

修士論文

2台のX振り子を用いた万有引力定数 G の測定

東京大学大学院
理学系研究科 物理学専攻

近藤 寿浩

平成14年1月

概要

Newton の万有引力の法則に現れる万有引力定数 G は Cavendish を含め多くの人によって測定されてきた。しかしながら、他の基礎物理定数と較べて精度が悪いうえに、近年はその有効数字が下がり僅か 2 桁しかない。この事実は、万有引力の測定もしくは万有引力の法則に問題があることを示している。つまり、万有引力は古くてなお新しいと言える。

このような混沌とした状況の中で、本研究ではこの万有引力定数の測定に挑んだ。測定装置は、X 振り子という新しい装置である。これは、当研究室にてレーザー干渉計型重力波検出器の防振装置として開発されたものである。

X 振り子は長い単振り子と等価であり万有引力などの微小な力をメカニカルに増幅するという長所を持つ一方で水平面の傾きに対して敏感すぎるという短所を持つ。この短所を補うために本研究では X 振り子を 2 台用いている。

万有引力の効果を X 振り子にて確認することができたが、残念ながら万有引力定数 G の値を決定するまでには至らなかった。これは、予想外に床の傾きが大きかったことが原因である。測定において床の傾きが常に支配的であり、万有引力の効果は床の傾きに比べて非常に小さくなってしまい正確に万有引力の効果を取り出すのが難しかったのである。

逆に本研究によって、改めて X 振り子の傾斜計としての有効性が確認された。

目次

第1章	背景	5
第2章	万有引力の法則の検証	9
2.1	現在までに行われた万有引力定数 G の測定	9
2.2	その他の万有引力の測定	11
2.2.1	万有引力の浸透、吸収、遮蔽に関する測定	11
2.2.2	万有引力の局所的な指向性に関する測定	11
2.2.3	物質の物理的状態に対する G の依存性の測定	12
2.2.4	物質の化学的状態に対する G の依存性の測定	12
2.2.5	温度に対する G の依存性の測定	12
2.2.6	物質の放射能に対する G の依存性の測定	12
2.2.7	物質に含まれる電磁気エネルギーに対する G の測定	12
2.2.8	物質間の距離に対する G の依存性の測定	13
2.2.9	時間に対する G の依存性の測定	13
2.3	余次元重力	14
第3章	X 振り子	17
3.1	X 振り子のメカニズム	18
3.1.1	α 、 β 、 θ の関係式	18
3.1.2	重心の軌跡	19
3.2	X 振り子の応答	20
第4章	原理および方法	25
4.1	概観	25
4.2	原理	27
4.3	方法	27
第5章	X 振り子の製作	29
5.1	式号機的设计	29
5.2	X 振り子の組み立てと調整	30
5.3	製作した X 振り子の特性	32
第6章	フォトセンサーの製作	43
6.1	フォトセンサーの回路	43

6.2	フォトセンサーの較正	45
第7章	測定	49
7.1	製作した X 振り子の較正	49
7.2	万有引力定数 G の測定	50
7.2.1	その一	51
7.2.2	その二	51
7.2.3	その三	52
第8章	考察および検討	57
8.1	測定結果に関して	57
8.2	改善策	58
8.3	万有引力定数 G の測定装置としての X 振り子に関して	59
8.4	傾斜計としての X 振り子	59
第9章	結論	61
付録 A	Keyence 社製レーザー変位計 (LB-040) について	63
付録 B	式号機の治具設計図	65
付録 C	一次のローパスフィルター	67
付録 D	直方体の物体が形成する重力加速度場の計算	71

第1章 背景

17世紀にニュートンが惑星の運動を説明するために万有引力の法則を仮定し、それ以降主に天文学においてこの法則の妥当性が検証されてきた事は周知の事実である。例えば、既知の太陽系の惑星の運動から未知の太陽系の惑星を理論的に予想し実際にその惑星が発見された事などが良い例であろう。但し、水星の近日点の移動を説明できず、20世紀にアインシュタインの一般相対性理論で説明されたことから現在ではニュートンの万有引力の法則は近似的に成立するものとして認知されている。とは言え、地上における重力現象はこの近似範囲内であり、十分にニュートンの万有引力の法則が成立することが実証されている。最近では、サブミリメートル領域では空間が3次元ではなくもっと多次元であり、そのために重力が逆2乗則に従わなくなるという理論が提唱され各地で検証することが試みられている。

