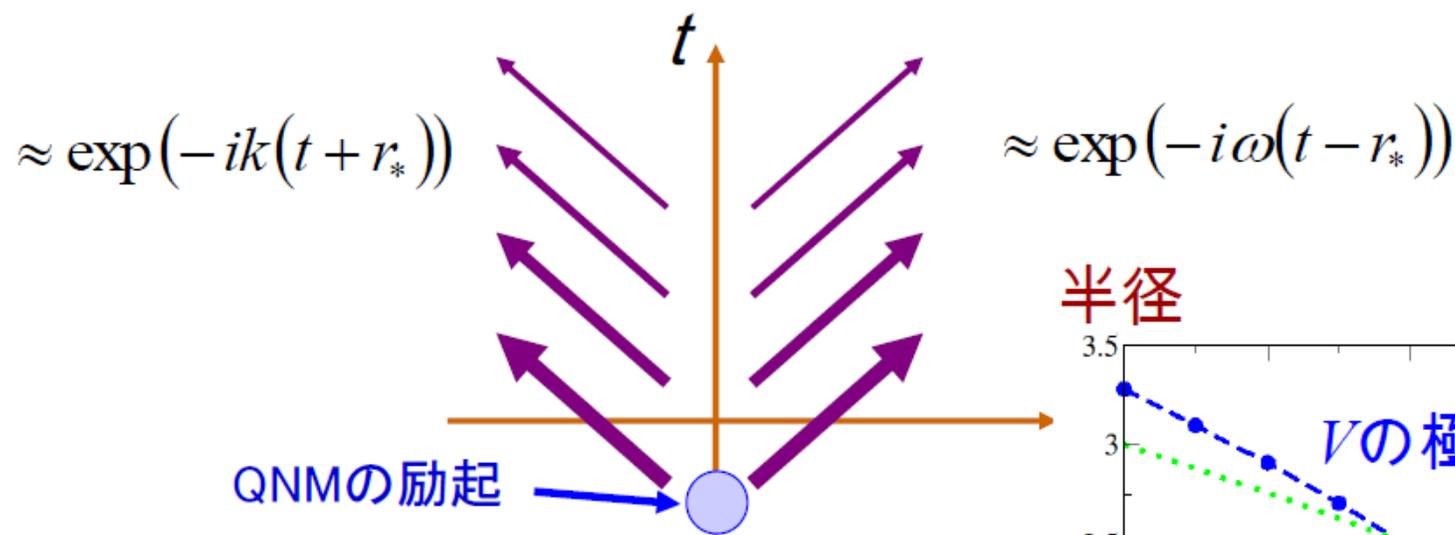
しかし、BH-BH連星なら形成される可能性が十分にある。

様々な仮定は必要だが、連星進化のシミュレーションをおこない、BH連星合体のイベントレートを評価

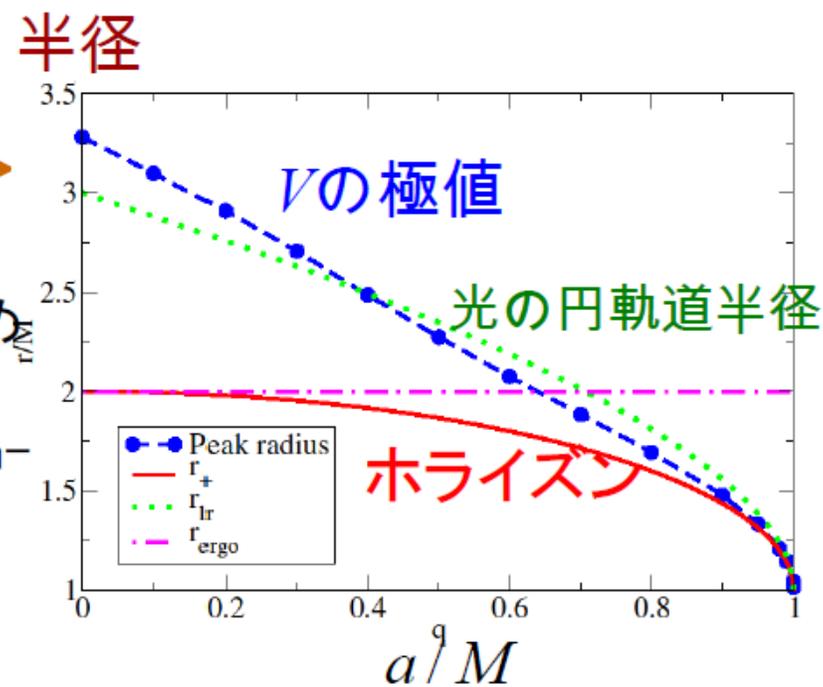


質疑応答対策2

では、QNMを観測すればブラックホールをどこまで観測したと言えるのか？



- WKB近似でQNM振動数は比較的正確に求められる
(Schutz & Will, ApJ, 291 (1985))
- しかし、WKB近似の破たんがないと、内側でin-going、外側でout-goingの解は作れない。
- このWKB近似が破れるのは摂動方程式の有効ポテンシャル V の極値周辺。
- WKB近似ではそのまわりの振る舞いだけでQNM振動数が決まる。



(Nakamura, Nakano,

質疑応答対策3

なぜQNMモード
が検出されれば
確実なのか

BH候補天体なのか、ブラックホールと言いきってよ
いのかの判断は最終的には程度問題ではあるが、

- 数値相対論の進展のおかげでBH連星合体が
高い精度でシミュレーション可能
- この数値計算と観測の間に大きな矛盾はないこ
とは、BHの降着円盤の観測にもとづくこれまで
の知見以上のものが確かにあるだろう。

- インフレーションが確かめられたかという問と似たよ
うな状況？

「概ね確かめられたと思っているが、Bモードが検出
されればより確実だ」



「概ね確かめられたと思っているが、QNMモードが
検出されればより確実だ」

ここに入っているpdf参照
3/13まで見れる
[https://7.gigafile.nu/0313
ba3e1ed04bdd8a91ffcb27
