ICRR-Report-703-2022-2

電磁相互作用の基礎とその応用

ー宇宙線現象の解釈のためにー

(付録:　第一回京都会議（1961）の頃のこと)

西村　純

東京大学名誉教授

宇宙科学研究所名誉教授

東京大学宇宙線研究所　2022年11月

電磁相互作用の基礎とその応用
–宇宙線現象の解釈のために–

西村 純 *

2022 年秋

* 東京大学名誉教授, 宇宙科学研究所名誉教授

目次

I　はじめに

　　電磁相互作用の基礎とその応用について解説を，というご依頼があり，その題目なら「笠原さん」にお願いするのが良いとお答えしました．しかし，笠原さんはすでに２回にわたってこの項目についてお話しされたとのこと．そこで，ここではモンテカルロの対極にある，解析的方式ではどのようなことが行われているかのご紹介をすることにしました*1

　内容はすでに大学で習われた事の復習である．宇宙線現象の解析という点に重点を置いて，その物理的な内容，必要があるときには一般の教科書より詳しく計算の経過なども書いておくことにした．モンテカルロを行う場合の参考になれば幸いである．

　最初に一般的な文献についてここで述べておくことにする．また，個々の項目について必要な文献は最後に示しておいた．

全般にわたる基礎的参考文献

[1] Heitler, W. The Quantum theory of the Radiation. Oxford. University Press (1956)，　沢田克郎訳，吉岡書店　(1976)

[2] Rossi, B, & Greisen, K.: Cosmic-Ray Theory, Rev. Mod. Phys. **13** (1941) 240

[3] Rybicki, G.B. & Lightman, A.P. Radiation Process in Astrophysics. John Wiley & Sons (1979)

[4] Fermi, E. Nuclear Physics. University of Chicago Press, (1950)

[5] Nishimura, J. Theory of Cascade Showers. Handbuch der Physik, Cosmic Rays II **XLVI/2**(46/2), (1967) pp1-114. SPRINGER VERLAG, BERLIN, HEIDELBERG, NEW YORK.

　　これらは著者の世代が参考にしたもので最近ではこのほかに電磁現象の基礎をのべた Ginzburg, Landau- Lifshitz や Feynman などの名著がある

文献 [2] と [5] は電磁シャワー理論を詳しく述べた文献である．このほか，

[6] 西村純，宇宙線のおこす電磁的素過程:　小田稔，西村純，桜井邦共編　宇宙線物理学. 朝倉書店　(1983) pp.42-79

応用数学の文献として

[7] 寺沢貫一, 自然科学者の為の数学概論，岩波書店　(1977)

---

*1 2015 年 4 月に宇宙線研究所で行った講義の内容を，所から本として出版したいので纏めて欲しい，と水本さんと埣さんから依頼があり，最近になってまとめた次第である．

[8] Rossi, B, High Energy Particles, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 569 ページの大著.

[9] Lang Kenneth R.. Astrophysical Formulae: A compendium for the Physicist and Astrophysicist. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. （1999）

[10] (A&S) Abramovitz and Stegun, Handbook of Mathmatical Functions: With Formlas, Graphs and Mathematial Tables, National Bureau of Standard. 1964.

最も著名な数学公式集の 1 つである. 現在，web 上での閲覧に加え，全ページの pdf 版も得られる
https://personal.math.ubc.ca/~cbm/ に入り，
https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf
リンク切れなら https://www.math.hkbu.edu.hk/support/aands/

上記 pdf は画像としての復刻なので文字検索ができない．OCR で文字検索ができるようにしたバージョンは

http://cosmos.icrr.u-tokyo.ac.jp/Misc/abramowitz_and_stegunOCRcomp.pdf

また，NIST[*2] の web サイト
https://dlmf.nist.gov
には A&S の 21 世紀用精神的復刻版ともいうべきものがある[*3]

を挙げておく.

講義は次の４項目に分けて述べることにする.

I. **基礎的な物理量：長さ，断面積，平均自由行程（Mean Free Path）**
II. **解析に当たってよく使われる数学的手法：**
関数変換，複素関数，解析接続，Parseval の定理，
Convolution.
III. **電磁相互作用の基礎過程：散乱，制動輻射，チェレンコフ輻射.......**
IV. **基礎過程の組み合わせによる解析：**
多重散乱，電磁シャワー，Radio 波，Ice Cube...

[*2] National Institute of Standards and Technology

[*3] この web site の序文には: The document you are now holding, or the Web page you are now reading, represents an effort to extend the legacy of A&S well into the 21st century, と書いてあり，現在も update が行われている．ここには A&S は 1964 年に NIST から出版されたと書いてあるが，A&S には National Bureau of Standards(NBS) と書いてある．また，“精神的復刻版” の pdf は
https://univ.jeanpaulcalvi.com/Posters/ConfAuchWeb/abramovitz2.pdf
からとれる．まともな pdf なのでいろいろな場面でクリックで目的地に飛べるようになっている． こちらでは A&S は NBS を引用している.

II　基礎的な物理量

　　注:　以下では cgs 単位系での扱いをする．現在の標準の SI 単位系とは式の表現に多少異なるものが出てくる．典型的には電子の電荷 e が関係する場合，e^2 を $e^2/4\pi\epsilon_0$ で置き換えないといけない．微細構造定数 α は $e^2/\hbar c$ ではなく，SI 系では $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$.

　また，世界標準で使われている記号などについては説明を省いたり，「常数」「定数」の混用もあるかもしれない．

長さ，断面積，平均自由行程 (Mean Free Path), Retarded Potential

II-1　長さの単位

　　電磁相互作用や核相互作用で長さの単位としてよく使われるのは古典電子半径:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \sim 2.8 \times 10^{-13} \quad \mathrm{cm} \tag{1}$$

である．古典電子半径は電子の荷電 e が半径 r_0 の球の表面に集まった静電エネルギーが質量エネルギー mc^2 に等しいとしたときの半径である．

　一方量子論的な電子半径は

$$r_e = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{r_0}{\alpha} \sim 137 r_0 \sim 3.8 \times 10^{-11} \quad \mathrm{cm} \tag{2}$$

ここで

$$\hbar = \frac{\text{Planck Constant}}{2\pi}$$

また，α は電磁相互作用の結合常数で

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

量子論的電子半径は古典電子半径の約 137 倍大きい．

　実際に電磁現象が起きるときには，電子はどちらの大きさに見えるか? この答えはつぎの断面積の節で述べる事にする．

　核相互作用に関連して大切な長さは核力の及ぶ範囲を決める π 中間子の半径 r_π で

$$r_\pi = \frac{\hbar}{m_\pi c} \sim 1.4 \times 10^{-13} \quad \mathrm{cm}$$

で与えられる．

　これは強い相互作用を持っているので核相互作用の際の大きさの目安となっている．次に述べるように陽子ー陽子衝突の時の的の大きさの目安を与えるものと考える事が出来る．

II-2　相互作用の断面積

相互作用の断面積とは衝突して反応が起きる時，相手がどの位の大きさの的であるかを示す量である．電子が古典電子半径を持っているとした場合，電子の断面積は

$$\sigma \sim \pi {r_0}^2 \sim 2.5 \times 10^{-25} \quad \mathrm{cm}^2 \tag{3}$$

となるが，量子力学的な電子半径をとれば

$$\sigma \sim \pi \left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)^2 \sim 4.7 \times 10^{-21} \quad \mathrm{cm}^2 \tag{4}$$

となる．一体どちらが実際の断面積であるのか？

例として，光が入射して量子力学的半径の電子に散乱される場合を考える．まず光が電子に吸収される確率は電磁相互係数，$\frac{e^2}{\hbar c}$，次いで光を放出する確率としてまた電磁相互係数がかかる．結局この断面積は

$$\sigma \sim \pi \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 = \pi \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = \pi r_0^2 \tag{5}$$

となり，最終的には古典電子半径の大きさの的に見える事になる．古典電子半径の大きさならば，電子の的の大きさは (3) 式に示したように

$\sigma \sim \pi {r_0}^2 \sim 2.5 \times 10^{-25} \quad \mathrm{cm}^2$

程度となる．断面積の単位

1 barn $= 10^{-24}$ cm^2

であらわすと，250 mb 程度の 大きさの面積となる．

核相互作用の時の断面積は，π 中間子の広がりから, p-p 衝突の場合

$\sigma \sim \pi \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^2 \sim 60$ mb

と推測される．実際加速器で観測された 10-100GeV 程度の p-p の相互作用の断面積は 40 mb 程度で，おおよそ一致している．

しかし断面積の大きさは，小さすぎて感覚的にどの位の大きさか判らない．そこで，物質中で平均して一回の反応が起きるのに必要な距離を示す平均自由行程 (Mean Free Path)，で表すと感覚的にも分かり易い．

II-3　Mean Free Path(平均自由行程)

反応を起こす的の数が断面積の逆数分だけあれば，反応が平均 1 回起きることになる．このときの物質長を平均自由行程 (m.f.p) と呼んでいる．

- 電磁的相互作用の場合
  物質常数として
  アボガドロ数: $N = 6 \times 10^{23}$ /Mol
  原子番号: Z
  原子量: A
  1 g 中の原子の数 $\dfrac{N}{A}$
  1 g 中の電子の数 $\dfrac{ZN}{A} \sim 0.5N$
  から，断面積が古典電子と同じ大きさであれば ($\sigma \sim \pi r_0^2$) 平均自由行程 (m.f.p) は

$$\text{m.f.p} = \left(\frac{Z \times N}{A}\sigma\right)^{-1} = \frac{A}{Z}\left(\frac{1}{N\pi {r_0}^2}\right) \sim 13.3 \quad \frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \tag{6}$$

  になる．平均自由行程は我々の感覚に合う程度の量になるので，現象の起きる割合が感覚的にもわかる便利な量である．
  実際，光の電子による散乱 (トムソン散乱) では断面積は古典電子の断面積よりやや大きく $\sigma = \dfrac{8\pi}{3} r_o^2$ となり，平均自由行程は

$$5\,\text{g/cm}^2$$

  程度となっている．
- 核相互作用の場合
  核相互作用の時には，原子核の大きさが問題になる．p-p の反応断面積は，実験では数十 GeV の所では
  40 mb
  程度になっている．原子量 A の原子核は A 個の核子が (隙間なく) 詰まっているとすると，その半径は $A^{1/3}$ に比例する．従って，入射する陽子の起こす核反応の衝突断面積は
  $\sigma \sim 40\, A^{2/3}$ mb
  で与えられる．物質 1 g 中の原子核の数は，アボガドロ数 N と原子量 A から
  N/A
  であるので，平均自由行程 L は

$$L = (1g\ \text{中の原子核数} \times \text{断面積})^{-1} = \frac{A}{N\sigma} \sim \frac{A^{1/3}}{40N} \sim 40A^{1/3} \quad \text{g/cm}^2 \tag{7}$$

  で与えられる事になる．
  原子量 A に対する依存性は $A^{1/3}$ になっているので，核相互作用の m.f.p. は物質によってあまり変わらない．原子番号で 10 倍以上違う空気と鉛でも，平均自由

行程を g/cm^2 で表すと各々，90 g/cm^2 及び 200 g/cm^2 程度で，倍程度しか違わない．

- 輻射単位

  シャワー現象などでは制動輻射，電子対生成が主役を演じているが，この現象を取り扱うには，長さの単位として輻射単位 (radiation length; r.l) をとると便利である．

  輻射単位は，電子が輻射でエネルギーを失い平均としてエネルギーが e^{-1} になる厚さで，この単位をとることにより，シャワー現象を物質の特性に無関係に取り扱うことができる．

  輻射の断面積は 後に述べるように Z^2 に比例している．1 g 中に含まれる原子核の数は，原子量を A とすれば $\dfrac{N}{A}$ であるので，輻射単位は g/cm^2 で表すと，

$$\frac{A}{N\sigma} \sim \frac{A}{NZ^2} \sim \frac{1}{Z} \quad \mathrm{g/cm^2} \tag{8}$$

  となり，Z の逆数にほぼ比例することになる．空気でほぼ 36.6 g/cm^2, 鉛で 6.37 g/cm^2 である．

II-4 Retarded Potential (Lienald-Wiehelt Potential)

運動している荷電粒子からの電磁場を Retarded Potential と呼んでいる．電磁場をスカラーポテンシャル ϕ, ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ で書くことにすると，スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは次の方程式で表される．

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = 4\pi\rho \tag{9}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} \tag{10}$$

電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ はこれらのポテンシャルから

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \tag{11}$$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \tag{12}$$

で与えられる．

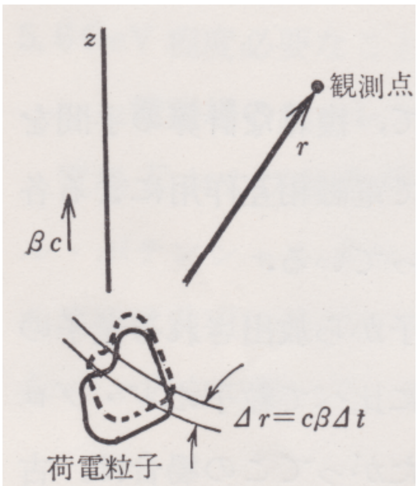

図 1　時刻 t に観測点に収束する光が通過した場所の寄与が丁度観測点のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルになっている．(文献 [6] p.50 の図 3.2.1 より)

電磁場の伝わる速度は光速だから，荷電粒子から離れた観測点での各ポテンシャルの値の推定にはその点を考慮する必要がある．

時刻 t に観測点に収束する光を考えると，その光が通過した場所からの寄与が丁度観測点のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルになっている．

これらのポテンシャルは

$$\phi = \int \frac{\rho}{r} dV|_{t'=t-r/v} \tag{13}$$

$$\vec{A} = \int \frac{\rho \vec{v}}{rc} dV|_{t'=t-r/v} \tag{14}$$

と書き表されるが，全電荷を e とすると

$de = \rho \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{rc}\right) dV = \rho \left(1 - \beta \cos\theta\right) dV$

の関係式から

$$\phi = \int \frac{\rho}{r} dV|_{t'=t-r/v} = \int \frac{de}{r\left(1 - \beta \cos\theta\right)} = \frac{e}{r\left(1 - \beta \cos\theta\right)} \tag{15}$$

$$\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{r\left(1 - \beta \cos\theta\right)} \tag{16}$$

が得られる．これらのポテンシャルから電場や磁場を求めるには (11), (12) 式に示したように時間と空間の微分が必要となる．ただしこの時間と空間は観測地点の値をとる必要があるので計算はやや複雑である．この計算は先に挙げた Heitler などの文献を参照していただきたい．また [9] の第 1 章がより参考になるかもしれない．

ここでは電場と磁場を計算した結果だけ示す

遠方で大きな寄与をする $1/r$ に比例する項だけを 取り出し，$\beta \ll 1$ とすると

$$\vec{E}_\theta \sim \frac{e}{rc} \dot{\beta} \sin\theta \tag{17}$$

$$\vec{H}_\varphi \sim \frac{e}{rc} \dot{\beta} \sin\theta \tag{18}$$

が得られる．(注: (r, θ, φ) の極座標系で荷電粒子は z 方向に加速度運動している．r は観測点への動径，θ は観測点の極角．$\vec{E}_\theta$ はその方向への電場．$\vec{H}_\varphi$ は φ 方向への磁場)

静電場，静磁場は各 $1/r^2$ に比例しているので，ここでの近似では落としている．

II-5 Poynting Vector: Energy Flow/cm^2 s

ポインティングベクトルは

$$\vec{P} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \tag{19}$$

で定義されるベクトルで，電磁場のエネルギーの流れを示す量である．$1/r^2$ に比例しているので，半径をいくらにとっても，球面を通過する エネルギーの量は変わらないことを示しており，この項は荷電粒子から放出される電磁波である事がわかる．

(17), (18) 式に示した

$\vec{E}_\theta$ と $\vec{H}_\varphi$

とは直交しているので，ポインティングベクトルの大きさは

$$P = \frac{c}{4\pi}|\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{e^2}{4\pi r^2 c^3}\dot{v}^2 \sin^2\theta \tag{20}$$

よって, 全球面から流出する電磁場のエネルギーは

$$F = \int_{-1}^{+1} 4\pi r^2 P d\cos\theta = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}^2 \tag{21}$$

で表す事が出来る．e と x の積 ex は dipole(双極子) であるので，ダイポール輻射とも云われている．

光の散乱，制動輻射やシンクロトロン輻射など一連の輻射過程はこの式を使ってほぼ定量的に理解することができる．

この式で重要なことは荷電粒子が加速度を受けていると，ポインティングベクトルは有限 (> 0) になり，電磁場のエネルギーが放出されている点である．電磁波の放出は荷電粒子の加速度の 2 乗に比例している．質量と加速度の積は力であるから，外力を受けた質量の小さい粒子は大きな加速度を受ける．従って電子は中間子に比べると電磁波を放出しやすい．加速度の 2 乗に比例することから，同じ外力を受けてもミュー中間子からの電磁波の放出は電子に比べると約 4 万分の 1 に過ぎないことがわかる．

