特異点に秘められた謎
-幾何学と代数学の遭遇

東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構
伊藤　由佳理

自己紹介

東京大学
　カブリ数物連携宇宙研究機構
　　（柏キャンパス）

専門：代数幾何学（特異点理論）
　　☞ ものしり新聞

©Kavli IPMU

著書：「可換環論入門」（訳書・岩波書店）
「研究するって面白い！」（岩波ジュニア新書）
「美しい数学入門」（岩波新書）など
日本語字幕監修
　「曲面の秘密‐マリアムの魔法の杖」

数学の持つ、ふたつの顔

道具
（学校で学ぶ数学に近いもの）

・計算（コンピュータ、インターネット）
・データの整理（統計学）
・データの活用（ビッグデータ・人工知能）

正確で強力な道具であり、
物理学や工学、様々な自然科学や
医学、経済学でも役立っている

考え方
（大学、研究の数学に近いもの）

・論理的
・モデル化
・抽象化

日常の世界のひとつの性質に注目する
その一般化（高次元・抽象化など）は
日常ではほとんど役に立たない

日常生活の中の数学

★インターネットで検索する
★宅配便で荷物を送る
★電車の乗り換え案内

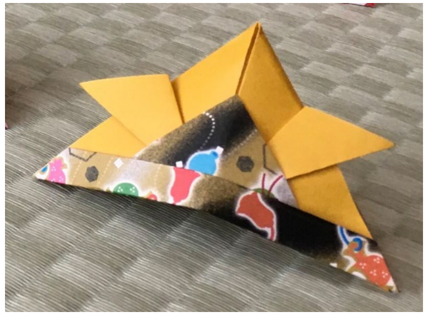
★データサイエンス、ビッグデータ
★ＡＩ（人工知能）

★折り紙、編み物、ビーズ細工にも！

1. 特異点を探そう！

・特異点とは、周りと様子が異なる点

・折り紙の角や折り目も特異点！



・ビッグバン
・ブラックホール
・腫瘍（MRIやCTの画像）

名古屋駅前にあった「飛翔」

ジェットコースターのレールやビーズコースターには特異点がない！

ジェットコースター

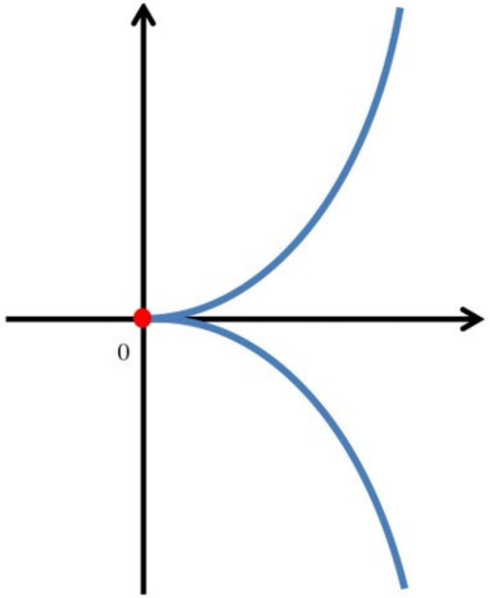
ビーズコースター

引用元：https://www.hape.com/ca/en/toy/double-bubble/E1801

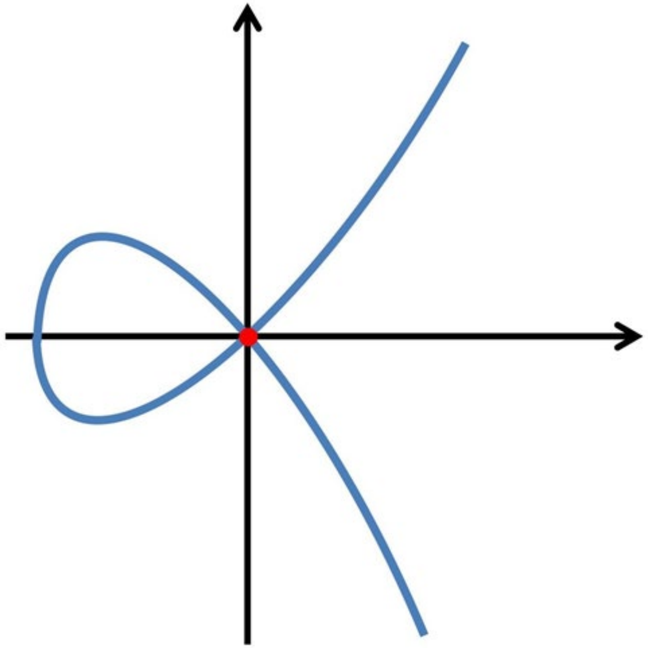
2. 曲線の特異点

xy平面上の曲線 $f(x,y)$=0 □ □ (a,b)□ □ □ □ □ □ □ □□
$f(a,b)$=0 □ □　$\partial f/\partial x\ (a,b)$=$\partial f/\partial y\ (a,b)$ =0 □
□ □□ □ □□□ □ □