さて現在のところ万有引力定数 G は、

$$G = 6.670 \pm 0.010 \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$$

である。つまり、有効数字は僅か2桁である。基礎物理定数と考えられている割に非常に精度が悪い。実は、1990年の段階では

$$G = 6.67259 \pm 0.00085 \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$$

であり、有効数字は4桁あったのである。この値は、米国標準局の Luther と Towler が1982年に行った高精度な測定が基礎となっているのだが、その後他のグループで行われた高精度な測定はこの値から大きく外れてしまったために有効数字が下がるという事が起きてしまったのである。米国標準局の Luther と Towler が1982年に測定して得た結果 [1] は

$$G = 6.6726 \pm 0.0005 \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$$

である。それに対してドイツPTBの Michaelis らが1995年に測定して得た結果 [2] は

$$G = 6.71540 \pm 0.00056 \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$$

であり Luther と Towler の測定にも劣らず高精度な測定であったにも関わらず約600ppmも従来の値からずれていたのである。この例は最も極端な例であるが、その

他にも1995年にニュージーランド標準研究所のFitzgeraldらが測定した結果[3]は

$$G = 6.6656 \pm 0.0006 \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$$

であり、やはり測定精度は高いのだがLutherとTowlerの測定からはずれている。主にこれらの結果を反映して現在の万有引力定数Gの有効数字は2桁にとどめられているのである。

このような状況において万有引力定数Gの測定をもっと行う必要があると考えられる。また、Cavendish以来、ほとんどの測定が擦れ秤を用いて行われているので擦れ秤とは異なる装置で万有引力定数Gを測定することは意義があると考えられる。そこで今回は、X振り子という新しい装置で万有引力定数Gを測定しようと試みた。