III　解析に当たってよく使われる数学的手法

複素積分，解析接続，関数変換，Parseval の定理， Convolution(畳み込み積分)
電磁相互作用の断面積を使って，宇宙線現象を解析するためには，適切な数学的手段が必要になる．この際，よく使われる数学的手法や概念についてまとめて復習しておくことにする． 複素積分
解析接続
関数変換
などである．

III-1　複素積分*1

複素数 z の正則関数は，複素面上でどの方向から微分しても同じ値を持っている．いわゆる Cauchy–Riemann の方程式を満たしている．
x 方向と y 方向の二次微分は符号が逆になっており，そのため，複素数の関数は自動的にラプラスの方程式の解となっている．
式で書けば

$$z = x + iy \tag{22}$$

Cauchy- Rieman の方程式は

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y} \tag{23}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{(逆の曲率)} \tag{24}$$

従って，正則な 複素関数はラプラスの方程式

$$\nabla^2 F = 0 \tag{25}$$

を自動的に満たしている．
x 軸の一次微分がゼロの場所であれば関数は (24) 式で逆の曲率を持っているので鞍型の面をなしている．鞍点（Saddle Point）といわれる場所である．

- 複素積分
  複素関数は複素面で積分路が閉じているとき，特異点が閉じた面の中になければ積分値はゼロである．
  特異点としてはポールと分岐点があるが，ここではポールの場合だけ取り扱う．

*3 文献 [7], p.199; ページは版により若干変わる可能性あり

Single Pole，多重 Pole に対して，それらを含む積分路をとると，Cauchy と Goursat(グルサ) の定理で

$$\oint \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = 2\pi i F(z) \quad \text{(Cauchy)} \tag{26}$$

$$\oint \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = 2\pi i \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} F(\zeta)|_{\zeta = Z} \quad \text{(Goursat)} \tag{27}$$

となる，なお，pole の場所での関数値 $F(z)$ は residue(留数) と呼んでいる．
1 次の極があると，積分値は (26）式に示したように
　　$2\pi i \times$ 留数
で与えられる．実関数の積分より，簡単であるとも云える．

- ガンマ関数

ガンマ関数は $p \geq 0$ の場合:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx = p! \tag{28}$$

で定義されるが，これを p がマイナス側でも成り立つ一般化した定義とすると，Γ(p+1) は負の整数

$$p = -1, -2, -3, -4, \cdots \tag{29}$$

で極を持つ関数となる．従って，これを含む 複素積分では，(26), (27) の式からその極に対応する積分が可能になり，無限級数で表す事が出来る．
また，次に示すようにベータ関数，$\mathrm{B}(p,q)$ は．

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{30}$$

$$p = 0, -1, -2, -3, -4, \cdots \quad q = 0, -1, -2, -3, -4, \cdots \tag{31}$$

に極を持っている．
ガンマ関数は複素積分で整数値に連続して極を持つ便利な関数としてよく使われる．またベータ関数 (30) 式もよく使われている．この 2 つの関数は 複素積分にしばしば現れるのでその定義とポールの位置をここに示しておいた．
なお，$\Gamma(p+1)$ の極は (29) 式に示したように，負の整数の場所にあるが，その場所でのガンマ関数の留数は $(-1)^p/p!$ である．つまりガンマ関数 $\Gamma(p+1)$ の極の場所は $p = -1, -2, -3, \ldots.,$ でその場所に対応する Residue は

$$\frac{1}{1!}, \frac{-1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{-1}{4!} \cdots \tag{32}$$

である．この事から，ガンマ関数を組交わせた関数

$$\Gamma(p+1)\Gamma(-p) \tag{33}$$

は，p の整数値にポールを持ち，その留数は
$(-1)^p$
であり，後に無限級数の表示に重要な役割を演じる事が分かる．

III-2　解析接続*2

答えが級数の形で与えられていて，ある領域内では収束するが，ほかの領域では収束しない場合がある．この収束領域内で級数を組み直して，別の形の級数または関数の形に直し，ほかの領域でも収束するようにすることを解析接続するといっている．

例として関数

$$F(x) = \frac{1}{1+x} \tag{34}$$

を取り上げてみる．この関数は $x<1$ の場合には

$$F(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \tag{35}$$

と x のベキ乗に展開できるが，この級数は $x>1$ の領域では収束しない．$x>1$ の領域で収束する級数は (34) を逆に展開して

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \cdots \tag{36}$$

である．

解析接続の問題点は解として級数 (35) が得られたとき，収束域外の $x>1$ で収束するする関数 (34) または級数 (36) をどのようにして求めるかという事である．(35) の級数を，留数が $(-1)^p$ の極を持つ 複素積分と考えると，(33) 式からそれに対応する 複素積分は:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(p+1)\Gamma(-p)x^{-p-1}dp \tag{37}$$

で表される．この積分表示は (35) の級数から出発して $\Gamma(p+1)$ の極を利用して作った 複素積分であるが，積分路は $p=0$ と 1 の間を通っている．$x<1$ のときは，積分を収束させる為には積分路を $-\infty$ 方向に向ける必要があるので $\Gamma(p+1)$ の極による級数となり (34) と一致する．また $x>1$ のときは，積分を収束させる為には積分路を $+\infty$ 方向に向ける必要があるので $\Gamma(-p)$ の極による級数となり (36) とおなじ級数が得られる．

つまり (37) の 複素積分は級数 (34) をもとに，解析接続して得られた収束域を広げた関数という事になる．

---

*3 文献 [7], p.202．ページは版により若干変わる可能性あり．

III-3　関数変換

関数変換は関数を直接求めることが難しい時に，この関数を変換した変換関数の形で解を求め，得られた結果を変換して元の関数の解を求める方法である．英語で出た難しい問題を，まず日本語に翻訳して解を求め，ついで英語に翻訳するような方式である．

III-3.1　フーリエ変換

III-3.1a 三角関数によるフーリエ変換

関数変換で一番良く知られているのはフーリエ変換で，ほかの関数変換はこのフーリエ変換から派生的にでてきたものとみてよい．
フーリエ変換は関数を三角関数の集まりとして表す変換方式である．偶関数であれば cos, 奇関数であれば sin で表すことができる．
関数 $F(x)$ が偶関数であれば，cos のフーリエ変換で表され，その変換関数 G は

$$G(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x) \cos(\xi \cdot x) dx \tag{38}$$

で，$F(x)$ は

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} G(\xi) \cos(\xi \cdot x) d\xi \tag{39}$$

で与えられる．$F(x)$ が奇関数であれば cos が sin と入れ替わる．
フーリエ変換関数 G は元の関数 F に各周波数成分がどれだけ含まれているかを示す量である．

III-3.1b 複素関数を使ったフーリエ変換

三角関数として複素関数 $\exp(i\xi x)$ を使うと

$$\exp(i\xi x) = \cos(\xi x) + i \sin(\xi x) \tag{40}$$

であるので，フーリエ変換は実数の三角関数を使う替わりに

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\xi x} d\xi \tag{41}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \tag{42}$$

$$\tag{43}$$

と書く事が出来る．この場合積分領域は $-\infty$ から $+\infty$ にとってあるので，(38), (39) 式での積分領域ゼロから $+\infty$ が 2 倍になり規格化の係数は $\sqrt{2/\pi}$ の 1/2 で，$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ となっている．

ここで，規格化の定数 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ の妥当性を調べてみる．例としてガウス関数 $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ の場合をとる．ガウス関数の積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{44}$$

を使って，フーリエ積分を行うと，確かに

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-i\xi/2)^2-\xi^2/4} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\xi^2/4} \end{aligned} \tag{45}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\xi^2/4-i\xi x} d\xi = \mathrm{e}^{-x^2} \tag{46}$$

と正確な値が得られる事がわかる．

III-3.2 Parseval の定理: 関数の２乗の総和は周波数成分の２乗の和．

関数の 2 乗の時間積分は周波数成分の 2 乗の周波数積分となっている．これを Parseval の定理と呼んでいる．

関数 $F(t)$ の周波数成分を $G(\omega)$ とおくと, (42) 式から

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega t} dt \tag{47}$$

ここで

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$$

従って

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega+\omega') G(\omega) G(\omega') d\omega d\omega' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)^2 d\omega \end{aligned} \tag{48}$$

ただし，ここで，次の関係式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\omega t+i\omega' t} dt = 2\pi\delta(\omega+\omega') \tag{49}$$

を使用した．

III-3.3　軸対象の二次元フーリエ変換 (ハンケル変換)

二次元のフーリエ変換では，座標が 2 個 (たとえば x 軸, y 軸) があるので，対応する変換係数は 2 個 (たとえば ξ, η) が必要になる．しかし，z 軸に対してして軸対称の場合には，極座標を使い，距離 r と方位角 (φ) 2 個の変数のうち方位角成分は対称性を使って積分できるので消えて，積分には r 成分のみが残る．

方位角成分（φ）の積分を行うと，次に示すように，三角関数はゼロ次のベッセル関数 J_0 となる．

まず軸対象の関数 $F(x, y)$ の二次元のフーリエ変換関数を

$G(\xi, \eta)$

とおくことにする．式で書くと

$$G(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdyF(\sqrt{x^2+y^2})\exp\left[-i(\xi\cdot x+\eta\cdot y)\right] \tag{50}$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta G(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\exp\left[-i\left(\xi\cdot x+\eta\cdot y\right)\right] \tag{51}$$

ここで (x, y) の成分を持つベクトルを $\vec{r}$ とおき，(ξ, η) の成分を持つベクトルを $\vec{\zeta}$ とおくと，z 軸に対して軸対象である場合

$$\begin{aligned} G(\xi,\eta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}F(\vec{r})\exp\left[-i(\vec{\zeta}\cdot\vec{r})\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} rdrF\left(r\right)\int_0^{2\pi}\exp[-i\zeta r\cdot\cos\varphi]d\varphi \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\zeta}G(\vec{\zeta})\exp\left[-i(\vec{\zeta}\cdot\vec{r})\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \zeta d\zeta G\left(\zeta\right)\int_0^{2\pi}\exp[-i\zeta r\cdot\cos\varphi]d\varphi \end{aligned} \tag{53}$$

この内，最後の φ についての積分は

$$\int_0^{2\pi}\exp[-i\zeta r\cdot\cos\varphi]d\varphi = 2\pi J_0(\zeta r) \tag{54}$$

で，$J_0\left(\zeta r\right)$ はゼロ次のベッセル関数である．

したがって，軸対象の場合の 2 次元のフーリエ変換は，ゼロ次のベッセル関数を使って

$$G\left(\zeta\right) = \int_0^{2\pi} F\left(r\right)\cdot J_0\left(\zeta\cdot r\right)rdr \tag{55}$$

$$F(r) = \int_0^{2\pi} G\left(\zeta\right)\cdot J_0\left(\zeta\cdot r\right)\zeta d\zeta \tag{56}$$

となり，簡単に取り扱うことができる．

これをハンケル変換と呼んでいる．

ベッセル関数は上に示したように三角関数と，密接な関係があり，三角関数で $\cos, \sin, \mathrm{e}^{\pm ix}$ があるように，第一種 J，第二種 Y，第三種 $H^{(1)}, H^{(2)}$ のベッセル関数に加えて，虚数のベッセル関数 I, K が存在している (表 1)．その性質は数学の解説書に詳しく述べられている．

表 1　一次元および軸対称の二次元のフーリエ変換の対応表

一次元	軸対称の二次元
Fourier Transform	Hankel Transform
$\cos\theta$	$J_0(r)$　第一種ベッセル関数
$\sin\theta$	$Y_0(r)$　第二種ベッセル関数
$\mathrm{e}^{\pm i\theta}$	$H^{(1),(2)}(r)$　第三種ベッセル関数
$\mathrm{e}^{\pm x}$	$I_0(x), K_0(x)$　変形ベッセル関数

III-4　ラプラス変換 (Laplace 変換)

フーリエ変換では，変数が無限大になった時，発散する関数は変換できない．収束性の強い関数を掛けて変換して，後でその分を戻せば変換が可能になる．ただし変数 x が負の領域では関数はゼロとする．

虚数の係数 ξ を複素数 p に置き換えることにより，変換の適用範囲を著しく広げることができる．つまりラプラス変換ではフーリエ変換の係数を複素数に拡張した変換とみることができる．

式で書くとフーリエ変換

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\xi x} dx$$

に対応して，ラプラス変換は

$$L(p) = \int_0^{\infty} F(x) \mathrm{e}^{-px} dx \tag{57}$$

で定義する．ラプラス変換の逆変換は

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} L(p) \mathrm{e}^{px} dp \tag{58}$$

で与えられる．ただし，積分路はポールを左にみて $-i\infty$ から $+i\infty$ に走るものとする．

- 例として冪関数 x^n の場合を考えることにする．

この関数はフーリエ変換では発散して変換できないが，ラプラス変換は次のようにしてできる．変換関数は

$$L(p) = \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx = \Gamma(n+1)/p^{n+1} \tag{59}$$

となり，$p=0$ の所で，n 次のポールを持っている．逆変換すると

$$F = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} L(p) e^{px} dp \tag{60}$$

$p=0$ の n 次のポールから，Goursat の定理 (27) により，
$F = x^n$
が求められる．

III-5　メラン変換 (Mellin 変換)

関数が冪関数的な形をしている時には，Mellin 変換を使うと便利である．
ラプラス変換 (57) で変数 x を $\log y$，$p = s+1$ とおくと，
$e^{-px}dx \to y^{p-1}dy$
だから，

$$\int F(x) e^{-px} dx \quad \to \quad \int F(y) y^s dy$$

ただし，F は上記 2 つの式で同じではないが，y の関数という意味で F を使っている．
Mellin 変換は関数 F に対して，変換関数 M は

$$M(s) = \int_0^{\infty} F(x)\, x^s dx \tag{61}$$

で定義すると，逆変換は

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} M(s) x^{-s-1} dx \tag{62}$$

である．
Mellin 変換はフーリエ変数を対数で置き換えたようなものと言える，ラプラス変換に対応して，対応関係を書けば，逆変換は，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} L(p) e^{px} dp \quad \to \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} M(s) y^{-s-1} ds \tag{63}$$

となる．

- 例として指数関数の場合を考えてみる

  $F(x)=e^{-ax}$ の場合，メラン変換関数は

$$M(s)=\int_0^\infty e^{-ax}x^s dx=\frac{\Gamma(s+1)}{a^{s+1}} \tag{64}$$

逆変換して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(S+1)}{a^{s+1}}x^{-s-1}ds \quad =1-ax+\frac{(ax)^2}{2!}-\frac{(ax)^3}{3!}+\cdots=\mathrm{e}^{-ax} \tag{65}$$

が得られる．

またすでに，例として出した

$$F\left(x\right)=\frac{1}{1+x} \tag{66}$$

の場合には

$$M\left(s\right)=\int_0^\infty\frac{x^s}{1+x}dx=\mathrm{B}\left(s+1,-s\right)=\Gamma\left(s+1\right)\Gamma\left(-s\right) \tag{67}$$

従って，$x<1$ の場合には $\Gamma(-s)$ の s のプラス側の極，$x>1$ に対しては $\Gamma(s+1)$ のマイナス側の極を使って級数に展開することができて

$$F=1-x+x^2-x^3+\cdots \quad \text{for} \quad x<1 \tag{68}$$

$$F=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\cdots \quad \text{for} \quad x>1 \tag{69}$$

が得られる．

III-6　Convolution (畳み込み積分)

関数 f と g の組み合わせの積分が観測にとって重要な事がある．例えばシャワー現象で，源となるガンマ線がある角分布もって放出され，そのガンマ線から発した電子シャワーを観測するような場合である．電子シャワーも固有の拡がりを持つのでこの双方の拡がりの組み合わせる必要になる．

簡単な例として一次元の場合を扱う．変量 z,y があり，その分布は独立で $f(z)dz, g(y)dy$ に従うとする．変域は両方とも $-\infty\sim\infty$ とする．和 $x=z+y$ で決まる量 x の分布 $F(x)$ を求める．これは

$$\begin{aligned} F(x)&=\int_{-\infty}^\infty dy\int_{-\infty}^\infty dz\delta(x-z-y)f(z)g(y)\\ &=\int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y)dy \end{aligned} \tag{70}$$

と書けるが，このような形の積分を convolution と呼んでいる．

$F(x)$ についてフーリエ変換を行うため，$e^{i\xi x}$ を両辺に掛けて，x について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\xi x}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\xi x}dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\cdot g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\mathrm{e}^{i\xi(x-y)}d(x-y)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\xi y}g(y)dy \\ &= F_f(\xi)\cdot F_g(\xi) \end{aligned} \tag{71}$$

左辺は $F\,(x)$ のフーリエ変換関数であり，右辺は convolution の元となる関数 f, g のフーリエ変換関数の積である．

従って Convolution 型の積分はフーリエ変換を用いて解を求める事が出来る．

以上は一次元の場合を示したが，二次元の場合も同じように，各要素のハンケル変換関数を求めると，その積は求める関数のハンケル変換関数となっている．

式 (70) の例は，変数の差を積分が含んでいるが，変数の比となる積分

$$F(x) = \int_0^{\infty} dyf\left(\frac{x}{y}\right)g(y) \tag{72}$$

の場合には，両辺に x^s を掛けて 0 から ∞ 迄積分して Mellin 変換をする．

関数 F および f, g の Mellin 変換関数をそれぞれ

$$M_F = \int_0^{\infty} F\cdot x^s dx, \quad M_f = \int_0^{\infty} f\cdot x^s dx, \quad M_g = \int_0^{\infty} g\cdot y^s dy$$

とおけば，

$$\begin{aligned} M_F &= \int_0^{\infty} x^s dx \int_0^{\infty} dyf\left(\frac{x}{y}\right)g(y) \\ &= \int_0^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^s f\left(\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{x}{y}\right)\int_0^{\infty} y^s g(y)dy = M_f\times M_g \end{aligned} \tag{73}$$

逆 Mellin 逆変換を行って

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{M_f\times M_g}{x^{s+1}}ds \tag{74}$$

として，関数 $F(x)$ を求める事が出来る．

III-7　複素積分の数値評価 (直接数値積分と鞍点法)

解が複素積分の形で求まったとき，数値をいかにして求めるか?