$$1.\ \ f(x,y) = x^3 - y^2 = 0$$



$$2.\ \ f(x,y) = x^2 + x^3 - y^2 = 0$$

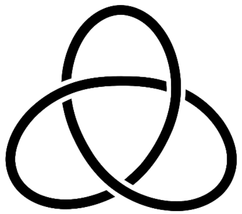


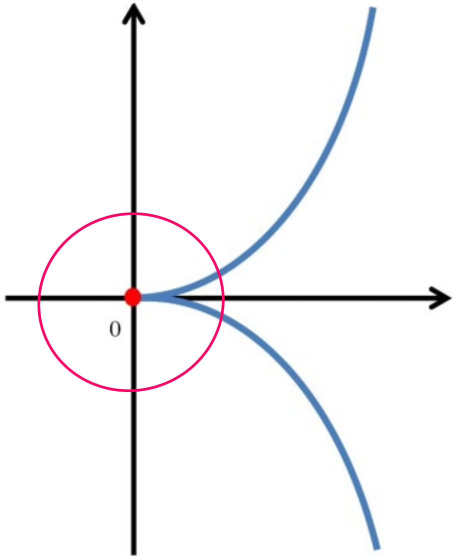
３．特異点の周りの様子

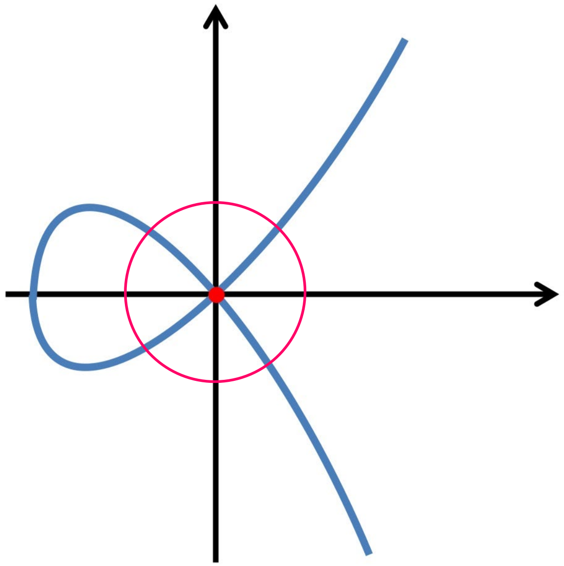
- 変数を複素数だとすると実４次元の中の特異点になる.

　つまり、$x = p + qi,\quad y = r + si$　と置き換えると４変数の式になる

- 特異点（原点）の周りの“３次元球面” $\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{s}^2 = 1$ で切り取ると、切り口に結び目が現れる！







$X = \{(z_1, z_2) \mid z_2^n = z_1^m\} < \mathbb{C}^3$

3次元球面 D は $D_1 \cup D_2$ とかける：

$D_1 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| = 1,\ |z_2| \leqq 1\}$

$D_2 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| \leqq 1,\ |z_2| = 1\}$

求める図形は $X \cap D$ であるから

$(z_1, z_2) \in D$ であるためには

$|z_1| = 1$ 又は $|z_2| = 1$.

X の方程式より $|z_2^n| = |z_1^m|$ であり

$|z_2|^n = |z_1|^m \quad \therefore |z_2| = |z_1| = 1.$

ここで $T = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| = |z_2| = 1\}$

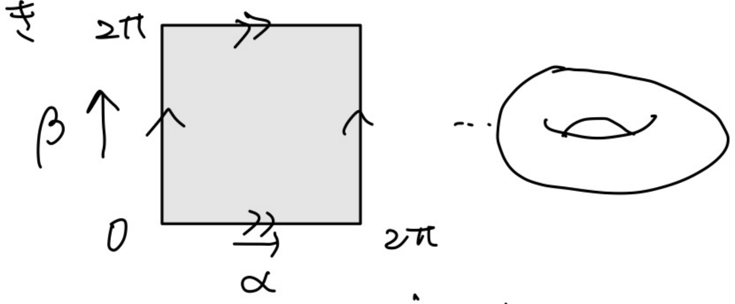
とおくと

$X \cap D = T \cap D$ である.

ちなみに T は トーラスである.

$$\begin{cases} z_1 = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ z_2 = e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta \end{cases}$$

とおくとき

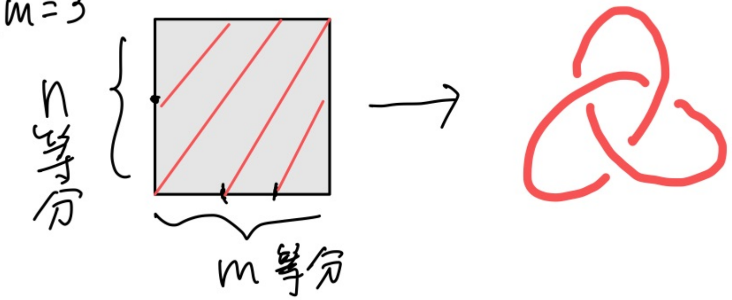


この上で $e^{in\beta} = e^{im\alpha}$ とおくと

$n\beta = m\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

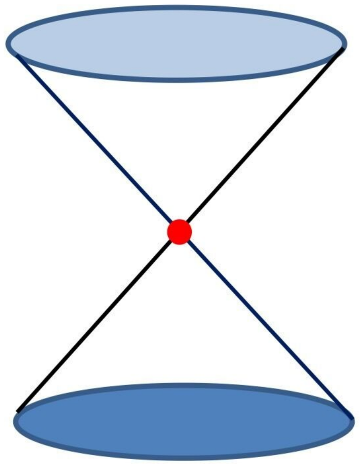
つまり $\beta = \dfrac{m}{n}\alpha + \dfrac{2\pi}{n}k$