この章の最後に、近年の測定によって得られた万有引力定数Gの値をグラフにしてまとめてみた*。

*このグラフは参考文献[7]から抜粋したものである。

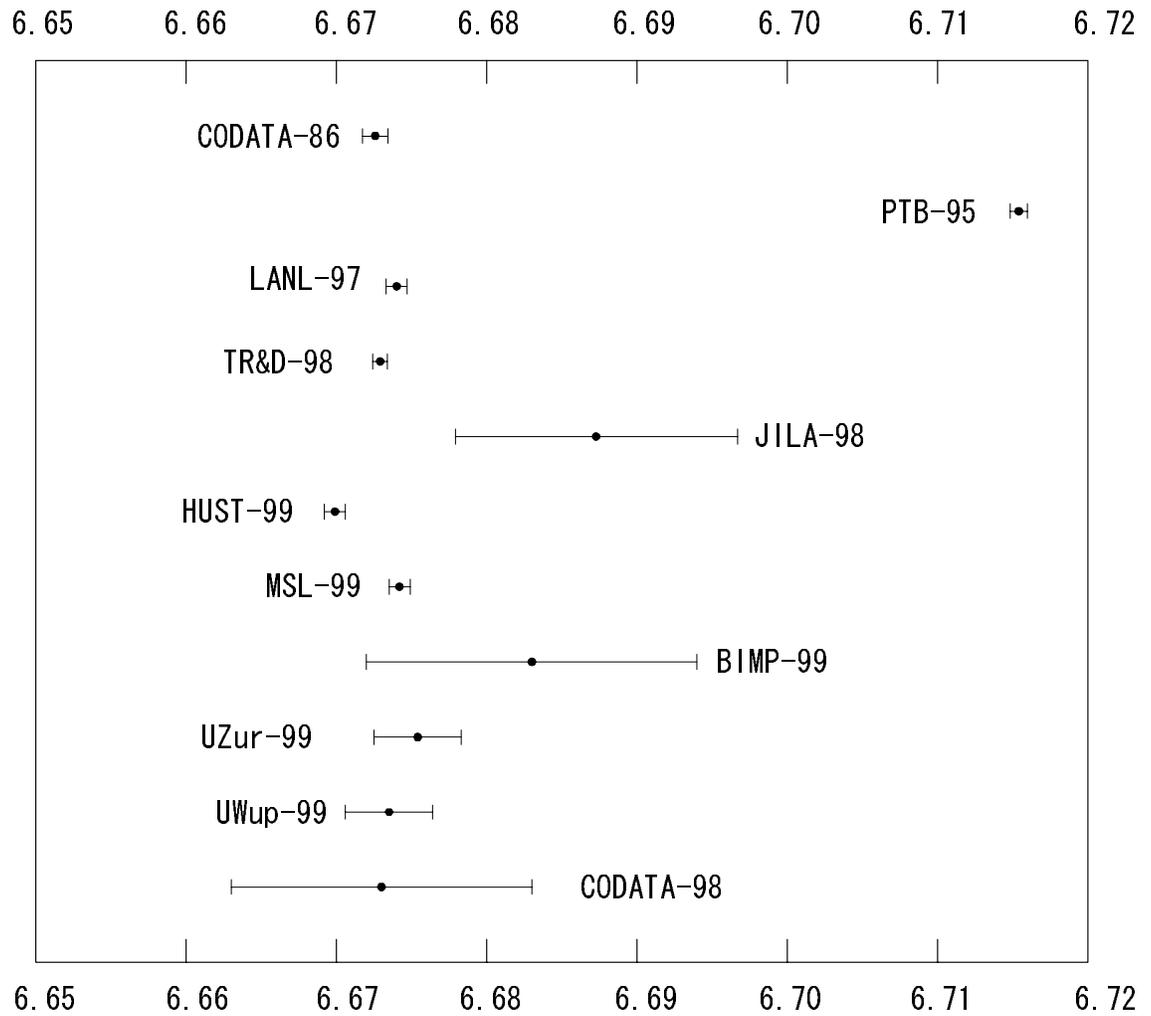


図 1.1: 近年の万有引力定数 G の測定結果 (横軸の単位は $10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2}$ である。)

第2章 万有引力の法則の検証

本研究においては、X 振り子という装置を用いて Newton の万有引力の法則に現れる比例係数、万有引力定数 G の測定を試みたわけだが、まずはこれまでに行われた万有引力定数 G の測定について振り返ってみる。[5, 6, 9, 10]

一方、万有引力定数 G の絶対値を正確に測定することを目的とするのではなく万有引力の法則を検証することを目的とした測定がこれまでに数多く行われてきた。そこで、この事項に関して次の 9 種類に分けて順番に概説する。[5, 6, 9]

- 万有引力の浸透、吸収、遮蔽に関する測定
- 万有引力の局所的な指向性に関する測定
- 物質の物理的状態に対する G の依存性の測定
- 物質の化学的状態に対する G の依存性の測定
- 温度に対する G の依存性の測定
- 物質の放射能に対する G の依存性の測定
- 物質に含まれる電磁気エネルギーに対する G の測定
- 物質間の距離に対する G の依存性の測定
- 時間に対する G の依存性の測定

最後に、万有引力の法則に関する最近の話題として余次元重力について簡単にふれておく。[12, 13, 14]

2.1 現在までに行われた万有引力定数 G の測定

Newton の万有引力の法則は 17 世紀後半には確立されたが、当時その比例定数である万有引力定数 G の値については当 Newton をはじめとしてほとんど関心が向けられなかった。その代わりに、Newton の第二法則とこの万有引力の法則を利用して地球の密度を測定することに関心が向けられ、その途中過程で万有引力定数 G が測定されていた。つまり、地球の重力加速度、半径、質量そして密度をそれぞれ g_{\oplus} 、 r_{\oplus} 、 M_{\oplus} 、 d_{\oplus} とすると、地球上での質量 m の物体の落下運動は

$$mg_{\oplus} = G \frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \quad (2.1)$$

と書き表すことができる。従って、地球を完全な球とみなすと地球の密度は

$$d_{\oplus} = \frac{g_{\oplus}}{4\pi GR_{\oplus}}$$

となるので G を測定すれば、自然と地球の密度が分かる。このため、地球の密度を測定する過程で万有引力定数 G が測定されることになる。Cavendish もその一人であった。彼は、1798年にねじれ秤を用いることで精密に万有引力定数 G そして地球の密度を測定した。このねじれ秤というのは、上端を固定した細い針金の下端にダンベル状のおもりを吊るしたものである。針金の半径を r 、長さを l 、ずれ弾性率*を Υ とすれば、下端を φ だけねじった時に針金の断面に生じる応力モーメントは

$$M = \frac{\pi\Upsilon r^4}{2l}\varphi \quad (2.2)$$

で与えられる [8]。ここで、ダンベルの長さを $2b$ とし、両端のおもりの重さを共に m とすると針金まわりのダンベルの慣性モーメントは

$$I = 2b^2m \quad (2.3)$$

となり、回転運動の方程式は

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\pi\Upsilon r^4}{2l}\varphi \quad (2.4)$$