- **直接数値積分法**

最近では Mathematica のようなソフトがあり，複素数の関数の数値が簡単に求められるので，通常の数値積分 (例えば Simpson 則) の方法で複素面上で数値積分を行うなうことができる．

これは直接数値積分であるが，従来よく用いられてきたのは，鞍点法といわれる近似的な方法である．

- **鞍点法 (Saddle point method)**

実軸上で被積分関数の微分係数がゼロの場所は正則な複素関数では虚軸方向の微分係数もゼロである．二次微分係数の符号は Cauchy-Rieman の方程式 (24) から 逆符号となるので，被積分関数の値は馬の背の形 (鞍点) になる．実軸上の二次微分係数の符号がプラスであれば，虚軸方向の二次微分係数の符号はマイナスになる．従って虚軸上でみた被積分関数は同じ曲率を持つガウス関数で近似することができる．

例としてラプラスの逆変換の式

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} L\left(p\right)\mathrm{e}^{px}dp$$

の場合を考えてみる．この関数の微分係数が実軸上でゼロである場所 p_0 は

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial p} + x = 0 \tag{75}$$

から求められる．

被積分関数を $p = p_0$ 付近で虚軸方向に展開すると

$$L(p)\mathrm{e}^{px} = L(p_0)\mathrm{e}^{\frac{-(\log'' L)}{2}(p-p_0)^2} + \cdots \tag{76}$$

となり，二次微分の近似ではガウスの積分であるので

$$F = \frac{L(p_0)\mathrm{e}^{p_0 x}}{\sqrt{2\pi \log'' L}} \tag{77}$$

が得られる．

この数値が数値積分の近似値となる．この鞍点法はガウス関数で近似しているので，より高次の３次，４次......の微分係数の効果は入っていない．

条件が良いときにはかなり精度の良い結果が得られるが常に精度の良い結果が得られるとは限らない．精度の良さの度合いは，より高次の微分係数を計算して調べることができる ([5],p.89).

IV　電磁基礎過程

電磁相互作用として，宇宙線現象の解析によく使われる現象は,

1. **Thomson 散乱**
2. **Rutherford 散乱**
3. 輻射過程
4. **Cherenkov** 過程

等である．

この章ではこれらの現象について説明する事にする．

IV-1　Thomson 散乱

光が入射して電子を揺り動かすと，電子は加速度をうけて (19) 式に従って光を放出する．これが電子による光のトムソン散乱現象（Thomson 散乱）である．入射光子の電場を E とすると

$$m\ddot{x} = eE \tag{78}$$

から，電子の加速度 $\ddot{x}$ は

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m} \tag{79}$$

毎秒放射される電磁波のエネルギー F は (21) 式から

$$F = \frac{2\mathrm{e}^2}{3c^3}\ddot{x}^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{e}}{mc^2}\right)^2 E^2 c \tag{80}$$

一方毎秒当たり単位面積に入射する光子のエネルギー量は

$$\left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi}\right) c = \frac{E^2}{4\pi} c \tag{81}$$

である．

入射光子量 (式 (81)) × 電子の散乱断面積 (σ) =散乱光子量 (式 (80))
なので，断面積は

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\mathrm{e}}{mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6.65 \times 10^{-25}\ \mathrm{cm}^2 \tag{82}$$

アボガドロ数を N とすれ 1g 中の電子の数は $\dfrac{NZ}{A}$．従って平均自由行程 (m.f.p.) L は

$$L = \frac{1}{N\sigma}\frac{A}{Z}\ \ \mathrm{g/cm}^2 \tag{83}$$

となる．

Z/A ~0.5 の物質中では，平均自由行程は ~5g/cm^2 となり，あまり物質によらない．常温常圧の空気では長さにして約 40 m となる．

光子のエネルギーが高く (電子の静止エネルギーを超る数百 keV 以上) になると，相対論的効果が加わり Compton 散乱となる．散乱断面積は Klein-Nishina の式で示されているが，エネルギーと共に，断面積は減少して行く．

IV-2　Rutherford 散乱

荷電粒子の原子核による散乱は Rutherford 散乱とよんでいる．光の散乱は前の章に述べたが，入射した荷電粒子から見て原子核の持つ電磁場を仮想的な光の集まりと考えると，入射した荷電粒子がこの仮想的な光を吸収放出した反動による散乱を Rutherford 散乱と考えることもできる．

より直接的には運動量の変化が力積という関係を使って，次に示すように取り扱うことができる．図 2 に示すように，速度 v，電荷 e の粒子が，衝突係数 b で，原子番号 Z の原

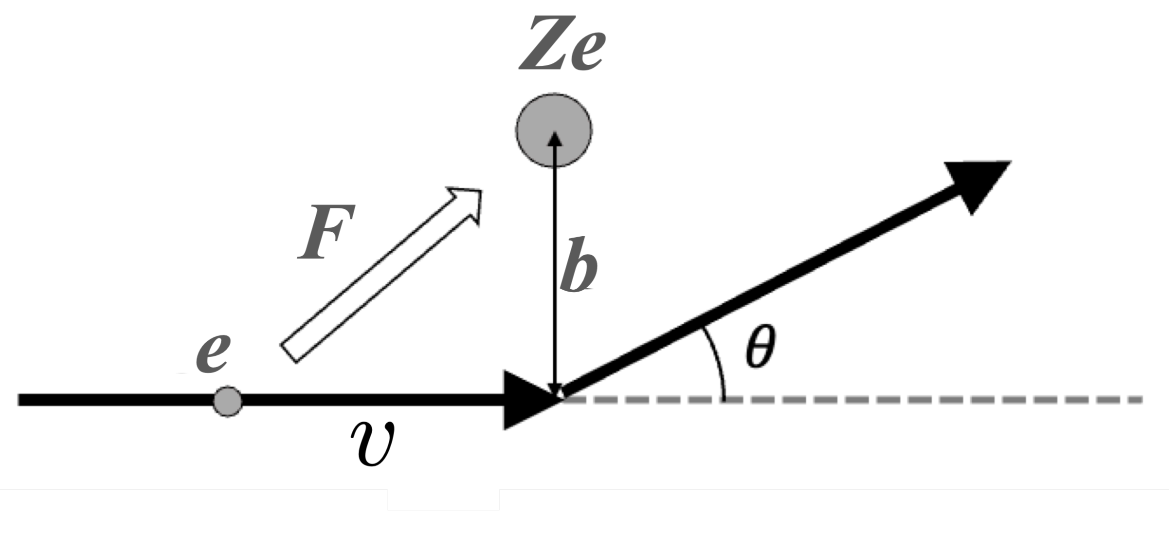

図 2　荷電粒子の原子核との衝突

子核に衝突する場合を考える．

F: クーロン力

b: 衝突係数

v: 入射粒子速度

θ：散乱角

クーロン力 F は

$$F = \frac{Ze^2}{b^2 + (vt)^2} \tag{84}$$

F の b 方向の成分は

$$F_T = \frac{bZe^2}{(b^2 + (vt)^2)^{3/2}} \tag{85}$$

である．散乱角 θ は全運動量 P と，b 方向の横成分, P_T を使って

$$\theta = P_T/P \tag{86}$$

と表す事が出来る．　運動量の変化は力積なので,

$$\Delta P_T = F_T \Delta t \tag{87}$$

従って

$$P_T = \int_{-\infty}^{+\infty} F_T dt = \frac{2Ze^2}{bv} \tag{88}$$

(86) 式から

$$\theta = P_T/P = \frac{2Ze^2}{bPv} \tag{89}$$

衝突係数 b の分布は $2\pi bdb$ であるので，これを散乱角 θ の分布に書き直すと

$$2\pi bdb = \frac{8\pi Z^2 \mathrm{e}^4}{P^2 v^2 \theta} d\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{4Z^2 \mathrm{e}^4}{P^2 v^2} \frac{2\pi\theta}{\theta^4} d\theta \tag{90}$$

がえられる．より正式に計算した Rutherford 散乱の断面積は

$$d\sigma = 2\pi Z^2 \frac{r_0^2}{4} \frac{(mc)^2}{P^2 \beta^2} \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{91}$$

と θ の小さい所では完全に一致していて，Rutherford 散乱の本質は，上に述べた方式で示された内容である事がわかる．

Rutherford 散乱の (91) 式では散乱角は 0 から ∞ を含んでいるので，全断面積も散乱角の 2 乗平均も発散する．しかし，実際には，原子と原子核は有限な大きさを持っているため，散乱角は許される範囲が決まってくる．式 (89) に示すように散乱角は衝突係数に逆比例していので，各々の大きさに対応して

$\theta_{min} \sim 1/$ 原子半径, $\theta_{max} \sim 1/$ 原子核半径,

で与えられ，散乱角 θ は有限な値の領域にあるので全断面積，散乱角の 2 乗平均も有限値を持っている．ここで

原子半径$=b_{max} \sim 137^2 r_0$, 原子核半径 $= b_{min} \sim 0.57 r_0$

程度の値を持っている

IV-3　輻射過程

次に輻射過程について調べることにする．

すでに述べたように，制動輻射 (放射) では発生する電磁波のエネルギー分布は周波数に無関係であり，光子の周波数でいえば 周波数の逆数に比例する．この特徴はどこから由来するものであるか，ここで調べてみることにする．

荷電粒子が原子核のそばを通過すると， 原子核の方向にクーロン力を受け，加速度が生じ，散乱される．Rutherford 散乱の時にすでに述べたが，衝突係数を b と置くと，横向き方向のクーロン力は

$$F_T = \frac{b \cdot Ze^2}{(b^2 + (vt)^2)^{3/2}}$$

となる．

電子はこのクーロン力により加速度を受け，通過に伴い

$$\frac{2\mathrm{e}^2}{3c^3}\ddot{\mathrm{x}} \tag{92}$$

のエネルギーの電磁波を放出することになる．どのような 周波数成分の電磁波を放出するかを調べるには，前に述べた，Parseval の定理が役に立つ．Parseval の定理では関数 F とそのフーリエ成分 $G(\omega)$ との間に (48) 式に示したように

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\,(t)^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)^2 d\omega \tag{93}$$

という関係がある．つまり，加速度 F の 2 乗の時間積分は，加速度のフーリエ成分 G の 2 乗の総和に等しい．

この公式を使うと，全放出エネルギーは

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^2}{3c^3}(\ddot{x})^2 dt = \frac{2e^2}{3\pi c^3}\int_0^{\infty} G(\omega)^2 d\omega \tag{94}$$

加速度の周波数成分は

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{Z\mathrm{e}^2 b\cos\omega t}{m(b^2+v^2t^2)^{3/2}} = \frac{2Z\mathrm{e}^2\omega K\left(1, \frac{b\omega}{v}\right)}{mv^2} \tag{95}$$

K は表 1 に示したように虚数変数の変形ベッセル関数またはマクドナルド関数といわれるものであるが，$Z < 1$ のときには

$$K(1, z) \sim 1/z \tag{96}$$

と近似できる．したがって

$$\frac{b\omega}{v} < 1$$

のとき (ω が小さい，つまり放出された二次光子のエネルギーが低いとき) には

$$G(\omega) \sim \frac{2Ze^2}{mbv} \tag{97}$$

となる．従って放出される電磁波のエネルギーは周波数別に

$$\frac{2\mathrm{e}^2}{3\pi c^3} G(\omega)^2 d\omega = \frac{8}{3\pi} \frac{Z^2}{\hbar c} \left(\frac{\mathrm{e}^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c^2}{v^2} \frac{1}{b^2} \hbar d\omega \tag{98}$$

放出される電磁波のエネルギーの周波数成分は周波数によらず一定になる．別な言い方をすれば，バンド幅 $d\omega$ に比例している．

衝突パラメータ b の分布は $2\pi bdb$ であり，光子のエネルギー

$\hbar\omega$

を放出する断面積は，この近似的な取り扱いでは

$$\sigma(v, \omega) = \frac{16}{3} \frac{Z^2}{\hbar c} \left(\frac{\mathrm{e}2}{mc^2}\right)^2 \frac{c^2}{v^2} \frac{db}{b} \frac{d\hbar\omega}{\hbar\omega} \tag{99}$$

で与えられる事になる．

制動輻射で発生するエネルギー w のガンマ線のスペクトルが $1/w$ の形で低エネルギーで増加するのは，クーロン場のフーリエ成分の形に由来している事がわかる．衝突パラメータ b には Rutherford 散乱の時に述べたように，原子の形状因子 $\log(b_{max}/b_{min})$ が輻射の断面積にも現れる事が分かる．ここでも

$$\log(b_{max}/b_{\min}) = 2\log(191 Z^{-1/3}) \tag{100}$$

を採用することにする

以上が輻射断面積の 周波数依存性などの古典的な 解釈であるが，実際には，

- **原子周辺の電子による Screening 効果**
- **Landau Pomeranchuk 効果**

が現れて断面積の形は変わる．

詳しくはそれに関連した文献を読んで頂きたい．

IV-4　チェレンコフ効果

荷電粒子が物質内で光子を発生する過程としては，輻射過程のほかにチェレンコフ効果と呼ばれるものがある．

チェレンコフ効果は屈折率 n の媒質中を高速 (v) の粒子が通過する時に光子を放出する現象である．電磁場のスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル A の伝搬速度は，屈折率が n の物質中では c/n であるので，荷電粒子の速度 v の方が早くなる事が起き得

る．高速で動く荷電粒子により物質中で誘起された電磁場の干渉により光子が放出される事になる．

チェレンコフ効果で放出される光子の量は粒子の速度に依存するので，荷電粒子の速度や電荷の検出，電子シャワーからの Radio 波の放出の機構として利用されかつ研究が進められている．

電荷 Ze の粒子が速度 β で屈折率が n の物質を z 軸方向に通過する場合，スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル A は

$$\nabla^2\phi - \left(n^2\beta^2 - 1\right)\phi = 4\pi\frac{Ze}{\sqrt{n}}\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y) \tag{101}$$

$$\nabla^2 A - (n^2\beta^2 - 1)A = 4\pi\frac{Ze}{c\sqrt{n}}\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y) \tag{102}$$

を満たす．$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおき，荷電粒子の通路にそって軸対象であることを使うとハンケル変換（2 次元のフーリエ変換）を施して解を求めることが出来る．

遠方で波動的に進行する解は

$$\phi A \sim \frac{Ze}{\sqrt{n}} H_0^1\left(\sqrt{n^2\beta^2 - 1}\cdot\omega\cdot r\right)\mathrm{e}^{i\omega(z - vt)} \tag{103}$$

$$\sim \frac{Ze}{\sqrt{n}}\frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{n^2\beta^2-1}\cdot\omega\cdot(r+z-vt)}}{\sqrt{\sqrt{n^2\beta^2 - 1}\cdot\omega\cdot r}} \tag{104}$$

で与えられ，結局通過物質 1cm あたりに放出される光子の energy 量は Poynting ベクトル (19) を使って

$$Z^2\mathrm{e}^2\int_0^\infty 2\pi r dr\frac{[E\cdot H]}{4\pi}d\omega = Z^2\mathrm{e}^2\left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right)d\omega \quad /\mathrm{cm} \tag{105}$$

従って，通過物質 1cm あたりに放出される光子の数は

$$\frac{Z^2e^2}{\hbar c}\left(1 - \left(\frac{1}{n\beta}\right)^2\right)d\omega = 2\pi\frac{Z^2e^2}{\hbar c}\left(1 - \left(\frac{1}{n\beta}\right)^2\right)d\nu \tag{106}$$

となる．

$Z = 1$ の荷電粒子で，通過物質が水の場合，n˜1.33 で，可視光の範囲を 300nm から 600nm の範囲にとると，放出される光子の数は 1cm 当たり約 320 個となる．

V　宇宙線現象の解析

V-1　多重散乱

Rutherford 散乱の断面積は，θ^{-3} に比例するので, $\theta \sim 0$ の極限で発散するように見える．しかし実際には原子は電子の雲に囲まれているので，原子半径以上の衝突半径 b のところでの散乱は起きない．従って，散乱の断面積は有限である．同じように，原子核半径以下の衝突半径 b ではここに記述したような散乱は起きない．実際におきる散乱の全断面積は原子半径や原子核の荷電分布のパラメータを含むことになる．