$n=2, m=3$

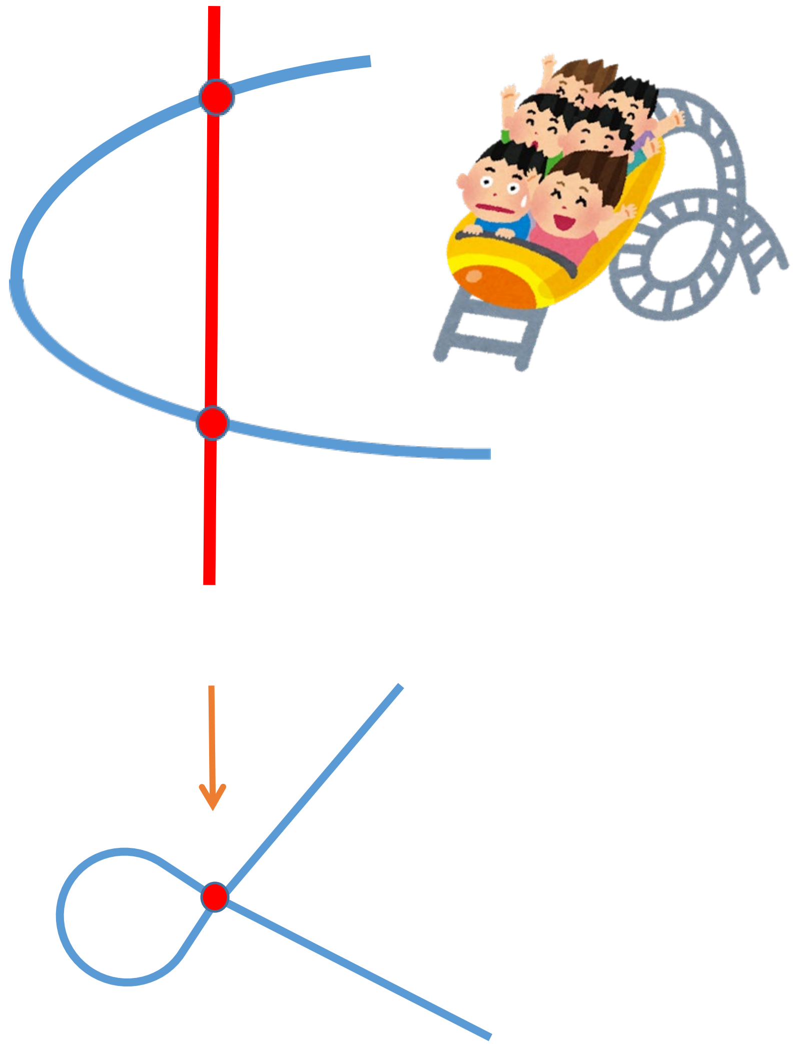


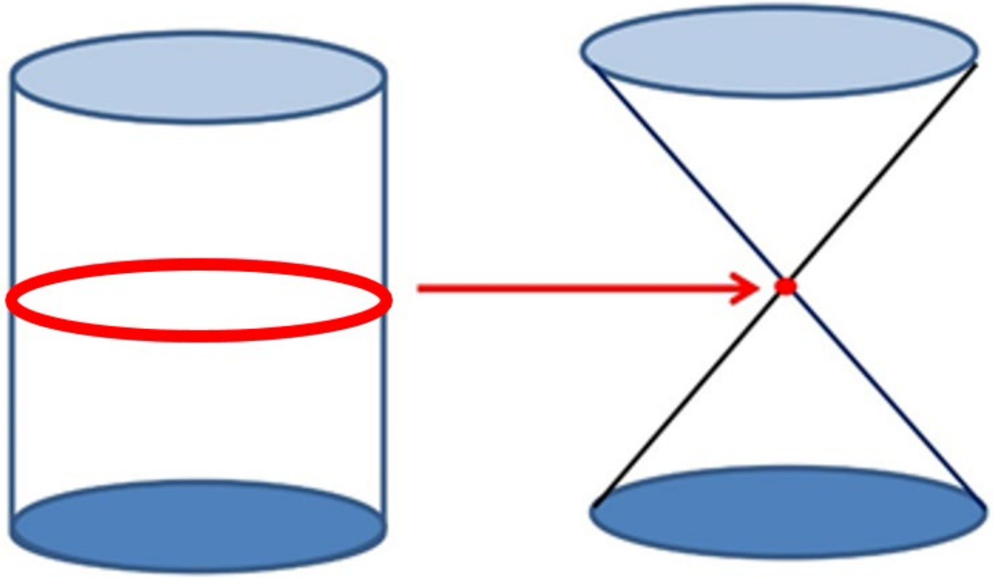
４．曲面（2次元）の特異点

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0$
- 原点(0,0,0)が特異点



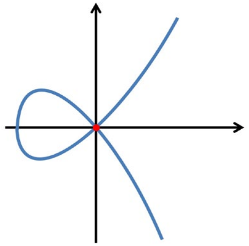
特異点をブローアップ（爆発）で解消する！

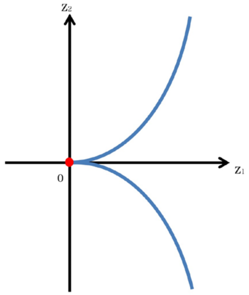




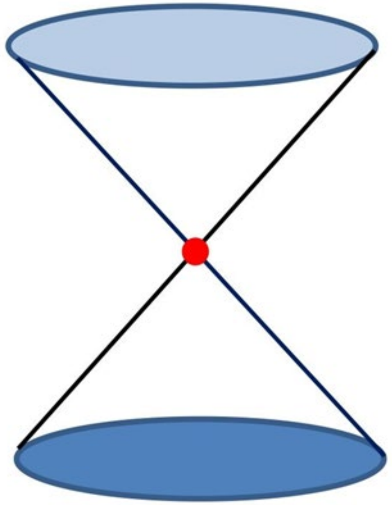
特異点解消するといいことがある！？

引用元：https://www.hape.com/ca/en/toy/double-bubble/E1801





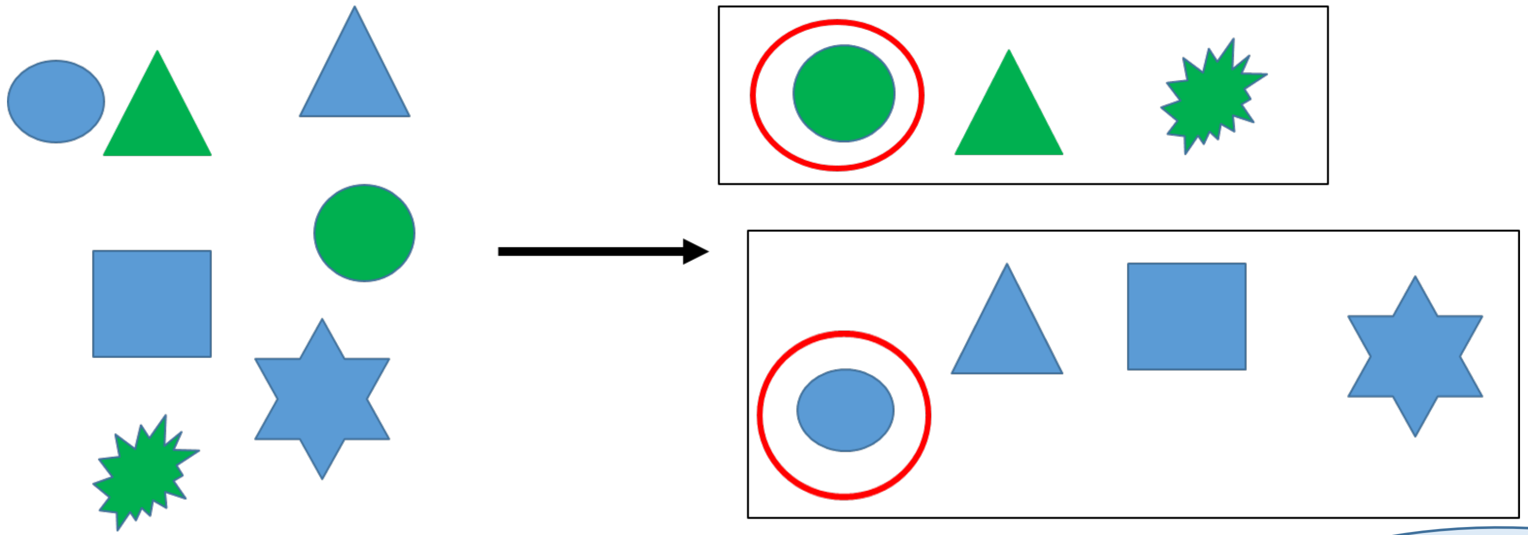