となる。従って、このねじれ秤は周期が

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4b^2ml}{\pi\Upsilon r^4}} \quad (2.5)$$

の単振動をすることが分かる。例えば、 $\Upsilon = 10^{10}[Pa]$, $r = 100[\mu m]$, $l = 30[cm]$, $b = 10[cm]$, $m = 10[g]$ とすると、周期は約 40 秒くらいになる。つまり、ねじれ秤のねじれ応力は弱いということの意味している。微弱な力のモーメントがこのねじれ秤に作用した場合に大きくねじれるために微弱な力の測定に適する。もともとねじれ秤は、電磁気力の測定に使用されていた。その後、19世紀後半になって初めて重力物理実験の文献に万有引力定数 G^{\dagger} が現れるようになる。そして、1896年に Etövs は新しいねじれ秤の測定法を考案した。これが今日でも行われている time-of-swing 法と呼ばれるものである。これは、ねじれ秤を用いた測定において直接測定する対象をねじれ秤のねじれ角ではなく時間を測定することに置き換えている。ねじれ秤が平衡状態にある時のダンベルおもりの線上に重力源として一対のおもりを置いてねじれ秤を自由振動させると、ねじれ秤がねじれている時に本来のねじれ応力に加えて重力源からの万有引力のトルクが働くために見かけ上ねじれ応力が強くなり周期は短くなる。角振動数は大きくなるのであるがこの大きくなった角振動数の2乗と重力源が置かれていない時の角振動数の2乗の差は万有引力定数 G に比例する。

*剛性率とも呼ばれる。

[†]当時は f と表していた。

このため、時間の測定により万有引力定数 G が測定できるのである。因みに Luther と Towler もこの方法を採用している。その後も万有引力定数 G の測定は繰り返行われているのだが、1942 年に行われた米国標準局の Heyl と Chrzanowski の測定や 1982 年に行われた同じく米国標準局の Luther と Towler の測定が有名である。

ところで、物質の内部摩擦モデルとしては擬弾性モデルと速度ダンピングモデルが考えられているが、換れ秤のワイヤーに対して擬弾性モデルを採用するとバネ定数が周波数に依存することになり time-of-swing 法を用いた万有引力定数の測定においてもこの効果が入りずれることが黒田和明によって指摘された。[4] 実際に、擬弾性モデルを支持する報告がいくつもなされており、最近はこの擬弾性による誤差が入り込まない測定が行われている。しかしながら、前章で述べたように万有引力定数の測定には未だにばらつきがあるのが現状である。

このように、万有引力定数 G の測定精度があまり向上しない理由として Gillies は以下の 4 つを挙げている [6]。

1. 自然界の 4 つの基本的な力のうちで万有引力は桁違いに弱い。
2. 万有引力は遮蔽することができない。
3. 万有引力定数 G は、他の基礎定数との関係が確認されておらず独立である。
4. 換れ秤を使用するに当たって様々なカップリングや系統誤差が存在し、これが測定限界を与えている。

2.2 その他の万有引力の測定

2.2.1 万有引力の浸透、吸収、遮蔽に関する測定

透磁率からの類推として、万有引力定数 G が相互作用する物体間に存在する物質の密度に依存するのではないかと考えられて測定が行われた。このことに関しては 1800 年代前半から依存は無いという結果が出ている。その後その精度は上がり、1962 年に M.Caputo は

$$(\Delta G/G)_{\text{absorp}} \leq 10^{-16}$$

という結果を得ている。

2.2.2 万有引力の局所的な指向性に関する測定

結晶性物質においては屈折率や熱伝導率といった性質が測定する方向に依存しているので、同様に結晶の内部で万有引力定数が測定する方向に依存するのではないかと考えられて測定が行われた。1924 年に Heyl が徹底的に実験を行い

$$(\Delta G/G)_{\text{anisot.}} \sim 10^{-9}$$

という結果を得ている。

2.2.3 物質の物理的状態に対する G の依存性の測定

万有引力を及ぼし合う物体の形状（例えば、球、円柱、棒、輪）による万有引力の依存性を測定したり、物体の状態（液体、気体、固体）による万有引力の依存性の測定がなされた。しかしながら、実験の精度の範囲でズレは見つかっていない。