既に述べたように，原子核による制動輻射の場合にも，原子の形状パラメーターが断面積に同じような形で入ってくる．

Rutherford 散乱では，小さい角度での散乱の断面積が大きい．小さい散乱でも多数回散乱を繰り返すと，最終的に大きな散乱角となる．これを多重散乱と呼んでいる．

n 回散乱した角度のベクトル和は，平均値はゼロで，2 乗平均は n に比例する．式で書けば

$$< \vec{\theta} > = < \vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_3 + \ldots > = 0 \tag{107}$$

$$\begin{aligned} < \theta^2 > &= < (\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_3 + \vec{\theta}_4 + \vec{\theta}_5 + \ldots)^2 > \\ &= < \theta_1^2 > + < \theta_2^2 > + < \theta_3^2 > + \ldots + \\ &\quad 2 < \vec{\theta}_1 \cdot \vec{\theta}_2 > + 2 < \vec{\theta}_1 \cdot \vec{\theta}_3 > + \ldots + 2 < \vec{\theta}_2 \cdot \vec{\theta}_3 > + \ldots \end{aligned} \tag{108}$$

$$\sim n < \theta_1^2 > \tag{109}$$

散乱回数は通過した物質量に比例するので，散乱角の 2 乗平均は物質の厚さに比例する事になる．

Rutherford 散乱の時には平均 2 乗散乱角度 $< \theta_1^2 >$ は，(91) の式から

$$< \theta_1^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \cdot \theta^2 d\theta = 8\pi \frac{Z^2 \mathrm{e}^4 (mc)^2}{p^2 \beta^2} r_0^2 \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\theta^3} \tag{110}$$

$$= 8\pi \frac{Z^2 \mathrm{e}^4 (mc)^2}{p^2 \beta^2} r_0^2 \log(b_{max}/b_{min}) \tag{111}$$

が得られる．式 (100) で示したが，$\log(b_{max}/b_{\mathrm{min}}) \sim 2\log(191 Z^{-1/3})$ である．前に述べた輻射単位も同じ形の形状因子を含んでいて，

$$\left[4 \frac{\mathrm{e}^2}{\hbar c} Z^2 \frac{N}{A} r_o^2 \log\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \right]^{-1} \tag{112}$$

と表されているので，散乱物質の深さを輻射単位ではかると，深さ t を通過したときの平均 2 乗散乱角は

$$< \theta^2 > \sim 4\pi \frac{\hbar c}{\mathrm{e}^2} \left(\frac{mc}{p\beta}\right)^2 t = \left(\frac{E_s}{p\beta c}\right)^2 t \tag{113}$$

と書くことができる．ここで

$$E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} m_e c^2 \sim 21\ \mathrm{MeV} \tag{114}$$

である．

ここまでは，物質を通過した時の平均散乱角であるが，次に散乱角の分布の求め方について述べる事にする．

V-1.1　Fokker Planck 近似

Rutherford 散乱では前方散乱が多く，角分布を計算するには，散乱による角分布のずれが少ないことに着目して，Taylor 展開を使う Fokker Planck 近似と呼ばれる方法が有効な事が知られている．

Z 軸に沿って輻射単位ではかって深さ t における入射した粒子の散乱角分布を

$$F(\theta_x, \theta_y, t) d\theta_x d\theta_y \tag{115}$$

とおく事にする．取り扱いを簡単にするために，以下 2 次元の場合（y, z 面を射影した x, z 面）について角度 θ_x についての分布の取り扱いを述べる事にする．3 次元の場合は θ_y の成分を加えておなじように取り扱う事ができる．

Rutherford 散乱で，2 次元に射影した断面積を

$$d\theta_x \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\theta_x, \theta_y) d\theta_y = \sigma(\theta_x) d\theta_x \tag{116}$$

とおき，2 次元の角分布関数をあらためて $F(\theta_x)d\theta_x$ とおくと，角分布関数を求める微分方程式は深さ t を輻射単位ではかり

$$\frac{dF}{dt} = -F \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\theta'_x) d\theta'_x + \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta_x - \theta'_x) \sigma(\theta'_x) d\theta'_x \tag{117}$$

で与えられる．右辺 2 項目 の被積分関数の F を Taylor 展開すると，

$$F(\theta_x - \theta'_x) = F(\theta_x) - \theta'_x \dot{F} + \frac{1}{2!} \theta'^2_x \ddot{F} - \frac{1}{3!} \theta'^3_x \dddot{F} + \cdots \tag{118}$$

となり，

右辺 1 項目は (117) 式の一項目と消し合う

2 項目の積分はずれ角 θ' の 1 次の項は散乱角の対称性からゼロ

2 次の項は有限

　3 次の項は 0
となる．４以上の項を無視すると，多重散乱の拡散方程式

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_x'^2 \sigma(\theta_x') d\theta_x' \cdot \frac{\partial^2}{\partial\theta_x^2} F(\theta_x) \tag{119}$$

$$= \frac{<\theta_x^2>}{2} \frac{\partial^2}{\partial\theta_x^2} F(\theta_x) \tag{120}$$

が得られる．ここで

$<\theta_x^2> + <\theta_y^2> = <\theta^2> = \left(\frac{E_s}{p\beta c}\right)^2$

の関係を使うと，拡散方程式は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{<\theta^2>}{4} \frac{\partial^2}{\partial\theta_x^2} F \tag{121}$$

と書く事ができる．

　拡散方程式の解はフーリエ変換で簡単に答えが求まる．拡散方程式の両辺に $\mathrm{e}^{i\xi\theta_x}$ を掛け，θ_x について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると，F のフーリエ変換関数を G とおき，

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{<\theta^2>}{4}\xi^2 G \tag{122}$$

したがって

$$G = G_o \mathrm{e}^{-\frac{<\theta^2>}{4}\xi^2 t} \tag{123}$$

G_o は粒子の入射条件で決まる関数で，$t = 0$ で物質に垂直に入射すれば

$$t = 0 \text{ で } F = \delta(\theta_x)$$

したがって，$G_o = 1$ が得られる．(123) 式を逆フーリエ変換すると

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G \cdot \mathrm{e}^{i\xi} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi <\theta^2> t}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta_x^2}{<\theta^2> t}} \tag{124}$$

が得られる．散乱角分布 F は，広がり

$\sqrt{<\theta^2> t} = \frac{Es}{p\beta c}\sqrt{t}$

を持つガウス分布になっている事が分かる．実際この関数を使って 2 次元の散乱角の 2 乗平均を計算すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_x^2 F(\theta_x) d\theta_x = \frac{1}{2} <\theta^2> = \frac{1}{2}\left(\frac{E_s}{p\beta c}\right)^2 t \tag{125}$$

y 軸方向についても同じになるので,

$$< \theta^2 > = < \theta_x^2 > + < \theta_y^2 > = \left(\frac{E_s}{p\beta c}\right)^2 t \tag{126}$$

が得られるののので，輻射単位深さ t での粒子の平均散乱角は

$$< |\theta| > \sim \sqrt{< \theta^2 >} = \frac{E_s}{p\beta c}\sqrt{t} \tag{127}$$

前述のように E_s は 21MeV 程度である．運動量 2GeV/c の電子，ミューオン，陽子が 5 mm($\sim$ 1 r.l) 程度の鉛板を通過すると，約 0.01 ラジアン (0.5 度) 程度の散乱角度をもっていることがわかる[*4]

この解は Fokker Planck 近似を使っているのでる適用限界がある．散乱角度が増えると散乱確率が減るので，ある角度以上では散乱確率が小さくなり，散乱確率は 1 回以下となる．その領域では，散乱分布は Rutherford 散乱の断面積の形，$\theta^{-3}d\theta$ となることが期待される．

これは，Fokker Plank 近似ではここに示したようにガウス分布となるので，ある角度以上では冪関数 $\theta^{-3}d\theta$ の方が大きい値を示すことになることからもわかる．したがって，大きい散乱角の領域での多重散乱を取り扱うのには，Fokker Planck 近似は適用限界を超えていることがわかる．

V-1.2　Convolution 積分による取り扱い

大きな角度を含む散乱を取り扱うには，元の式を Convolution 型 の積分として解くことでできる

2 次元では Scott[11] はフーリエ変換を使い，3 次元では Moliére[12] がハンケル変換で Convolution type の積分として取り扱った．

Moliére は Convolution 型の積分を分解し，整理し直すことのことによって，粒子の衝突回数の対数の逆数に展開した形の級数で解を表した．ここではハンケル変換を使った Moliére の三次元 の取り扱いについて述べることにする．**(以下角度 θ，その変換パラメータ ζ は 2 次元ベクトル由来であることに注意)**

散乱角を θ とおき，角分布関数を

$$F(\theta)2\pi\theta d\theta$$

とおくと，粒子伝搬の方程式は

$$\frac{dF}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F(\theta-\theta') - F(\theta)\right)\sigma(\theta')d\theta' \tag{128}$$

[*4] ここでは荷電粒子が $\sim$ 1 r.l 走る間のエネルギーロスや粒子発生などの相互作用は考慮してないから，この概算が一番よく当てはまるのはミューオンの場合である．後述のように精度の高い計算では Moliére の式が用いられることが多いが，Gauss 近似を改良して精度を上げた取り扱いでは $E_s = 19.3$ MeV が用いられる．

F のハンケル変換関数を $G(\zeta)$ とおくと，(55), (56) 式から

$$
\begin{aligned}
G(\zeta) &= \int_0^\infty J_0(\zeta\theta)F(\theta)\theta d\theta \\
F(\theta) &= \int_0^\infty J_0(\zeta\theta)G(\zeta)\zeta d\zeta
\end{aligned}
$$

となる．

伝搬方程式 (128) の両辺にベッセル関数 $J_0(\zeta\theta)$ をかけて，θ について積分すると，変換関数 G の式として

$$
\frac{dG}{dt} = G\int_0^\infty (J_0(\zeta\theta)-1)\sigma(\theta)d\theta \tag{129}
$$

が得られる．したがって G の解として

$$
G = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\zeta\theta)\mathrm{e}^{2\pi\int_0^\infty (J_0(\zeta\theta)-1)\sigma(\theta)d\theta}\zeta d\zeta \tag{130}
$$

が得られる．指数関数の肩に乗っている関数を次のように展開する．

$$
2\pi\int_0^\infty (J_0(\zeta\theta)-1)\sigma\,(\theta)\,d\theta = -2\pi\int_0^\infty (\frac{\zeta^2\theta^2}{4} - \frac{\zeta^2\theta^2}{2^2\cdot 4} + \cdots)\sigma(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{131}
$$

ここで右辺の積分を，ある角度 θ_0 を境に 2 の領域に分けて

$\int_0^\infty = \int_0^{\theta_o} + \int_{\theta_o}^\infty$

とし，それぞれの積分について考察する．まず θ_0 から ∞ までの領域では

$$
\begin{aligned}
\int_{\theta_0}^\infty \frac{(1-J_0(\zeta\theta))}{\theta^3}d\theta &= \zeta^2\int_{\zeta\theta_0}^\infty \frac{(1-J_0(x))}{x^3}dx \qquad (132)\\
&= \frac{\zeta^2}{4}\left(1+\log(2)-\log(\zeta\theta_0)-\mathrm{C}+O(\zeta^2\theta_o^2)+\cdots\right) \qquad (133)
\end{aligned}
$$

ここで C はオイラー定数 (0.577...) で

$$
\int_{\zeta\theta_o}^\infty \frac{J_0}{x}dx = \log 2 - \mathrm{C} - \log(\zeta\theta_0) + O(\zeta^2\theta_o^2) + \cdots \tag{134}
$$

の関係式を使った．

一方, 散乱角が小さい場合はベッセル関数を θ について展開して

$$
\int_0^{\theta o} \frac{1-J_0(\zeta\theta)}{\theta^3}d\theta \sim \zeta^2 < \theta^2 > \sim \zeta^2\log\left(\frac{\theta_0}{\theta_{min}}\right)
$$

以上まとめると

$$2\pi \int_0^{\infty} \frac{1 - J_0 \zeta\theta)}{\theta^3} d\theta = \frac{K'^2}{4E^2} \left(b - \log \left(\frac{K'^2}{4E^2} \right) \right) \tag{135}$$

ただしここで

$$b = 2 \log \left(\frac{K'}{E} \right) - 0.154$$

$$2\pi \int_0^{\infty} \theta \sigma \left(\theta \right) d\theta = \frac{K'^2}{4E^2 X}$$

とおいた．
ここで Moliére は

$$\Omega - \log \Omega = b$$

をみたす変数 Ω を導入し，$K = \Omega^{1/2} K'$ とおき

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1 - J_0(\zeta\theta)}{\theta^3} d\theta &= \frac{K'^2 \zeta^2}{4E^2} \left(b - \log(\frac{K'^2 \zeta^2}{4E^2}) \right) \\ &= \frac{K^2 \zeta^2}{4E^2} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \log(\frac{K^2 \zeta^2}{4E^2}) \right) \end{aligned} \tag{136}$$

を導いた．
　分布関数のハンケル変換関数 G は

$$G = e^{-\frac{K^2\zeta^2}{4E^2}\left(1 - \frac{1}{\Omega} \log\left(\frac{K^2\zeta^2}{4E^2}\right)\right)}$$

なので，$\frac{1}{\Omega}$ について展開し，逆ハンケル変換を行うと

$$\begin{aligned} F\left(\theta\right) &= F^0\left(\theta\right) + \frac{1}{\Omega} F^1\left(\theta\right) + \frac{1}{\Omega^2} F^2\left(\theta\right) + \cdots \\ F^0\left(\theta\right) &= \frac{1}{\pi} \frac{E^2}{K^2 t} e^{-\frac{E^2}{K^2 t}} \\ F^1\left(\theta\right) &= \frac{1}{\pi} \frac{E^2 t}{K^2 \theta^4} + \cdots \end{aligned}$$

となる．第 1 項が多重散乱項に対応し，第 2 項は 1 回の大角度散乱　第 3 項は 2 回の大角度散乱... に相当する級数となっている．
　第 1 項の多重散乱の項は Fokker Planck 近似で求めた解と似ているが，基本的には違うものである．Fokker Planck 近似では，散乱角の最大値として衝突パラメータの最小値に対応する原子核の大きさに対応する値を使っているが，Moliére の取り扱いでは，通過物質量に対応して多重散乱として取り扱える最大の角度を対応する量として使っている．

従って, ガウス関数の平均値を示す E_s の値は Fokker Planck 近似の場合には通過物質の原子核の半径に依存するのにたいして，Moliére 場合には通過物質量に依存することになる.

Moliére の解に於ける鉛 1 輻射単位通過後の散乱分布の寄与は

Ω: 衝突回数の対数 ∼10
$f^{(0)}$: 第 1 項. 多重散乱
$f^{(1)}/\Omega$: 第 2 項. 1 回散乱
$f^{(2)}/\Omega^2$: 第 3 項. 2 回散乱

であるが，それらを図 3 に示しておいた.
(引用の都合で F は小文字 f にしてある)

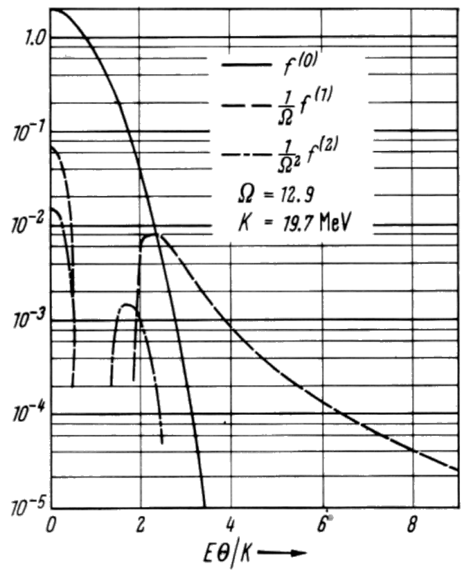

図 3　通過物質が鉛の場合の $F(\theta)$ の展開成分. 文献 [5] の p.96, 図 31 より.