KOBE



NAGOYA

なぜ特異点を解消するのか？

- 特異点はいろいろなところにある。たいていは厄介者！
- 代数幾何学では、代数多様体を分類するときに特異点解消を考える。



日本のフィールズ賞受賞者は3名
小平邦彦(1954年)　2次元代数多様体の分類
広中平祐(1970年)　標数０の特異点解消の存在
森重文(1990年)　3次元代数多様体の分類

フィールズ賞
4年に１度、40歳以下
次の受賞式は2026年
アメリカ・
フィラデルフィア

5．マッカイ対応
群（ぐん）

- 「幾何学的な対称性」を表す群（ぐん）という概念がある.

【群（ぐん）】

ある演算＊で閉じた代数的集合Gの任意の元x,y,zが,

次の性質をみたすとき，群という.

１．(x＊y)＊z=x＊(y＊z)　　（結合法則）がなりたつ.

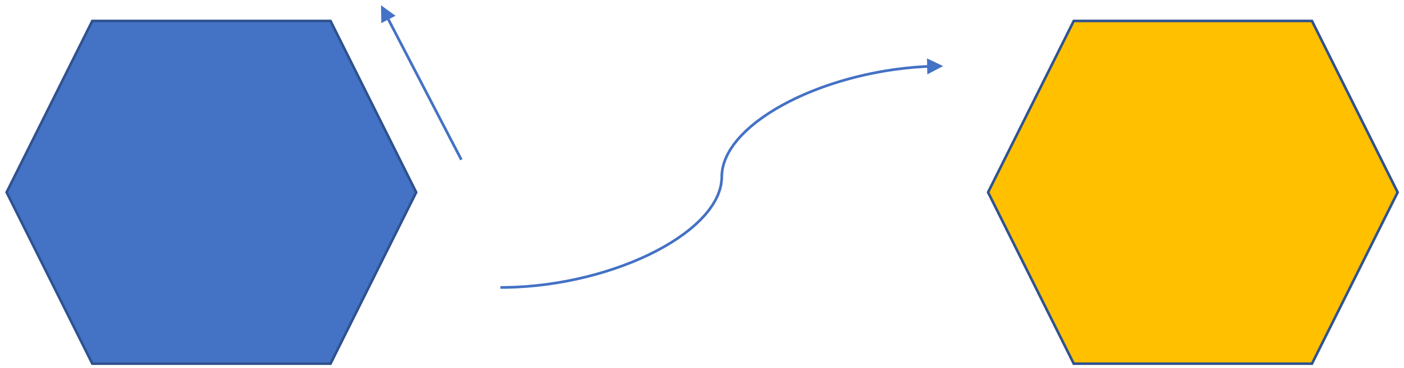
２．x＊e=e＊x=x　をみたす単位元eが存在する.