349b7babaa9](https://7.gigafile.nu/0313ba3e1ed04bdd8a91ffcb27349b7babaa9)

中性子星あるいはブラックホール連星の合体の前後で放出される重力波の波形（予想）。次第に振幅を大きくしながら、1kHzに近い周波数にまで上がる。合体後にブラックホールが形成されるならば、重力波はブラックホールに飲み込まれてしまい、急速に減衰する。この減衰部分が観測されれば、ブラックホールを直接観測したことになる。

[1808_shinkai_BHGW.pdf](#)
[\(oit.ac.jp\)](#)

質疑応答対策4

AdvLIGOは感度がさらに3倍向上
アップグレード内容

- レーザーpower増加で高周波数でのノイズを低減
- リサイクリング・ミラーのデザインを改良し、レーザー光の空間分布をよりよくした
- 大きく思い溶融シリカテストマスを使用し、ミラーのランダムな動きを減少させた
- 石英ガラス繊維によってテストマスを吊り、振り子による熱雑音の影響を低減した
- 4段振り子からテストマスを吊り、地面振動の影響を低減した
- 測定してキャンセルするというアクティブな技術を用いて地面振動の影響を低減した

Backup

Scipyのoptimize.minimize関数を用いた最適化での計算も行った
→結果は $a = 0.38$, $M = 38.20$ 程度になった

精度が良くなかった原因

Minimize関数の最適化アルゴリズムを決めるmethodが
最適化を行う対象の関数(今回は尤度関数)
に合わなかったことが考えられる。

(尤度関数の微分が現実的でないため微分不要のmethodを選択)
上の値はPowell methodを用いた
Nelder-Meadを用いた場合は初期値が最終値として返された