V-2　電子シャワー

電子シャワーの解析的な取り扱いは，制動輻射，電子対生成が Complete Screening の場合について行われている．これは断面積が親と子のエネルギーについて Fractional な形をしており，解析的に取り扱い易いからである．

電離損失を考慮しない近似を:　Approximation A

電離損失を考慮した近似を:　Approximation B

と呼んでいる．

表 2　一次元シャワー理論

year	who	how
1937	Bhabha and Heitler	App.B successive Aprox.
1937	Carlson and Oppenheimer	App.B. Integro-differenctial Eq.
1938	Landau and Rummer	Complete solution under App. A
1938	Snyder and Serber	Almost complete solution. App.B
1939	Tamm and Berenky	New treatment App.B
1948	Bhabha and Chakrabarty	New treatment App.B
1948	Snyder and Scott	Complete solution. App.B

表 3　三次元シャワー理論

year	who	how
1940	Euler and Wergeland	
1944	Pomeranchuku	
1945	Migdal	rdr/r^{2-s}
1953	Moliére	Numerical method, Moliére Function, Moliére Unit
1949	Eyges	$<\theta^2>, <r^2>$, analytical
1950	Nishimura and Kamata	N-K func. analytical
1958	Guzavin, Ivanenko	

Incomplete Screening の場合，または Landau Pomeranchuk 効果がある場合には，解析的に解くことは難しくシャワーの性質はモンテカルロで調べられている．さらに，三次元シャワー理論では，散乱効果を入れるにあたり

Fokker Plank 近似あり，なし

の取り扱いが行われている．

これまで行われてきた，一次元及び三次元のシャワー理論を表 2 と 3 に示しておいた．

まず，一次元で近似 A のシャワー理論の基礎方程式を考える．

V-3　一次元シャワー理論

V-3.1　近似 A の場合

シャワーの基礎方程式で特徴的なことは制動輻射，電子対生成の断面積が入射粒子のエネルギーと二次粒子の比の関数 (Fractional) となっていることである．シャワーの親の粒子のエネルギーを E_0 とおいて

- 電子の微分スペクトルを
  $\pi(E_0, E)dE$
- ガンマ線のそれを
  $\gamma(E_0, E)dE$

と書くことにする．

１輻射単位あたりの輻射の確率は，電子のエネルギーを E，ガンマ線のエネルギーを E' とすると，比，$v = E'/E$ だけに依存するので:

$$\phi(E, E')\frac{dE'}{E} = \phi_0(v)dv$$

と書ける．電子対生成の確率は親子のエネルギー比を $u = E'/E$ として，

$$\psi\frac{dE'}{E} = \psi_0(u)du$$

で表す．

電子シャワーの基礎方程式は

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} = -A'\pi + B'\gamma \tag{137}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = C'\pi - \sigma_0\gamma \tag{138}$$

で与えられる．ただしここで A', B', C' のオペレーターは

$$A'\pi = \int_0^1 \left[\pi(E) - \frac{1}{1-v}\pi\left(\frac{E}{1-v}\right)\right]\phi_0(v)dv \tag{139}$$

$$B'\gamma = 2\int_0^1 \gamma\left(\frac{E}{u}\right)\psi_0(u)\frac{du}{u} \tag{140}$$

$$C'\pi = \int_0^1 \pi\left(\frac{E}{v}\right)\phi_0\left(v\right)\frac{dv}{v} \tag{141}$$

である．また，$\sigma_0 = \displaystyle\int_0^1 \psi_0(u)du \sim 0.7733.$

このシャワーの基礎方程式 (137, 138) は，一次粒子と発生する二次粒子のエネルギー比の形をしている．このようにエネルギーについて Fractional な形をしている場合は，Convolution の節で述べたように，解を求めるには Mellin 変換が有効である．

この基礎方程式の左右両辺に E^s を掛けて E についてゼロから無限大まで積分する．電子の Mellin 変換関数を $M(s)$, ガンマのを $N(s)$，つまり

$$M(s) = \int_0^\infty E^s \pi(E) dE$$
$$N(s) = \int_0^\infty E^s \gamma(E) dE$$

とすると，電子およびガンマ線のスペクトルは

$$\pi(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} M(s) \frac{1}{E^{s+1}} ds$$
$$\gamma(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} N(s) \frac{1}{E^{s+1}} ds$$

で与えられる．

$M(s)$ および $N(s)$ に対する基礎方程式は

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -A(s) M + B(s) N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t} = C(s) M - \sigma_o N$$

で与えられる．ここで

$$A(s) = \int_0^1 [1-(1-v)^s]\phi_0(v) dv$$
$$B(s) = 2\int_0^1 u^s \psi_0(u) du$$
$$C(s) = \int_0^1 v^s \phi_0(v) dv$$
$$\sigma_0 = \int_0^1 \psi_0(u) du \sim 0.7733$$

N を消去すると M の方程式は

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - (A+\sigma_0)\frac{\partial M}{\partial t} + (BC - A\sigma_0)M = 0 \tag{142}$$

となる．初期条件として $t = 0$ でエネルギーが E_0 の電子が一個入射した場合を取ると，

$$M(s) = E_0^s \left(H_1(s) \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t} \right) \tag{143}$$

従って，電子のスペクトルは

$$\pi(E_0,E)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{E_0^s}{E^{s+1}}\left(H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)}+H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)}\right)ds \tag{144}$$

が得られる．ただし，ここで λ_1 および λ_2 は (142) 式を解く際に出る 2 次方程式

$$\lambda^2+(A+\sigma_0)\lambda+(A\sigma_0-BC)=0$$

の根で

$$\lambda_1(s)=-\frac{A(s)+\sigma_0}{2}+\frac{1}{2}\left[[A(s)-\sigma_0]^2+4B(s)C(s)\right]^{1/2} \tag{145}$$

$$\lambda_2(s)=-\frac{A(s)+\sigma_0}{2}-\frac{1}{2}\left[[A(s)-\sigma_0]^2+4B(s)C(s)\right]^{1/2} \tag{146}$$

$$\tag{147}$$

また，H_1,H_2はこれらを用いて

$$H_1(s)=\frac{\sigma_0+\lambda_1(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \tag{148}$$

$$H_2(s)=-\frac{\sigma_0+\lambda_2(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \tag{149}$$

で与えられている．これは電離損失を無視した場合のシャワーの解で Landau-Rummer の解とよばれている．

V-3.2　近似 B の場合

電子シャワーの発達で電離損失の効果を入れると，基礎方程式に，

$$\varepsilon\frac{\partial\pi}{\partial E}$$

の項が加わる．ε は 1 輻射単位 (r.l) あたりの電離損失．　基礎方程式は

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}=-A'\pi+B'\gamma+\varepsilon\frac{\partial\pi}{\partial E} \tag{150}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=C'\pi-\sigma_0\gamma \tag{151}$$

となり，この項は，Fractional でなく，ほかの項に比べて，E の次数が一つ下がるので，解を求める方法が複雑になる．電離損失のない Landau-Rummer の解から出発して ε/E についての級数を求めることができる．ただしこの級数の収斂性は悪いので実用上の解とはならない．この解を元に解析接続して収斂性のよい解を導く必要がある．

電離損失のある場合の摂動解

$$M = M_0 - \frac{\varepsilon}{E} M_1 + \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 M_2 + \cdots$$

を求めてガンマ関数のポールを利用して，この級数を複素積分の形に書き換え

$$M = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} M(s,q)\Gamma(-q)\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q dq$$

とおくと

$$\pi = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \int_{-i\infty}^{+i\infty} dqM\left(s,q\right)\Gamma\left(-q\right)\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^s \frac{1}{E}$$

この複素積分の解は別な方法をもちいて導き出した Snyder-Scott の解と一致している．

V-3.3　一次元シャワー理論からの２，３の結論

Snyder-Scott の解から， 電子シャワーについて重要な性質が導かれる．

- シャワー電子数

  エネルギーゼロ以上の電子数は近似 A では深さとともに増加して無限大になる．近似 B では電離損失でエネルギーが吸収されるので，観測される電子数を計算することができる．積分スペクトルは

$$\Pi\left(E_0,t\right) = \int_0^\infty \pi dE = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} dsM\left(s,-s\right)\Gamma\left(s\right)\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \tag{152}$$

  で与えられる．

- シャワー極大

  シャワーの電子数が極大になる場所では $\dfrac{\partial \Pi\left(E_0,t\right)}{\partial t} = 0$ である．(152) 式の積分の中にふくまれる主要な関数は

$$\left(H_1\left(s\right)\Gamma\left(s\right)\left(\frac{Eo}{\epsilon}\right)^s M_1\left(s,-s\right)e^{\lambda_1(s)t}\right)$$

  となっているので， シャワー極大は

$$\lambda_1(s) = 0, s = 1$$

  の場所にあたる．

  鞍点法で積分値を評価すると, 鞍点は

$$\frac{\partial \lambda_1\left(s\right)}{\partial s}t + \log\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right) = 0$$

極大値 $s=1$ の所では，シャワー粒子数は

$$\frac{H_1(1)}{\sqrt{2\pi\ddot{\lambda}_1 t}}\frac{E_0}{\varepsilon}M_1(1,-1) \tag{153}$$

となって．入射エネルギー E_0 に比例している．またシャワー極大の場所はほぼ
$\log(\frac{E_0}{\varepsilon})$
である事が分かる．

- Track Length
シャワーの粒子数を深さについて積分した量で，エネルギーは電離損失のみで吸収されているので，
Track Length$=\dfrac{E_0}{\varepsilon}$
となるはずである．上に求めた Snyder-Scott の解について Track length を計算すると
Track Length $=\displaystyle\int_0^\infty \Pi\,(E_0,t)\,dt=\frac{E_0}{\varepsilon}$
が確かに得られて，Snyder-Scott の解の正当性が証明された事になる．

V-4　三次元シャワー理論

一次元シャワー理論では電子の横広がりを無視してきたが，シャワー中の電子は Rutherford 散乱を受ける．エネルギー E の電子は一輻射単位 (r.l) で散乱によって平均
K/E ラジアン
程度曲がるので[*5], 横方向に広がる長さは
K/E　輻射単位
程度である電子は 1 輻射単位でエネルギーを大半を失うので，散乱角度，および，散乱による広がりは，観測地点からの 1 輻射単位の中での散乱が重要である．

臨界エネルギー ε は電子が一輻射単位走る時に失う電離損失で，別な表現をとれば，電離損失と，輻射損失が等しくなるエネルギーである．従って，散乱角およびシャワーの横広がりの目安は $\dfrac{K}{\varepsilon}$ ラジアン，および $\dfrac{K}{\varepsilon}$ 輻射単位程度で，これを Moliére 単位とよんでいる．実際の数値は

散乱係数: $K\sim 20$ MeV
臨界エネルギー: $\varepsilon =\sim 2$ MeV $\times$（g/cm^2 で表わした 1 輻射単位）程度
シャワーの角度分布の目安: K/ε ラジアン
Moliére 単位:　K/ε r.l

通過物質の輻射単位をグラム数で表すと原子番号 Z に逆比例するので，ε は Z に逆比例し，そのため散乱角は Z に比例する．

[*5] ここでは E_s(式 114) を K で表す

空気では 0.3 ラジアン
鉛では　3 ラジアン
程度で，鉛のように原子番号の大きいときには，後方散乱が重要になることを示している．

<u>1 Moliére 単位 (M.U)) は g/cm^2 ではかると $\sim$10 g/cm^2 となり物質によらない長さとなる！</u>
鉛で 1 .5cm，地上の大気で 90m 程度の値である[*6]．

三次元シャワー理論では散乱の効果をいれて，基礎方程式に散乱の項

$$\frac{K^2}{4E^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta_y^2}\right)\pi=\frac{K^2}{4E^2}\nabla^2\pi$$

を加える必要がある．

電離損失の場合と同じように同次性が失われるので，まず，$\frac{K^2}{4E^2}$ の級数として解を求める．次に，近似 B の時と同じように，級数の解を解析接続で複素積分に直すことにより三次元シャワーの解が求まる．

具体的に．基礎方程式は

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}=-A'\pi+B'\gamma+\varepsilon\frac{\partial\pi}{\partial E}+\frac{K^2}{4E^2}\nabla^2\pi \tag{154}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=C'\pi-\sigma_0\gamma \tag{155}$$

となる．

散乱角 θ についてハンケル変換 $\displaystyle\int_0^\infty J_0(\theta\cdot\zeta)\theta d\theta$ を施すと

$$\frac{K^2}{4E^2}\nabla^2\Longrightarrow-\frac{K^2}{4E^2}\zeta^2$$

となり $\frac{K^2}{4E^2}\zeta^2$ の係数で展開した Mellin 変換の解は

$$M_\theta\Longrightarrow M_0-\frac{K^2}{4E^2}\zeta^2M_1+\left(\frac{K^2}{4E^2}\right)^2\zeta^4M_2+\cdots$$

複素積分表示に直して

$$M_\theta\Longrightarrow\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}M\left(s,p,q\right)\Gamma\left(-q\right)\Gamma\left(-p\right)\left(\frac{K\zeta}{2E}\right)^{2p}dp$$

ついで，ハンケルの逆変換を行うと

$$\int_0^\infty J_0(\zeta\theta)\cdot M_\theta\cdot\zeta d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}M_\theta(s,p,q)\Gamma(-q)\Gamma(p+1)\left(\frac{E}{K}\right)^2\left(\frac{E\theta}{K}\right)^{-2p-2}dp$$

[*6] 半径 1M.U のシリンダーの内部に $\sim$90% のシャワーエネルギーが吸収される．

がえられる.
結局

- 三次元シャワーの角度分布については

$$\pi\left(E,\theta\right)=\frac{-1}{8\pi^3 i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{E_0^s}{E^{s+1}}ds\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma\left(-q\right)\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q dq\times$$
$$\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma\left(p+1\right)\left(\frac{E}{K}\right)^2\left(\frac{E\theta}{K}\right)^{-2p-2}dpM_\theta\left(s,p,q\right)\qquad(156)$$

- 三次元シャワー空間分布については

$$\pi\left(E,r\right)=\frac{-1}{8\pi^3 i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{E_0^s}{E^{s+1}}ds\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma\left(-q\right)\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q dq\times$$
$$\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma\left(p+1\right)\left(\frac{E}{K}\right)^2\left(\frac{Er}{K}\right)^{-2p-2}dpM_r\left(s,p,q\right)\qquad(157)$$

- 全電子の空間分布
はエネルギーについて積分した際に出る Pole
$\int_0^\infty \pi dE\sim\frac{1}{q-2p-s}$
を利用して q の積分をおこない

$$\Pi\left(r\right)=\frac{-1}{4\pi}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{E_0^s}{\varepsilon^{s+1}}ds\times$$
$$\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma\left(2p+s\right)\Gamma\left(p+1\right)\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^2\left(\frac{\varepsilon r}{K}\right)^{-2p-2}dpM_r\left(s,p,2p+s\right)\qquad(158)$$

が得られる.
- シャワー軸付近.$E_o r$ の相似性
シャワー軸に近く Moliére 単位 $\frac{K}{\varepsilon}$ に比べて小さい r のときには,上の式から

$$\Pi(E_0,r)\sim\left(\frac{E_0}{K}\right)^s\frac{1}{r^{2-s}}\qquad(159)$$

が得られ, 半径 r の中の電子数は

$$2\pi\int_0^r\Pi\left(E_0,r\right)rdr=\left(\frac{E_0 r}{K}\right)^s\qquad(160)$$

で与えられる.$E_0 r$ の等しい電子シャワーはおなじ様相を示す事を示している.観測している電子のエネルギーが K/r 程度以上であり例として原子核乾板[*7] 中の

[*7] r.l$\sim$ 3cm$\sim$ 11g/cm^2

シャワーを取ると $K \sim 20$ MeV, 半径 100 ミクロンの円内に観測される電子のエネルギーは，r ~0.1mm~1/300 輻射単位なので K/r ~300K ~6GeV 程度である事がわかる
原子核乾板で半径 100μ 以内のシャワーは，6 GeV 以上のシャワー粒子を観測することにあたる． 次の章で述べるように，比較的薄い厚さの物質でシャワーの発達を終わらせることができる．

三次元シャワー理論の応用についての例を以下に述べる事にする．

V-5 三次元シャワー理論の応用

V-5.1 空気シャワーの横広がり

空気シャワーで観測されるシャワーの横広がりは，ハドロンシャワーの広がりと電子シャワーの組み合わせたものである．
ハドロンの相互作用によるによるガンマ線の発生角度分布を $f(\theta)2\pi\theta d\theta$ とおくと，深さ t でシャワーが発達していない場合の空間分布：$f_r 2\pi r dr$ は

$$f_r(r)2\pi r dr = dr\int \delta(r-\theta t)f(\theta)2\pi\theta d\theta = f(r/t)/t^2 2\pi r dr \tag{161}$$

で与えれる．

三次元シャワーの空間分布 N-K 関数 (158 式を)

$$f_{N-K}\left(r\right)2\pi r dr$$

とおくと，観測される広がりは，ハドロンシャワーによる広がりと，電子シャワーの広がりの convolution 積分として表すことができる．
観測されるシャワーの空間分布 $F\left(r\right)2\pi r dr$ は,

$$F\left(r\right) = \int_0^\infty f_r(r')f_{N-K}\left(r-r'\right)dr'$$

でハンケル変換関数 G(ζ) で表すと

$$F\left(r\right) = \int_0^\infty J_0(\zeta\cdot r)G(\zeta)\zeta d\zeta$$

ここで,

$$G(\zeta) = g_r(\zeta) \cdot g_{N-K}(\zeta) \tag{162}$$

$$g_r(\zeta) = \int_0^\infty J_0(\zeta \cdot r) f_r(r) r dr \tag{163}$$

$$g_{N-K}(\zeta) = \int_0^\infty J_0(\zeta \cdot r) f_{N-K}(r) r dr \tag{164}$$

実際に観測される広がりが三次元電子シャワーの N-K に近いことは，ハドロンシャワーで発生する二次粒子 (π^0) の角度が小さいこと，つまり，二次粒子の π^0 の P_t(=transverse momentum) が小さい事を示していることがわかる．

V-5.2　エマルションチャンバーによる解析

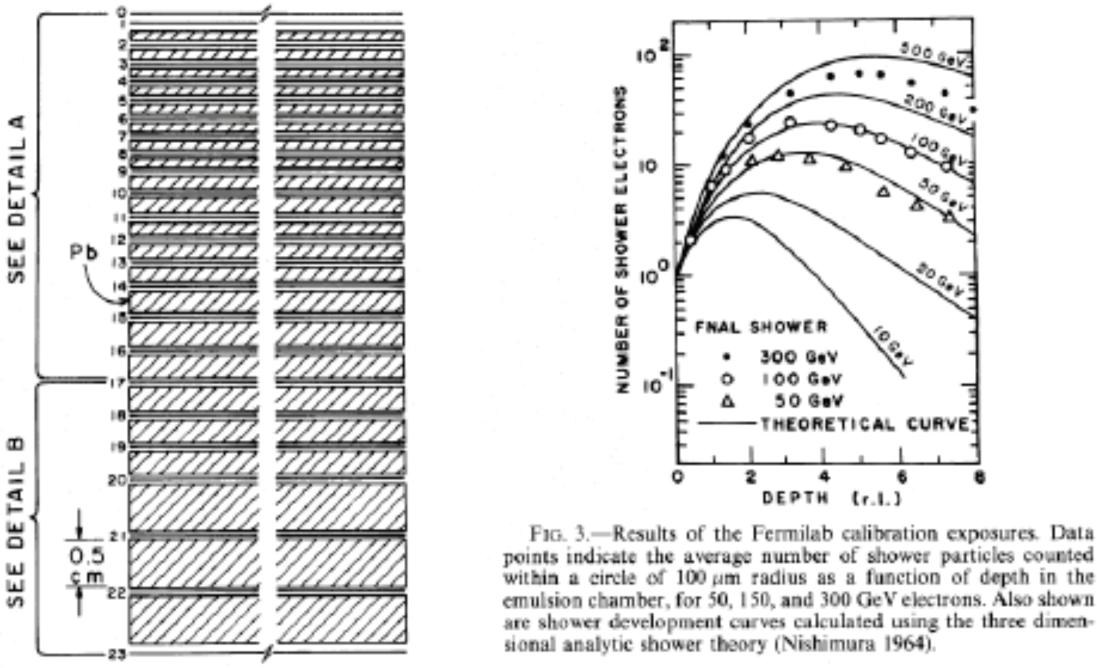

図 4　左図: エマルションチェンバーの構造の例．薄い鉛層とその間に挿入された原子核乾板からなる．右図: 10 GeV から数 100 GeV の電子が入射した場合の電子数の遷移曲線と FNAL での実験データ．半径は 100 μm で固定．200μm の場合は 500 GeV の曲線が 250 GeV 相当になる．[18] より引用.