３．x＊y=y＊x=e　をみたすxの逆元yが存在する.

正６角形の合同変換（回転と裏返し）

- 正六角形を60度回転すると自分自身に重なる（合同変換）．
- これを6回繰り返すと360度の回転でもとに戻る（単位元）．

このような回転で元に戻る操作全体を６次の**巡回群**という.



- このほかに正六角形は裏返しても自分と重ねられる.

回転と裏返しを合わせた操作全体を6次の**二面体群**という.

プラトンの正多面体

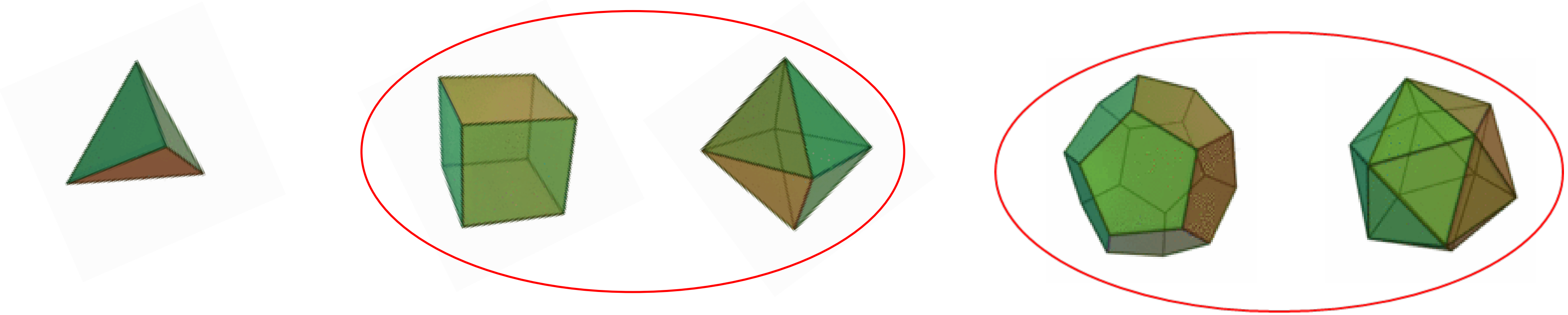
定義　次の①②③をすべて満たすものを正多面体とする

① すべての面が合同な正多角形で構成されている

② どの頂点に集まる辺の数も等しい

③ 凸多面体である

定理　正多面体は5種類しかない. また合同変換の方法は3種類しかない.



正四面体　立方体　正八面体　正十二面体　正二十面体

群の行列表現

- 群を行列を使って表すことができる.
- 2行2列の**行列**　　Ａ＝$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- **単位行列**　Ｅ＝$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　とすると　ＡＥ＝ＥＡ
- Ａの**逆行列**は、ＡＸ＝ＸＡ＝Ｅをみたすもの（Ｘ＝Ａ$^{-1}$)

- 行列の演算は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$　で考える.

二項正多面体群

- 正多面体群を2行2列の行列Ａでかいたもの
- Ａ＝$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は　$ad-bc$=1　をみたす（行列式が１）
- 例　４次の巡回群Ｇ＝{Ｅ，　Ａ，　Ａ^2,　Ａ^3}　Ａ^4=Ｅ　となる.

Ｅ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Ａ＝$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, Ａ^2=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, Ａ^3=$\begin{pmatrix} -i & o \\ o & i \end{pmatrix}$

行列の演算はＡＢ＝$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$＝$\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$