2.2.4 物質の化学的状態に対する G の依存性の測定

この項目は、一般相対性理論の弱い等価原理の検証としても知られている。つまり、慣性質量と重力質量の比が物質に依存しているかどうかという検証である。測定の結果、ズレは見つかっておらず、

$$\Delta G/G \leq 10^{-12}$$

となっている。

2.2.5 温度に対する G の依存性の測定

温度に対する G の依存性を測定して依存しないことが報告されているが、あまり確定的ではない。何故ならば、このような実験をする事が難しいからである。測定において高精度の秤に温度差のある物質を使用する上に、秤の下には温度分布の良く分からない地表があり再現性のある実験が行えないことによる。P.E.Shaw と N.Davy が 1922 年に換れ秤を用いて測定した結果は

$$|\Delta G/G| \leq 2 \times 10^{-6} [\text{K}^{-1}]$$

である。

2.2.6 物質の放射能に対する G の依存性の測定

核力と万有引力との結合が無いかどうかを調べるために測定が行われた。1918 年に P.Zeeman が得た値は

$$\Delta G/G \leq 5 \times 10^{-8}$$

である。

2.2.7 物質に含まれる電磁気エネルギーに対する G の測定

電磁気力と万有引力の間に結合があるかどうかについても測定が行われている。但し、この場合は非常に注意しなければ電磁気力と実験室装置が結合し結果が曖昧になってしまうようである。磁化された物質に対する G の依存性は 1909 年に M.G.Lloyd によって測定されており

$$\Delta G/G \leq 5 \times 10^{-12} [\text{gauss}^{-1}]$$

という結果が出ている。また、電気を帯びた物質に対する G の依存性は 1922 年に L.Simons によって測定されており

$$\Delta G/G \leq 1.2 \times 10^{-7} [\text{V}^{-1}]$$

となっている。

2.2.8 物質間の距離に対する G の依存性の測定

この項目は、Long が従来の Cavendish 型の実験結果を見直して G の大きさに系統的なずれがあるということをも主張し、更に万有引力定数 G が距離 r の関数であるとしたことに触発されて実験が行われた。結局、万有引力の逆 2 乗則の検証が行われたのである。Gauss の定理が成立すれば周囲に球対称あるいは軸対称で軸方向に一樣な物質分布があっても内部の空間のポテンシャルは一定になるはずなのでこのポテンシャルが一定であるかどうかを Spero らは測定した。その結果、 $2\text{cm} < r < 5\text{cm}$ において

$$\Delta G/G \leq (1 \pm 7) \times 10^{-5}$$

という結果を得ている。この他にも、扱れ秤を使用したり物体を回転させることで動的な測定を行っているが Spero らの精度には及んでいない。

2.2.9 時間に対する G の依存性の測定

1937 年に Dirac は自然界に現れる巨大な無次元数（例えば、プロトンと電子の間に働く万有引力の大きさに対する静電気力の大きさの比）がいずれも 10^{40} 程度の大きさあるいはその冪になるという large numbers hypothesis を唱え、この数が宇宙の年令と共に増加することから、万有引力定数 G が時間と共に減少すると予想した。減少の割合は

$$\frac{\dot{G}}{G} \sim -5 \times 10^{-11} [\text{year}^{-1}]$$

で与えられる。

火星上の Viking 着陸船と地球上の観測所とのレーダーによる 6 年間にわたる距離の測定の解析から

$$\frac{\dot{G}}{G} \sim (0.2 \pm 0.4) \times 10^{-11} [\text{year}^{-1}]$$

が得られている。このため、Dirac の予想は支持されていない。

その他にも、物質の量子状態に対する G 依存性の測定や G および慣性質量の非等方性の測定が行われている。

2.3 余次元重力

万有引力は非常に弱い力であり、これまでの万有引力定数 G の測定結果は前章で述べたように非常に精度が悪い。その上、測定スケールが小さくなると万有引力は

$$F_N = \frac{GM_1M_2}{r^2} \propto r^4$$

に従い、急速に小さくなってしまい測定が難しい。(質量 M は距離 r の3乗に比例することに注意。)従って、サブミリ領域で万有引力の検証は行われていない。ミリメートル領域では Irvine ら、センチメートル領域では Mitrofanov らによって行われている。このような状況において、万有引力のポテンシャル ϕ にはマイクロな有限到達距離の補正項があるかもしれないということが理論家によって指摘されている。代表的な例として藤井保憲の理論 [11] では