Emulsion chamber で入射電子やガンマ線のエネルギー決定はシャワー軸付近（~100μ）のシャワー粒子の　遷移曲線で決めることができる．

半径 r の円内の電子数は

$$2\pi \int_0^r \Pi(E_o, r) r dr \sim \left(\frac{E_o r}{K}\right)^s$$

であるため，$E_0 \times r$ をパラメータにしたシャワーの遷移曲線を示すことになる．従って，シャワー軸付近
$\frac{\epsilon \cdot r}{K} \ll 1$
の場合には，シャワーは薄い物質中で終わることになる． 例としてエマルションチャンバー (1 輻射単位 ~1 cm, $\varepsilon \sim$ 10 MeV) の場合を取る．$E_0 = 1$ TeV だと，r に制限をつけない場合のシャワー極大位置は $T_0 \sim \log(E_0/\varepsilon)$=11.5 r.l ~ 11.5cm

一方 r = 0.1mm (=100μm) とすると，シャワー極大の位置は $T = \log(E_0 \cdot r/K) = T_0 + \log\left(\varepsilon \cdot \frac{r}{K}\right) = T_o$−5.3r.l~ 6cm.

従って．このような高いエネルギーの電子を薄いカロリーメーターで観測を行う事が可能になる．高エネルギー一次電子の観測を行ってきたエマルションチャンバーの例を示しておいた (図 4).

V-6　空気シャワーからの電波の放出

空気シャワーからの電波の放出については，Askaryan により京都宇宙線国際学会（1961; [14]）で提案されたシャワー中の陽電子消滅によるマイナス電荷過剰によるチェレンコフ効果がよく知られている．以下説明に必要な文献のみを上げておくと

- Kahn & Lerche[15] はラジオ波の放出の 数学的取扱いの枠組みを示し．マイナス荷電過剰にくわえて，地磁気による Geo-Synchrotron, Dipole moment の効果の重要性を指摘した.
- Fujii-Nishimura，ICRC, Budapest(1969) [16] 及び西村ー藤井 [17] はシャワー理論に基づき, マイナス荷電過剰, 地磁気による GeoSynchrotron, Dipole moment の寄与を定量的に計算した
  Askaryan の陽電子消滅によるマイナス荷電過剰は考え方としては面白いが，実際には，コンプトン散乱による寄与の方が大きい事を明らかにした.
  ラジオ波が放出される基礎過程は，当初はチェレンコフ効果のみが考えられていたが，荷電粒子に加速が有ると，電磁波の放出を伴うので，この効果も考えに入れる必要があることを示した.
- E.Zas, F. Haltzen & T. Stanev[19] はモンテカルロでこの問題を取り扱った.

V-6.1　Kahn & Lerche の取り扱い

Negative Excess についてはチェレンコフ効果のところ (p.27) で述べたように，まずシャワー軸にそってリングの電荷

$Q \cdot \delta(r-a)$

が速度 v で走る Maxwell の方程式をたてる．屈折率を n, $\cos\alpha = c/nv$ として，静電ポテンシャル $\varPhi$ とベクトルポテンシャル A はハンケル変換をおこなって

$$\phi \sim Q \cdot J_0(k \cdot \alpha \cdot a) H_0^1(k \cdot \alpha \cdot r)$$

がえられ，これを使って，ポインティングベクトルから，電波の放出量を決める事ができる．

Kahn & Lerche はシャワー中の正負の荷電粒子が，地磁気により，進行方向がまげられ，**Transverse-Current** と **Dipole** が生まれ，これにより，**Geo-Synchrotron, Dipole** からの輻射が有る事を示した，空気中では，負電子過剰による電波よりも **Transverse-Current** による **Geo-Synchrotron** による電波の寄与が大きい事を示した．

V-6.2　電子シャワーでの取り扱い

電子シャワーの基礎方程式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -A'\pi + B'\gamma + \varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E}$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = C'\pi - \sigma_o \gamma$$

で

$\pi = \pi^- + \pi^+$

とおいて，電子成分, π^-, 陽電子成分, π^+, の基礎方程式に書き直し, 更に次ぎの項目を追加する

- 陽電子消滅，コンプトン散乱，knock-on: 断面積はそれぞれ

$$\sigma_{annih} = \frac{\pi r_0^2 mc^2}{E}\left[\log\left(\frac{2E}{mc^2}\right) - 1\right]$$
$$\sigma_{Comp} = \frac{\pi r_0^2 mc^2}{W}\left[\log\left(\frac{2W}{mc^2}\right) + \frac{1}{2}\right]$$
$$\sigma_{knock} = \frac{2\pi r_0^2 mc^2}{E}$$

であり，ほぼ同じ大きさになっている．

- 基礎方程式には以下の追加を行う.
  - 陽電子消滅の項: $\frac{D}{E}\pi^{+}$
    ここで,
    $D = \dfrac{55\text{MeV}}{z}\dfrac{\log\left(\frac{ZE}{mc^2}\right)-1}{\log(191z^{-1/3})} \sim 8$ MeV in Air
  - Compton 散乱による電子増加の項: $\frac{D_c}{E}\gamma$
  - Knock-on による電子増加の項：$\frac{D_k}{E}(\pi^{+}+\pi^{-})$

    上記が，Kahn & Lerche 数学的取扱いの枠組みである.

Fujii & Nishimura はシャワー理論に基づき，マイナス荷電過剰 について計量的に計算した. それによれば，マイナス荷電過剰の寄与は，コンプトン効果が一番大きく，次いでノックオン電子で，次に陽電子消滅の寄与である．総体として空気の場合約 20% で，モンテカルロで計算した Zas, Haltzen & Stanev の結果と一致している.

Dipole Moment: $M = e\int_{-\infty}^{+\infty}(\pi^{+}-\pi^{-})dx = e(<x^{+}> - <x^{-}>)$

Transverse Current: $J = e\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\pi^{+}-\pi^{-})dx = e(<\theta^{+}> - <\theta^{-}>)$

地磁気の効果による追加項

$\pm\dfrac{eH}{E}\dfrac{\partial\pi^{\pm}}{\partial\theta}$

$H = 0.2$ Gauss

$eH \sim$1.8MeV

表 4

	Chage-Excess	Dipole	Dipole Curent
Kahn & Lerche	1	3	16
Fujii & Nishimura	1.3	0.2	3.4

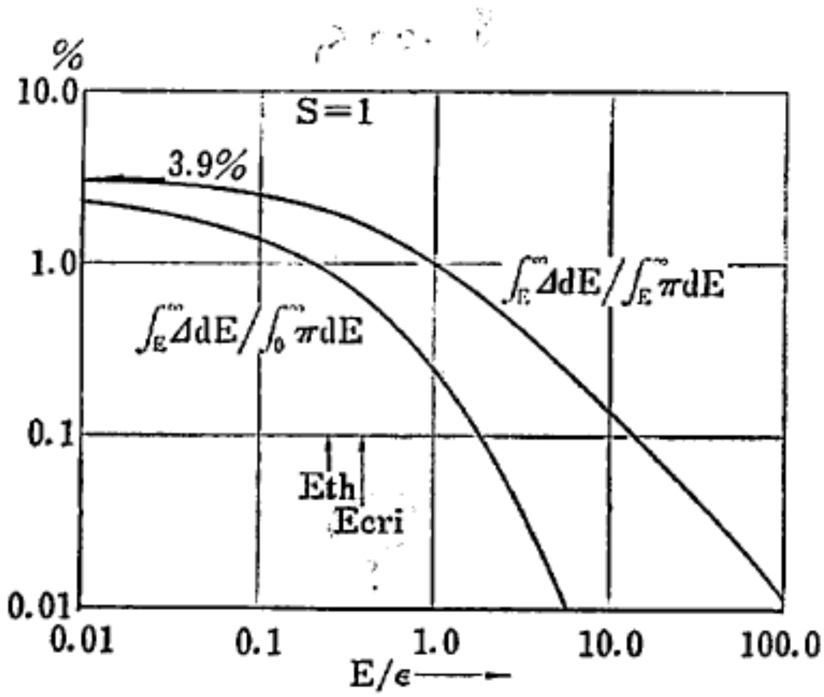

図 5　E. Zas,. F. Hultzen, T STanev のモンテカルロの計算結果との比較．とよく一致している

表 5　Shower 極大 (s=1) での負電荷過剰の推定と内訳

Negative Charge Excess	Positron Annhi	Compton	Knock-on
∼20%	2%	12 %	6%

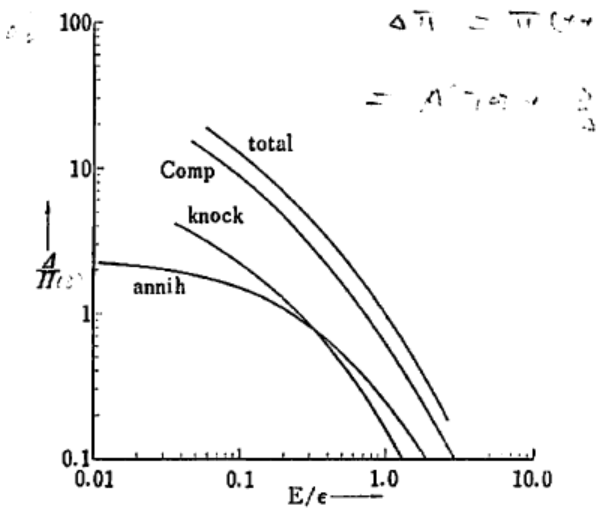

図 6　負電荷電子過剰の割合の内訳を示すスペクトル

深い水中や氷の中でチェレンコフ光を観測する場合，光子の空間分布は水や氷の吸収係数と光の散乱の状況で決まる．散乱によっては光子の数は変わらないので，光子の分布を観測して光子の総数をもとめることができれば，それはは吸収 mfp を通過するのに要する時間の間に放出された光子の総数に一致する．

電子シャワーの場合，トラックレングスが (入射エネルギー/臨界エネルギー) となる関係に似ている．

実際に実験が行われている Ice Cube や Antares などでの散乱は Mie scattering (散乱体が光の波長程度) で散乱光は前方に集中している．吸収に比べて散乱の寄与が少ない時には，まず，散乱のない時の空間分布を求め，次いで散乱の寄与はこれまで取り扱った多重散乱の方式 (小角散乱近似，$\sin\theta \sim \theta$) で分布を求めて Convolution 積分により最終の分布を求めることができる．この方式は，散乱の寄与が少なく後方散乱が有意でない場合には有効である．

散乱の度合いが大きくなり，後方散乱の寄与が無視できなくなる場合には，次のような有効散乱 m.p.f を定義して取り扱かうのがよい．

Mie 散乱の場合，何回か散乱した後に初めて有意な大きさ散乱となるので，実験の解析にはいくつかの散乱の効果をあわせた有効散乱 m.f.p. を使うことにする．

光の散乱 m.f.p. を η g/cm^2　有効散乱 m.f.p. を η_{eff} で表し，

$$\eta_{eff} = \frac{\eta}{1-<\cos\theta>} \quad \mathrm{g/cm^2}$$

で定義することにする．一回の Mie 散乱で $(1-<\cos\theta>) \sim <\theta^2>/2$ 程度散乱するので多重散乱の結果，ほぼ等方散乱になる回数までを一纏めして一回の散乱と見なす取り扱いである．

次に，実際観測が行われている Ice Cube, Antares や Baikal の光子の空間分布を求めるにあたり，これらの水中や氷中での吸収 m.f.p および散乱 m.f.p を表 6 にまとめておいた．

表 6　吸収と散乱の m.f.p (波長 500 nm 付近)

場所	吸収 m.f.p (m)	有効散乱 m.f.p (m)	散乱/吸収
Ice Cube	~ 110	$20 \sim 30$	$\sim$ 0.2
Antares	~ 60	~ 100	~ 2
Baikal	~ 60	~ 100	~ 2

Antares や Baikal は散乱の影響が少なく Ice Cube では散乱が主要な役割を演じていることがわかる．

実際 Antares や Baikal では “散乱/吸収” が２程度なので，２回散乱を受ける距離は吸収 m.f.p の４倍の物質量にあたり，散乱の影響が大きくなる頃には，光子はほとんど吸収

されてなくなっている事が分かる．つまり，散乱なしの近似でも可成り良い近似である事がわかる．

三次元シャーワーからのチェレンコフ光で放出された光子が空間的に広がる原因は

1. チェレンコフ放出角 θ_0 による広がり
   この成分による光子の空間分布を $f(r)2\pi r dr$ と表すと，放出点から深さ t の場所では
   $$f\left(r\right)2\pi r dr = \delta\left(\theta_0 - \frac{r}{t}\right)d\frac{r}{t}$$
   で表される．
2. 光子を放出する電子シャワーの角分布（N-K 関数）
   シャワー中の電子の角分布は N-K 関数により
   $$\begin{aligned}\Pi(\theta) = \frac{-1}{4\pi}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{E_0^s}{\varepsilon^{s+1}}ds \times \\ \int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma\left(2p+s\right)\Gamma\left(p+1\right)\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^2\left(\frac{\varepsilon\theta}{K}\right)^{-2p-2}dpM_\theta\left(s,-2p-s,p,t\right)\end{aligned}$$
   で与えらる．

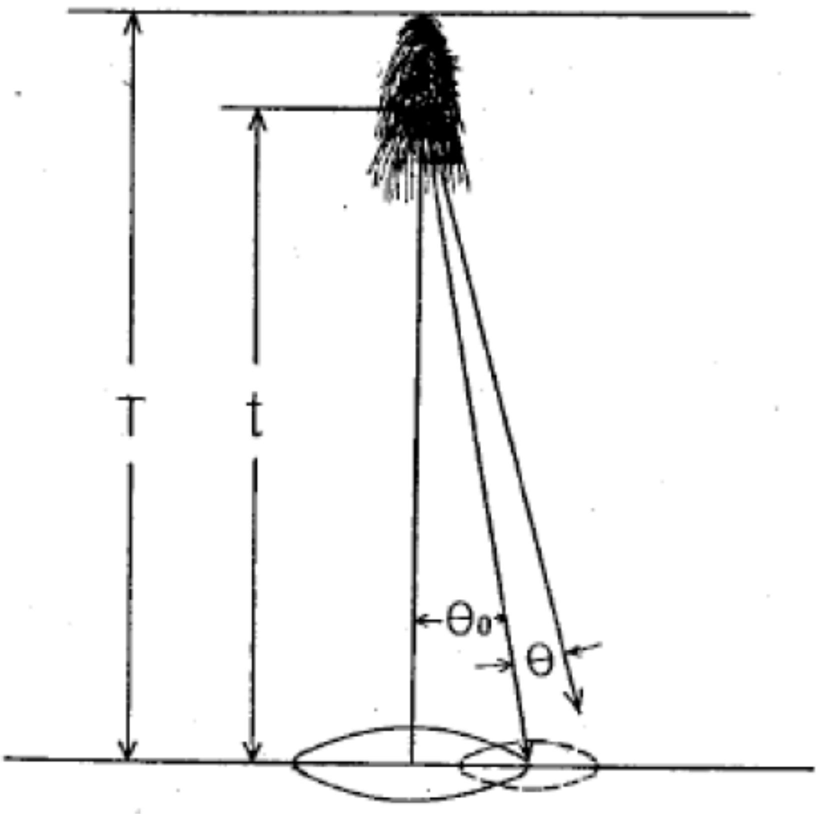

図 7　チェレンコフ光の空間分布は電子シャワー中の電子の Rutherford 散乱 (N-K 関数) とチェレンコフ光の放出角 θ_0 の組み合わせで決まる.