群Ｇで空間を割る（空間の折り紙）

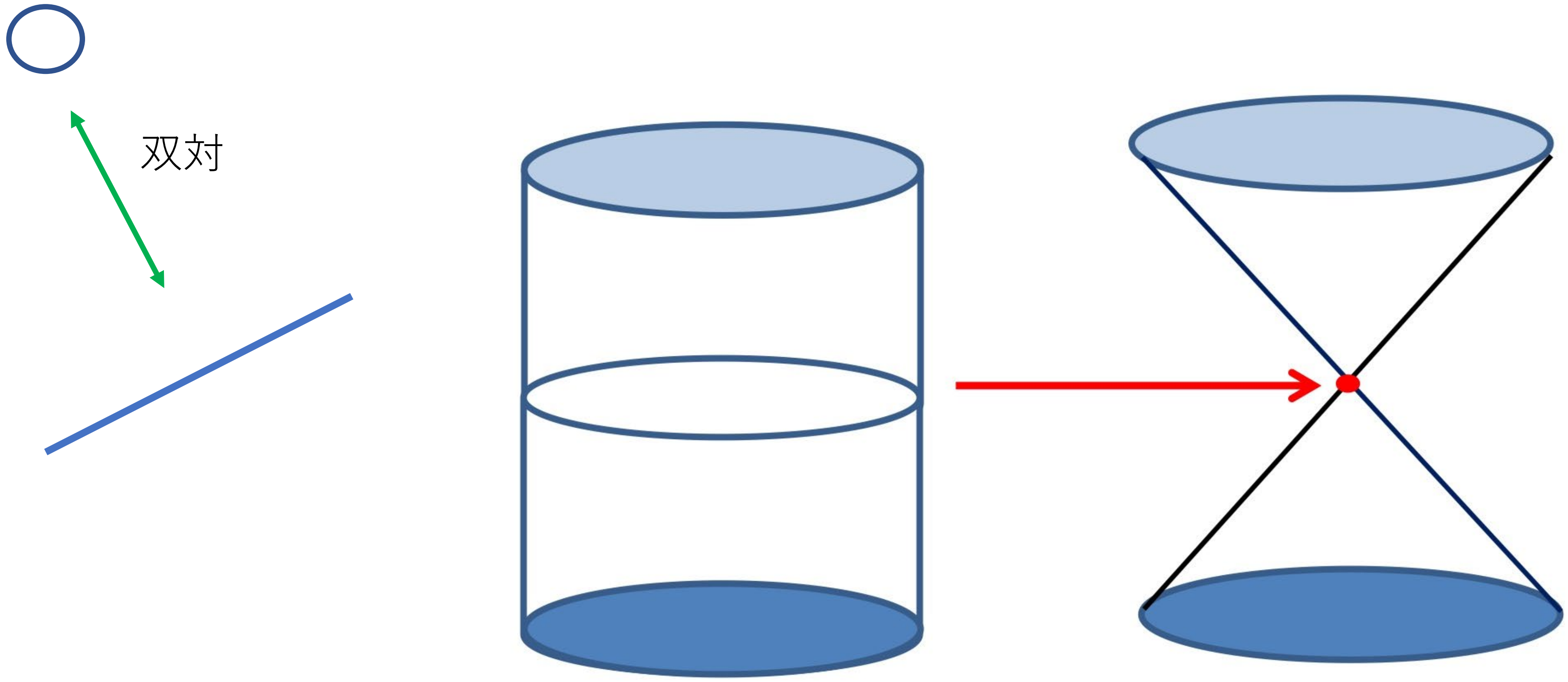
- Ｇの影響を受けない部分（不変式）を考える：
- Gは行列Ａ＝$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ を何回かかけると出てくる
- 行列Ａで不変な2変数x, yを用いた最小次数の多項式を求めると
  x^4, y^4, xy が得られる
  その関係式は x^4＝X, y^4＝Y, xy ＝Ｚとおき、標準形にすると

$$\boxed{X^2 + Y^2 + Z^4 = 0}$$

とかける

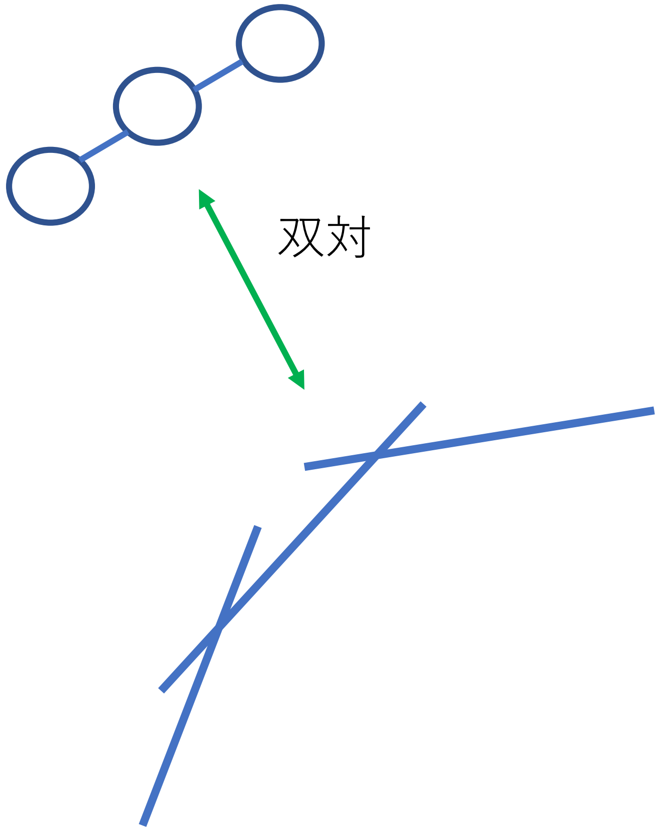
特異点と特異点解消　２次の巡回群

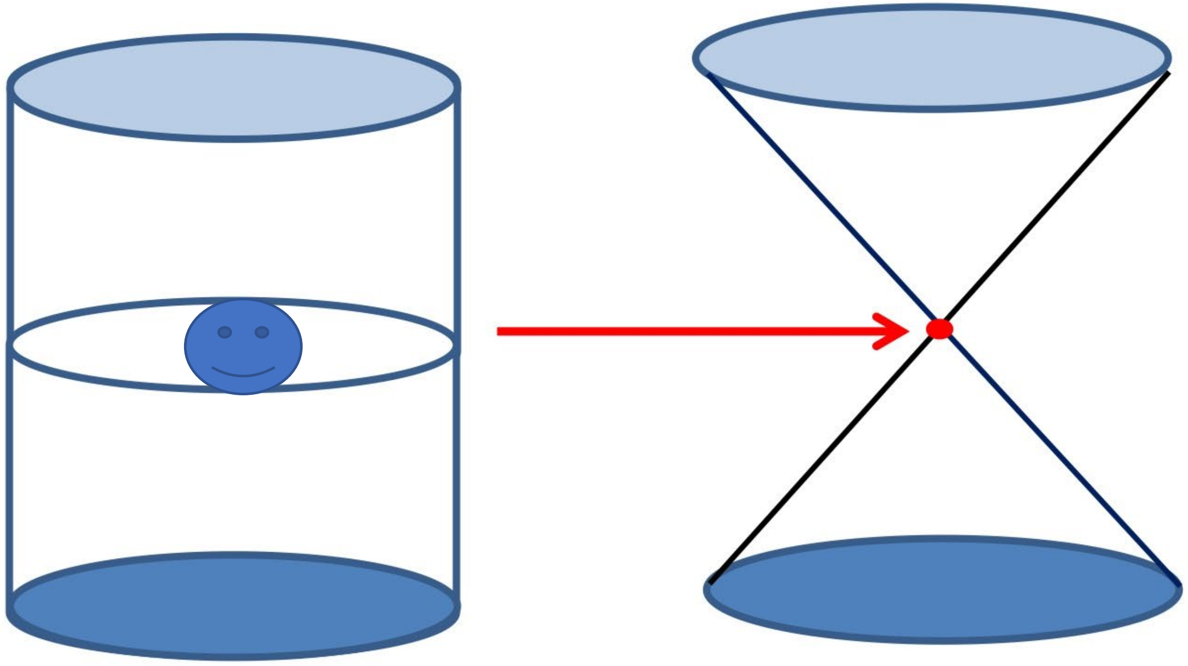
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$



特異点と特異点解消　４次の巡回群

$$\boxed{X^2 + Y^2 + Z^4 = 0}$$





マッカイ対応　n次の巡回群

- 群GはA＝$\begin{pmatrix} a & o \\ o & a^{-1} \end{pmatrix}$ ただしa^n=1 で生成され,

$$G = \{E, A, A^2, \dots, A^n\}$$

- このとき，対応する特異点の定義方程式は

$$\boxed{X^2 + Y^2 + Z^n = 0}$$ となる

- その特異点解消にはn-1本の曲線が出てきて

それらはちょうどn-1個のGの非自明な既約表現と対応する！

マッカイ対応　幾何学と代数学の遭遇！

指標表

	E	A	A^2	A^3
R1	1	1	1	1
R2	1	i	-1	-i
R3	1	-1	1	-1
R4	1	-i	-1	-i

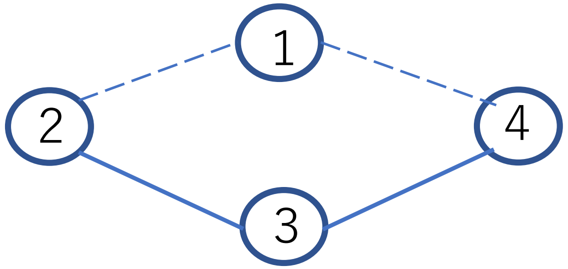
John McKay の発見(1979)

Rp ＊A=$\sum a_{pj} Rp$を計算すると
特異点解消の双対グラフが出てくることを発見!

4次の巡回群の場合：

たとえば　R2＊Aは　Aのところで考えると
R2＊$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$=i＊$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=R3+R1

となり、Rp＊A=R(p+1)+R(p−1)　(p=1,2,3,4)