目安としての拡がりの角度は次の表 (7) に示しておいた.

表 7　水中の電子シャワーの拡がりとチェレンコフ光の放出角

通過物質	屈折率	E_{th} (MeV)	θ_0（チェレンコフ光放出角）
水	1.33	0.778	41.2°
大気	1.00027	22.8	1°20'

E_{th}: チェレンコフ光放出下限エネルギー ($\beta = 1/n$)
θ_0: チェレンコフ光放出角 ($\cos\theta_0 = 1/n$)

表 8　水中での電子シャワーの拡がり角度の度合い

E (MeV)	$<\theta>$	$<\theta^2>^{1/2}$	$<\theta^4>^{1/4}$
≥ 0	$23°45'$	∞	∞
≥ 1	$14°32'$	$34°34'$	$60°37'$
≥ 2	$13°14'$	$18°05'$	$47°47'$
≥ 5	$11°04'$	$18°05'$	$10°01'$
App.A ($E=\varepsilon$)	$4°42'$	$6°36'$	$10°01'$
Ivanenko		$36°40'$	
Chudakov		$15°\sim 20°$	

*E = **critical Energy** の時
水中のチェレンコフ放出角は $41°$ であり，発生する電子の最低エルギーは 1 MeV 付近であるので，チェレンコフ放出角の方が稍 (やや) 大きい事が分かる．

3. 光子の空間分布 $G_{ph}(r)2\pi r dr$
これは 1 と 2 を組み合わせて

$$G_{ph}(r)=\alpha\int_0^T dt\int_0^\infty f(\vec{r}-\vec{r'},t)\Pi\left(\frac{\vec{r'}}{T-t},T-t\right)d\vec{r'} \tag{165}$$

で与えられる．ただしここで，α は 1 輻射単位当たりに放出される光子の数である．この積分は，二次元の convolution 型なので，$\vec{r}$ についてハンケル変換で解を求める事ができる．
$f(r)$ 及び Π のハンケル変換を $H_f(\zeta), H_\Pi(\zeta)$ とおくと

$$H_f(\zeta)=\alpha J_0(\zeta\theta_0 t)$$
$$H_\Pi(\zeta)=-\frac{1}{4\pi^3}\iint dsdp\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\left(\frac{K^2\zeta^2t^2}{4\varepsilon^2}\right)^p\Gamma(-p)\Gamma(2p+s)M(s,p,t)$$

光子の空間分布は

$$G_{ph}(r)=\int_0^T dt\int_0^\infty J_0(\zeta r)\cdot H_{\mathrm{f}}(\zeta,t)\cdot H_\Pi(\zeta,T-t)$$

このなかの主要な積分部分は

$$\Gamma(-\mathrm{p})\int_0^\infty J_0(\zeta r)J_0(\zeta\theta_0 t)\Gamma(-p)\left(\frac{K^2\zeta^2t^2}{4\epsilon^2}\right)^p\zeta d\zeta$$

で表される．
これは Weber-Shafheitlin の積分と云われるもので，この積分は可能で

$$\Gamma(p+1)\left(\frac{\varepsilon^2}{k^2}\right)^{-p-1}\frac{t^{2p}}{(r^2+\theta_0^2t^2)^{p+1}}\cdot\frac{\varepsilon^2}{k^2}\cdot F\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2},1+\frac{p}{2},1;\frac{4\theta_0^2t^2r^2}{(r^2+\theta_0^2t^2)^2}\right)$$

と得られる．(例えば文献 [10] の p.487 参照)
ここで，F は超幾何関数で，数値計算の都合のため，変形して

$$\frac{t^{2p}}{(r^2+\theta_0^2 t^2)^{p+1}}\cdot\frac{\varepsilon^2}{k^2}\cdot F\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2},1+\frac{p}{2},1;\frac{4\theta_0^2 t^2 r^2}{(r^2+\theta_0^2 t^2)^2}\right)$$
$$=\frac{\left(r^2+\theta_0^2 t^2\right)^{2p}t^{2p}}{\left|r^2-\theta_0^2 t^2\right|^{2p+1}}\cdot\frac{\varepsilon^2}{k^2}\cdot F\left(-\frac{1}{2}-\frac{p}{2},-\frac{p}{2},1;\frac{4\theta_0^2 t^2 r^2}{(r^2+\theta_0^2 t^2)^2}\right)$$

と書く事ができる．ここで

$$R^2=\frac{(r^2-\theta_0^2 t^2)^2}{(r^2+\theta_0^2 t^2)}$$

とおくと，チェレンコフ光子の空間分布は

$$\begin{aligned}G_{ph}=&\frac{-\alpha}{4\pi^3}\int_0^T dt\iint dsdp\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\left(\frac{\varepsilon^2}{k^2}\right)\left(\frac{\varepsilon^2 R^2}{k^2}\right)^{-p-1}\quad\times\\&\Gamma\left(\mathrm{p}+1\right)\Gamma(2p+s)t^{2p}\frac{\left|r^2-\theta_0^2 t^2\right|}{(r^2+\theta_0^2 t^2)}F\cdot\mathrm{M(s,p,t)}\end{aligned}\tag{166}$$

で与えられる．検算の為シャワー軸上の光子密度を

$$r\to 0$$

とおいて調べると，光子密度は

$$\begin{aligned}G_{ph}(0)=&\frac{-\alpha}{4\pi^3}\int_0^T\frac{dt}{t^2}\iint dsdp\ \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\left(\frac{\varepsilon^2}{k^2}\right)\left(\frac{\varepsilon^2\theta_0^2}{k^2}\right)^{-p-1}\quad\times\\&\Gamma\left(\mathrm{p}+1\right)\Gamma(2p+s)\cdot\mathrm{M(s,p,T-t)}\end{aligned}\tag{167}$$

となり，確かに，シャワー軸方向に放出された光子の集まりである事が分かる．
空間分布の式 (166) の複素積分は，鞍点法を用いて計算することができ，その結果は図 (8) に示しておいた.
なお，同じような計算は
I.P Ivanko, V.V. Makorov and I.A. Hevin
Preprint 98, (1976) Lebedev Physical Institute
によって行われており，彼らの計算値もこの値と略一致している.

V-6.3 散乱が大きい場合の光子の空間分布

Ice Cube の場合には吸収の m.f.p. は 110 m くらいであり，有効散乱の m.f.p は 20−30 m 程度という事が測定により知られている．なお場所によって有効散乱の m.f.p の著しく短い所が有るのでその部分は解析から外している，.

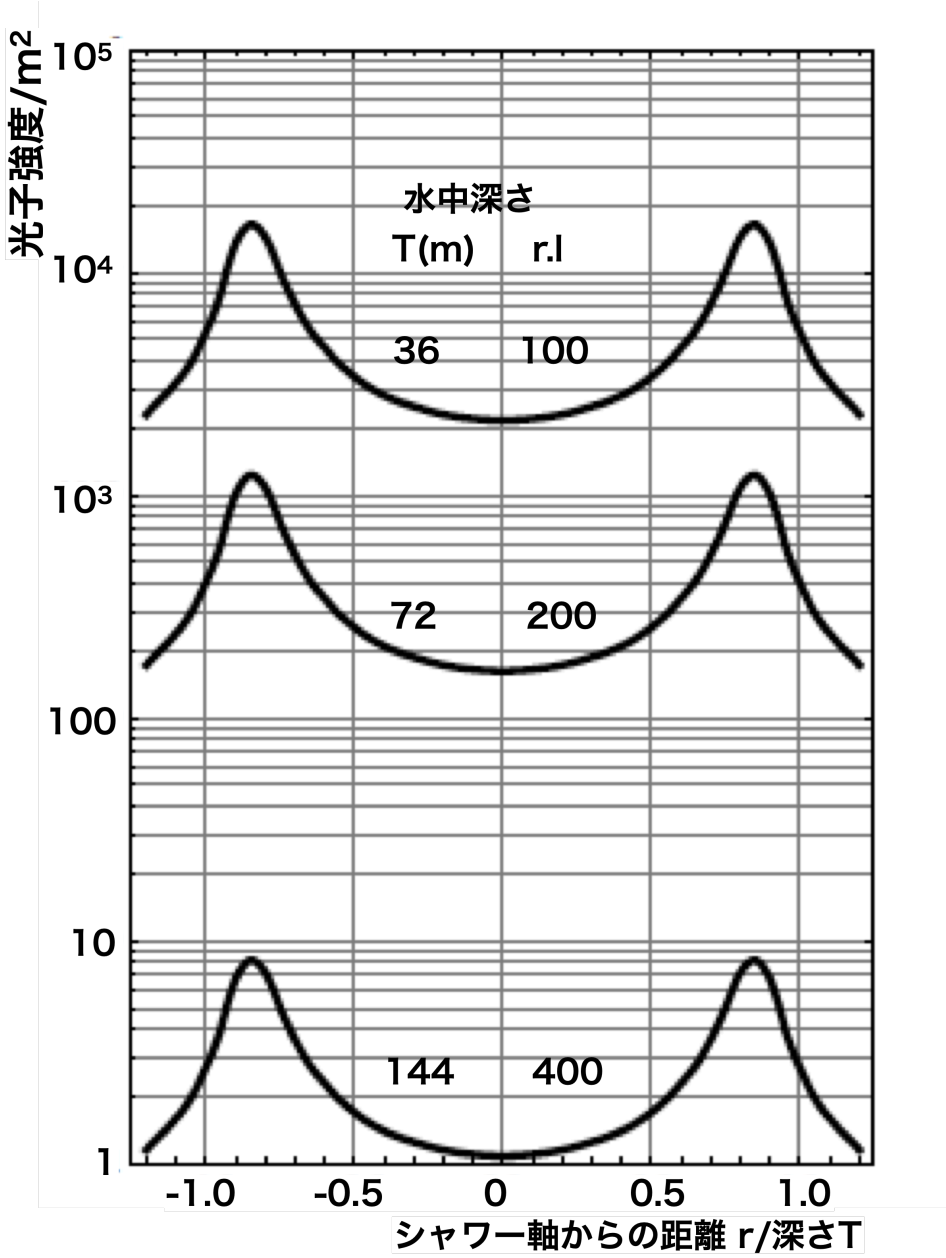

図 8　$E_0 = 10^{13}$ eV の電子による水中のシャワーのチェレンコフ光の空間分布

このように散乱の m.f.p が短いと，光子の空間分布は，主にチェレンコフ光の放射角と水中の多重 Mie 散乱に支配され，電子シャワーの散乱効果はあまり効かない事になる．

散乱が大きい場合には拡散近似で光子の空間分布を取り扱う事ができる．拡散近似は銀河中の宇宙線が散乱されて銀河内にとらわれている時に使われているので，そのアナロジーで取り扱うと考え易い．

散乱と，吸収の m.f.p. について次のように定義する

η: Effective Scattering Mean Free Path
とおくと，拡散係数 (Diffusion Constant) D は
$D = \dfrac{\eta \cdot c}{3}$
であたえられる．次いで吸収については,
τ: 光子が発生してから吸収するまでの平均時間
とおくと,
τc: 吸収の m.f.p となる．
q_0: 単位時間に発生するチェレンコフ光子の数とする．すると,
N: 全空間に存在する光子の全量は
$\dfrac{dN}{dt} = -\dfrac{N}{\tau} + q_0$ で表され，平衡状態では $N = q_0\tau$ である．
従って存在する光子の量は散乱の効果 η とは無関係である．
散乱のため空間分布の形は変わるが，光子は吸収されないためである

- 高エネルギー muon から発生するチェレンコフ光
  高エネルギー muon が物質の中を走ると，電離損失に加えて
  制動輻射
  電子対生成
  光核反応
  でエネルギーを失う．単位物質量を通過する際，電離損失は muon の energy によらず略一定量であるのに対して制動輻射，電子対生成，光核反応の損失量は muon の energy にほぼ比例する．式で書けば

$$-\frac{dE}{dx} = a + bE$$

と表す事ができる
ここで Ice Cube の場合は
$a = 0.259 \quad \mathrm{GeV/m}$
$b = 3.57 \times 10^{-4} \quad /\mathrm{m}$
が与えられ,
$E = a/b = 723$ GeV の所で，双方の energy 損失が等しくなる．
　b の項で放出された energy はシャワーを起こす．シャワー粒子の大部分は電子であり，最終的には電離損失でエネルギーを失う．平衡状態では muon が失った b の項の energy 損失とシャワー粒子による電離損失は等しいので，シャワー粒子数は
$bE/a \sim 1.4 \left(\dfrac{E}{\mathrm{TeV}}\right)$ 個
となる．
　Muon が発生するチェレンコフの光量は muon から直接放出されるものと相伴う二次粒子から発生するシャワー粒子との総和であるが，muon の Energy が高く

なると，シャワーの粒子数が大きくなるので，シャワー粒子の寄与だけが重要になり，光量を測定することにより muon のエネルギーを推定する事が可能になる．
V-6.1 で述べたように，$Z=1$ の荷電粒子で，Ice Cube の場合の屈折率，n~1.33 で，可視光の範囲を 300nm から 600nm の範囲にとると，放出される光子の数は 1m 当たり約 32,000 個となる．
したがって，高エネルギーの muon が放出するチェレンコフ光の光子数は

q_0/c =32,000 $bE/a \sim 4.5\times10^4\left(\frac{E}{\mathrm{TeV}}\right)$ photons/m

となる．
光子の吸収の m.f.p. を
$\tau c \sim 110$ m
とおくと，p.56 の N の式から全空間に存在する光子の量は

$$N=q_0\tau \sim 5.0\times10^6\left(\frac{E}{\mathrm{TeV}}\right)\ \text{photons} \tag{168}$$

となる．
この光子がどのような空間分布を示すかを次ぎに取り扱う事にする．
光子の総量が求められたので，空間分布の計算は，光子の総量が 1 に規格化した場合を計算する事にする．
従って，Z 軸方向 dZ の光源からの発光量は $\dfrac{dz}{\tau c}$ と取る事にする．
散乱と吸収が有る場合，光源を出た光子は吸収または散乱を受けず観測点に到達する direct 成分と散乱を受けた拡散成分にわけて取り扱う事にする．

- Direct 成分

光源を出た光子が，観測点に散乱や吸収を受けないで到達した成分が direct 成分である．
高エネルギー muon から発生した電子シャワーからのチェレンコフ光の場合，そのチェレンコフ光の空間分布は, 電子シャワーによる拡がりを無視すると，muon の進行する軸から半径 r の direct 成分の空間分布は光源を前述 のように規格化すると

$$\frac{1}{L}=\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\tau c}\right)\frac{1}{\sin\alpha}$$

とおいて

$$\frac{1}{2\pi r\tau c}\exp(-r/L)2\pi r dr \tag{169}$$

で与えられる．
すでに述べたように，Ice Cube の場合 $\alpha\sim41^\circ$, $\eta=20\sim30$ m, $\tau c\sim110$ m であるので，L の値としては
$\eta\sim$ 20 m $L\sim10.9$ m
$\eta\sim$ 30 m $L\sim15.1$ m

となる．
ここに示した (169) 式の direct 成分は光源から散乱や吸収を受けずに，観測点に届いた光子の数に相当する．

- Diffuse 成分

　光源から出た光子が多重散乱を受けた効果を拡散近似で取り扱うことにして，観測点おけるこの成分を diffuse 成分と呼ぶ事にする．
光子の空間密度を ρ とおくと，ρ についての拡散近似での伝搬方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho - \frac{\rho}{\tau} \tag{170}$$

で与えられ，点光源から距離 R での解は

$$\rho = \frac{\tau}{4\pi\left(D\tau\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\sqrt{D\tau}}{R}\right)\exp\left[-\frac{R}{\sqrt{D\tau}}\right]$$

で与えられる．
点光源でなく光源が線上に並んでいる時には，２次元の拡散方程式となり，解はフーリエ変換し，ついで t で積分すると

$$\rho = \frac{1}{4\pi D\tau}\int_0^\infty \frac{1}{t}\exp\left[-\frac{t}{\tau} - \frac{r^2}{4Dt}\right]dt = \frac{1}{2\pi D\tau}K_0\left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}}\right)$$

が得られる．ただし，ここで K_0 は表 1 に示した変形ベッセル関数である．
光源軸で発生した光子のうち，吸収される部分を除くと，散乱される部分は

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\tau c}}\right) = \frac{1}{1+\frac{\eta}{\tau c}} = \frac{\mathrm{\tau c}}{\mathrm{\tau c}+\mathrm{\eta}}$$