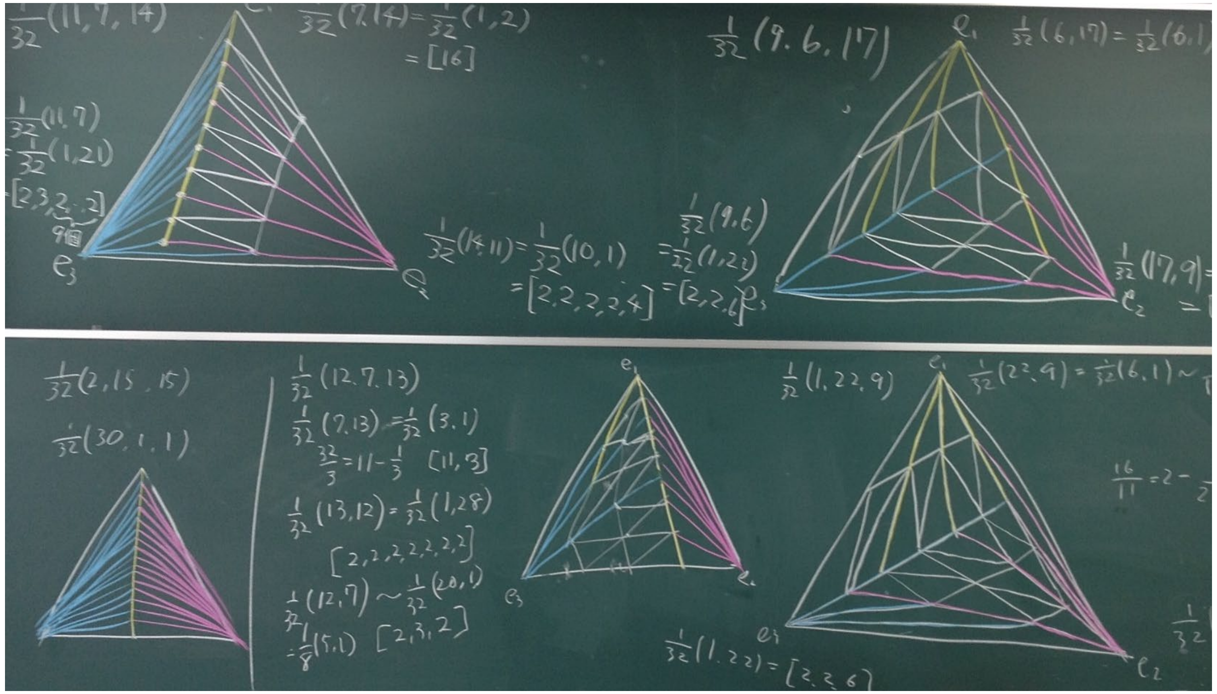


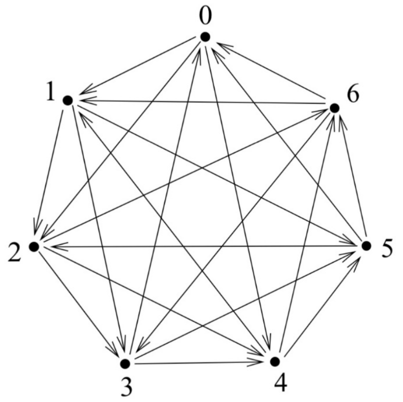
６．3次元の特異点の研究：特異点の謎に迫る！

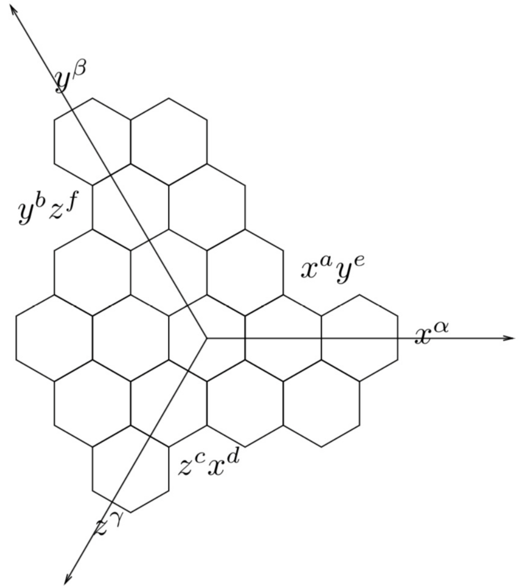
・特異点自体は見た目は同じでも、特異点解消するといろんなものが出てくる！

→　いつどんなものが出てくるのかを調べる

・複素3次元（実6次元）の特異点や特異点解消　→　見る方法（道具）を考える！





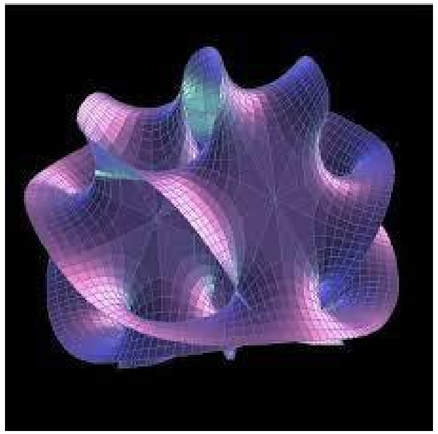


７．物理に現れる特異点

・ブラックホール：強い重力によって、光が出てこられない天体．その中に特異点が隠れている．
・ビッグバン：現在の宇宙は膨張している．宇宙のはじまりの瞬間は点＝特異点．

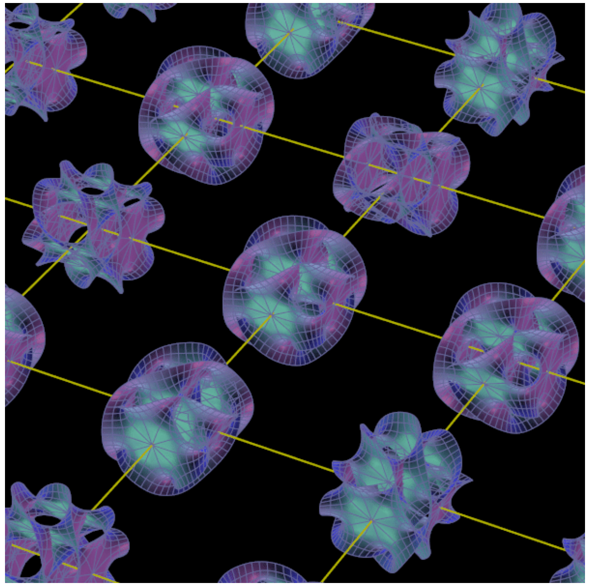
・超弦理論では　宇宙(10次元)＝時空(4次元)＋カラビ・ヤウ多様体(6次元)

カラビ・ヤウ多様体



マルチバース
（複数の宇宙の集まり）

©Jeff Bryant



特異点の研究を使って、ブラックホールの中の様子がわかる日が来るかもしれない！？

Visualization by Jeff Bryant and based on concepts from A.J. Hanson, "A Construction for Computer Visualization of Certain Complex Curves," in "Computers and Mathematics" column, ed. Keith Devlin, of Notices of the American Mathematical Society, 41, No. 9, pp. 1156--1163.

どうもありがとうございました

参考文献

・「研究するって面白い！」（岩波ジュニア新書）
・「美しい数学入門」（岩波新書）
・「ものしり新聞」（東大カブリIPMU）

特異点の周りの計算
（広中平祐氏の講義録）

特異点の周りの様子の求め方

- 参考文献：

京都大学数理解析研究所(RIMS)の数学入門公開講座
広中平祐「特異点と結び目」（1984年）の講義ノート
https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/S59-hironaka.pdf