であるので，この係数を掛けて光源軸から r の距離にある，光子の密度は

$$\rho 2\pi r dr = \frac{\tau c}{\tau c + \eta}\frac{1}{2\pi D\tau}K_0\left(\frac{r}{\sqrt{D\tau}}\right)2\pi r dr \tag{171}$$

で与えられる．これが，線状の光源から光子が進行方向に放出され，その後多重散乱を受けた場合の diffuse 成分の空間分布である．

- 光源の放出角を組み合わせた光子の diffuse 成分

チェレンコフ光で放出される光子は放出のさい，チェレンコフ放出角と電子のシャワーの拡がりの影響を受ける．ここでは通過物質内の散乱が多きい場合を考えて，電子シャワーの拡がりを無視して diffuse 成分を計算する事にする．
チェレンコフ光が放出角で放出されて，観測点まで散乱と吸収を受けないで到達する空間分布は，(169) 式で

$$\frac{1}{2\pi\tau c r}\exp\left(-r/L\right)2\pi r dr = \frac{1}{\tau c}\exp(-r/L)dr$$

と与えられている．　ここで

$$\frac{1}{L} = \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\tau c}\right)\frac{1}{\sin\alpha}$$

この direct 成分は，光源の拡がりを与えているので，この成分と (171) 式に示した拡がりのない線状の光源からでる拡散成分

$$\rho = \frac{\tau c}{\tau c + \eta}\frac{1}{2\pi D\tau}K_0\left[\frac{r}{\sqrt{D\tau}}\right]$$

をくみあわせると，光子の diffuse 分布が得られる．
組み合わせの積分であるので，この２つのハンケル変換の積が，合成された分布のハンケル変換となる．
まず光源の拡がりのハンケル変換は

$$\int_0^\infty J_0(\zeta r)\frac{\eta}{\eta + \tau c}\exp[-r/L]dr = \frac{\eta}{\eta + \tau c}\frac{1/L}{\sqrt{\zeta^2 + (1/L)^2}} \tag{172}$$

拡散成分 (171) のハンケル変換は

$$\int_0^\infty J_0\left(\zeta r\right)\frac{\tau c}{\eta + \tau c}\frac{1}{D\tau}K_0\left[\frac{r}{\sqrt{D\tau}}\right]rdr = \frac{\tau c}{\eta + \tau c}\frac{1}{D\tau}\frac{1}{\left(\zeta^2 + \left(\frac{1}{D\tau}\right)\right)} \tag{173}$$

したがって，放出角とその後の散乱を組み合わせによる空間分布はハンケルの逆変換の Convolution により

$$\frac{\tau c}{\eta + \tau c}\frac{1}{D\tau L}\int_0^\infty \frac{J_0(\zeta r)\zeta d\zeta}{\left(\zeta^2 + 1/D\tau\right)\sqrt{\zeta^2 + (1/L)^2}} \tag{174}$$

前述のように

$$1/L = \left(1/\eta + 1/\tau c\right)/\sin\alpha$$

である．

$$\frac{1}{\zeta^2 + 1/D\tau}$$

の項は (173) 式の diffusion による拡がりのハンケル変換.

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + (1/L)^2}}$$

の項は光源における放出角の効果のハンケル変換である．

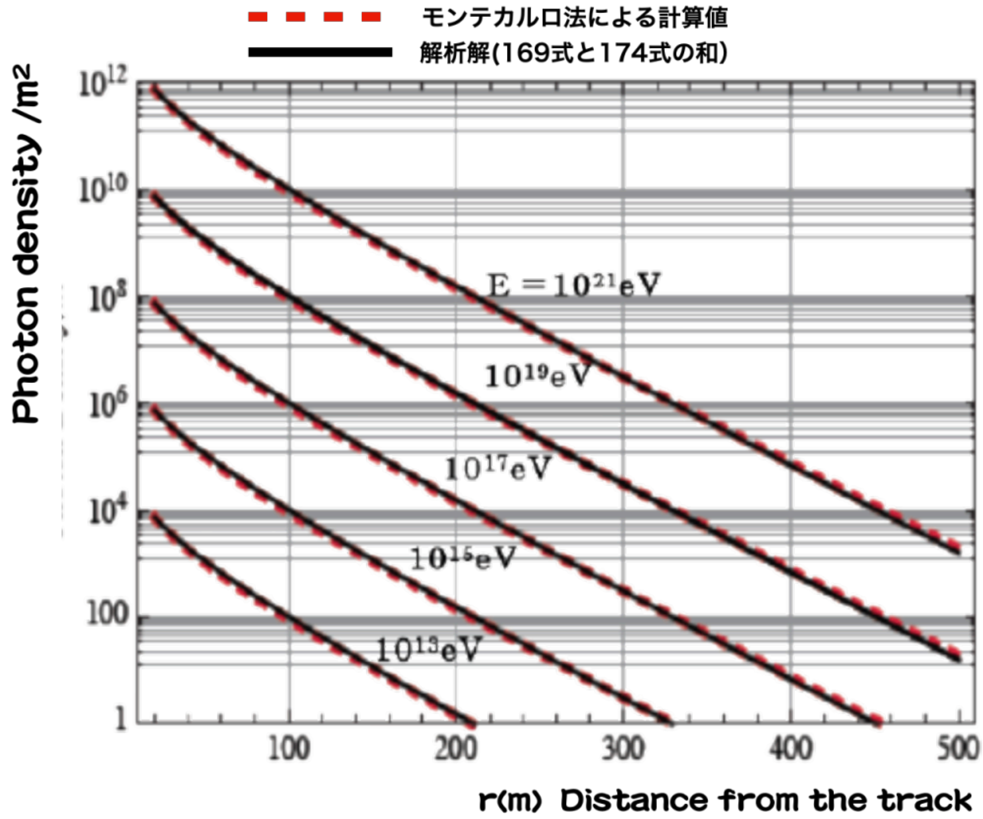

図 9　高エネルギーミューオンから誘起された電子シャワーによるチェレンコフ光の空間分布，シャワー軸はミューオンの進行方向に取ってある．

上記の積分には公式

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-bx} J_0\left(\zeta x\right) dx = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + b^2}}$$

$$\int_0^\infty K_0\left(bx\right) J_0(\zeta x) x dx = \frac{1}{\zeta^2 + b^2}$$

を使った．

最終的に (174) 式の積分は解析的には解けないので，数値積分で答えを求める．ここでは Mathematica で数値積分を行った．

Ice Cube の吸収の m.f.p として 110 m, 有効散乱 m.f.p. 20 m の場合について direct 成分 (169) 式 + diffuse 成分 (174) 式 について数値積分を行い，それぞれの energy E に対応する総光子数（168) 式 を掛けて，結果を図 9 に示した．

モンテカルロ (間瀬：千葉大) の結果は，光電効率を掛けた結果になっているので，総光子数を合わせた結果と，比較しておいたが，よく一致している事が分かる．

参考文献

[11] W.T. Scott, Theory of Small Angle Multiple Scattering of Fast Charged Particles. Rev. Mod. Phys. **35**, 2(1963), pp.231-313.

[12] G. Moliére, Z. NaturForschung. **3a**, (1948) pp.78-97. Moliére のドイツ語の原論文である. ベーテが物理的な解釈を加え，さらに大角度での補正を加えたものが，下記である.

[13] H.A. Bethe, Moliére's Theory of Multiple Scattering. Phys. Rev. **89**, 6 (1953) pp. 1256-1266

[14] G.E. Askaryan: Soviet. J. Phys. JETP 14 (1962) 441

[15] F.D.Kahn & .Lerche: Proc. Roy. Soc. A 289 (1966) 206

[16] M. Fujii and J.Nishimura : Acta. Physca. Hungaria,29, Suppl. 3 (1969). 709

[17] 西村　純，藤井正美：宇宙航空研究所報告，５巻３号 (1969) 476

[18] J. Nishimura et al., Astrophys. J. 238, 394 (1980)

[19] E.Zas, F. Haltzen & T. Stanev. : Phys. Rev. D.45 (1992) 362

付録　　第一回京都会議 (1961) の頃のこと

宇宙線国際学会が明年日本で開かれるとのことで，わが国での国際学会の開催は 4 回目を迎えることになる．戦後しばらくの間，物理系の国際学会といえば 1953 年の国際理論物理学会のことを指していたが，これが実現したのは戦前戦中を通じて湯川理論の提唱などにより日本が理論物理学で国際的に高い評価を得ていたためである．

日本での最初の宇宙線国際学会の開催は 1961 年である．第二回目の 79 年にはご出席の方は何人かおられることと思われるが，61 年の京都国際学会の出席者の方はほとんど見受けられなくなってきた．半世紀以上の長い期間，風雪に耐えても生き残った有意義なことがらは歴史に組み込まれて，次の世代に引き継いで行かねばならない．

1961 年の京都の宇宙線国際学会の前回は，1959 年にモスコーで開かれ，日本からは関戸，早川，小田，西村の 4 名が参加した．日本での宇宙線の研究は 1953 年に，乗鞍観測所，1956 年には原子核研究所の宇宙線部門の設立を受けて研究も形を整えてきた時代であった．

しかし，日本の経済状態は戦後からの立ち直りはまだ不十分で，加えて当時，航空運賃はきわめて高額で，ヨーロッパ往復には月給の何年分かと言うほどの額であった．海外旅費に対する縛りも強く，国が支給するのは唯一学術会議を通しての少量の旅費に限られていた．科学研究費のような研究費からの使用は厳重に止められていて，宇宙線で言えば学術会議で原子核・素粒子の部門と分け合って，毎回の一名弱の割り当てであった．従って，国際学会に出席するには学術会議の枠を取るか，開催国または IUPAP からの旅費つきの招待，たまたま外国に居住している様な場合に限られていた．国際学会への出席がいかに困難であったか，母国で開催する意義が極めて大きかったかが想像できる事と思う．

1959 年のモスコー会議は，1957 年のスプートニクの打ち上げ，1958 年のバンアレン帯の発見に見られるように，それまで素粒子物理学的観点が主流であった宇宙線研究が Space Physics の観点に移行した重要な時期である．

国際学会を開くとなると資金集めも必要である．しかし，宇宙線グループは単独で国際学会を開くほどの力を持っていなかった．やや長い歴史を持つ地球物理のグループと共同して地球 (電磁気) 嵐の国際学会と宇宙線国際学会との 2 つを合同して国際学会を開くことにした．国内の宇宙線研究者は全力をあげて協力し，宇宙線研究者の全員が何か担当を受け持ち，会議の成功に力を注いだことを思い起こす．

外国人研究者の滞在するホテルには世話係の担当を決めて日本人の研究者が滞在し面倒を見ることにした．例えば，外国の宇宙線コミッションメンバーで和風旅館に滞在したい

人たちは『吉川』と言う高級日本旅館に宿泊してもらい，私と鎌田さんは『吉川』に泊まり込んで面倒を見ることになった．学会の終わりが近づいたころ『吉川』に滞在した外国人コミッションメンバーから『舞妓さんを見たい』という話が出て，鎌田さんが旅館と掛け合って『舞妓さんの踊りの会』を開いたとか，hyper 核の発見で著名なポーランドのデーニッシュ博士の visa のことで，折悪しく襲来した台風のなかを，私が案内して神戸にある領事館までお連れしたとか思い出す．

会場は国立の『宝ヶ池の国際会議場』ができる前で，京都市内にある府立のこじんまりした会議場であった．講演会場から廊下に出る前に広間になっていて，参加者所同士議論をするのに大変便利な建物で，宇宙線程度の規模の学会にはうってつけのサイズであった．スライドは３５ミリのフイルムが使われ始めたばっかりで，一枚づつ差し入れ，当時は左右裏表と入れ違いが多いのが常であった．しかし，驚くべきことにこの京都会議ではこの数千回のスライド差し入れに一枚も入れ違いがなかった．野球で言えば完全試合である．外国の人は初めのうちは感心していたが，終わりのころになると，細かいことでもゆるがせにしない日本人の完璧さには薄気味悪さを感じたという方もいたようであった．

私が宇宙線の研究を始めて，国際学会とも関係を持つようになったのは，第５回バレンナ，第６回モスコー会議辺りからで現在まで 30 回を越す学会を経験したことになる (この内約 1/3 には出席).

この長期間の経験を通じて何か感じた事はなかったか. . . ？ 本来，国際学会の目的は，最新の情報を持ち寄り，お互いに直接議論して，新しい分野の発足と発展に大きな役割を果たすものと考えられている．広い分野にわたるのでつい遅れ気味の時計をここでリセットする良い機会とも言える．新粒子の発見，γ 線バーストの報告，X-線天文学，ガンマ線天文学の提唱と新分野への展開，太陽ニュートリノ，宇宙線ニュートリノの観測，毎回報告されるより高いエネルギー現象や空気シャワーの報告など，国際共同研究の発展へと国際学会が大きな役割を果たしてきた.

しかし実際の学会での動きはこのように単純なものばかりとは言えない．発表はされたが学会期間中は注目されなかったもので，後に大きく発展したものも少なくない．一方学会の時は注目を集めたが，時とともにその評価が薄れていった研究もある．『良い研究であれば，後に必ず発展する!!』学会での最初の評価で気落ちする事はない．もうひとつ注意すべきことは，文献としての会議のプロシーディングスのことである．ギリギリのタイミングまで頑張って国際学会に発表すると，もう論文は外向けに発表したような気分になる．しかしながら会議のプロシーディングスは元々インパクトと速報性のためのもので，論文の長さも制限されている．アクセスも毎回変わるので便利とは言い難い．従って，文献として後年信頼できる形にしようと思うならば，然るべき Journal でのパブリケーションが不可欠である．

学会が終に近づいた頃，タイミングを合わせたかのように関西地区に台風が襲った．近代的な安全な建物の中にいて，台風の進路予測など TV で NHK の解説，窓越しに暴風雨を見ていることは外国の人々にとっては映画でなく実物のスリルに満ちた経験であったに違いない．

それから，暫くの間，外国に行くとよく京都の話が出た．『外国であんなに親切にされたのは，生まれてこのかた初めての経験だ・・・』という感謝の言葉であった．

日本の宇宙線研究はその後，国際的にも大きく発展を遂げたが，京都会議がプラス方向に働いたのは確かなことであった．

編集後記

本レポートは，電磁カスケードシャワーの解析的扱いについて，宇宙線空気シャワー研究の世界的権威である西村純先生自らに執筆いただいたものである．内容の重要性について改めて記す必要はないと思われるので，各種積分変換とその間の関係の解説と具体例は，カスケード理論以外の分野でも大いに役立つはずである，とだけ述べ，ここでは，編集後記として本レポート作成の背景を説明しておきたい．

現在の宇宙線研究において，空気シャワーのモンテカルロシミュレーションは欠くことのできない重要なツールである．多くの研究者が日々 CORSIKA のお世話になっているはずだが，利用者が皆 CORSIKA の中身を熟知しているだろうか．重要なツールをブラックボックス化しないために，水本の声かけで 2013 年に「モンテカルロシミュレーション研究会」が発足した．その初期の活動の中で，2015 年に西村先生に「電磁カスケードシャワーの解析的扱い」について講義をお願いしたことは西村先生ご自身の序文にある通りである．この講義内容を文章として残し，今後の研究者のバイブルにしたいとのお願いし，西村先生に本レポートを執筆いただくことになった．これだけの豊富な内容を日本語で学べる本レポートが，日本の空気シャワー研究力の底上げに繋がることを期待している．なお，「モンテカルロシミュレーション研究会」は，笠原が開発した COSMOS の改良を引き継ぐ形で，モンテカルロシミュレーションをより奥深く理解し活用する活動を続けている．また「空気シャワー観測による宇宙線の起源探索研究会」として，複数の観測グループを交えた交流を続けている．

レポートの原稿はかなり前にいただいていたが，LaTeX 化，図表や参考文献の確認作業を進めるなかで出版までの時間がかかってしまった．西村先生を長くお待たせすることになってしまったが，ようやく完成したことを報告し改めてお礼を申し上げたい．ありがとうございました．

編集に手間取っている間に，西村先生から，最初の日本開催であった 1961 年の宇宙線国際会議回想記をいただいた．宇宙線国際会議は 2023 年に 20 年ぶりに日本で開催される．60 年前の熱気を今に伝えるべく，本レポートの最後に掲載させていただくことにした．

先生のカスケード理論は回想記にあるような時期 (1950 年頃) に発展させられたものである．その当時のご苦労が偲ばれる．先生からよく聞いた言葉として「拝外主義」というのがある．「排外主義」ではなく，外 (そと) を拝 (おがむ) む，ということで，ややもすれば「外」(当時の欧米) の「もの，こと」を内（日本）の「もの，こと」より素晴らしい，優れている，と吟味せずに思ってしまう，ということであろう．我々も自戒すべき言葉として胸に刻んでおくべきものである．

なお, 本冊子の pdf 版は宇宙線研究所のホーム・ページの年次資料・報告書

https://www.icrr.u-tokyo.ac.jp/publication/
の「歴史・学術資料」*[8]の項目中に掲載される予定です.

本活動は東京大学宇宙線研究所の共同利用研究の一環として実施しました.

2022 年 11 月
水本好彦，埓隆志，笠原克昌，中村健蔵

*8 旧「歴史資料」