$$\phi = GM \frac{1 + \alpha \exp^{-r/\lambda}}{r} \quad (2.6)$$

を与えている。そして、この形式によって表現される様々な新しい力がサブミリ領域で提唱されている。図 2.1[‡]には、提唱されている新しい力とそれを制限するこれまでの測定結果が示されている。(図中の太線の右側の領域がこれまでの測定によって制限されている領域である。)この新しい力の中で注目を浴びているのが余次元重力と呼ばれているものである。

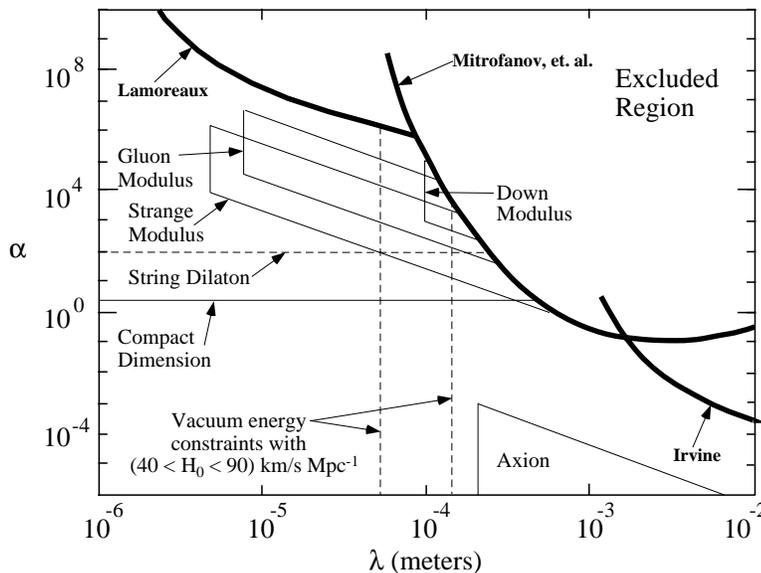


図 2.1: 新しい力とこれまでの実験による制限

[‡]このグラフは、J.C.Long の論文から抜粋した。一部分、不要な箇所を消してある。hep-ph/0009062

この余次元重力は、「なぜ基本的な4つの力のうち桁違いに重力が弱いのか。」といういわゆる階層問題を解決するべく紐理論に基づき提唱された。これによると3次元空間というものは見えない多次元空間の一部であり、小さなスケールの領域では重力のみがこの多次元空間に伝播することができ逆2乗則ではなく、逆3乗則や逆4乗則になるとしている。そしてこの理論において、余次元の次数が1であるならば、余次元のスケールが天文学的なスケールになってしまいニュートンの法則が精密に検証されている太陽系の運動と明らかに矛盾してしまうが、次数が2であるならば余次元のスケールがミリメートルになり、ちょうど万有引力の検証があまり進んでいない領域に重なるので注目を浴びているのである。この微小ではあるが巨視的というべき距離でのニュートン法則からのずれを検証しようという実験がワシントン大学の Eot-Wash グループを始めとして10あまりのグループによって行われている。この Eot-Wash グループは特殊な捩れ秤を使用して0.2mm程度のスケールまではニュートンの逆二乗則からのずれを検出していないという結果を既に出している。

しかしながら、余次元の次数が2を超えてしまうと余次元の現れるスケールが小さすぎて卓上の実験では難しい。そのような領域に対しては、次世代の加速器による検証が必要となってくる。

第3章 X振り子

X振り子は、図3.1のように単振り子とは異なり2本のワイヤーで襷掛けにおもりが吊るされている。この襷掛けに吊るされている様子がアルファベットのXのように見えるためX振り子と呼ばれる。勿論、X振り子の動きは単振り子の動きとは異なるが、微小振動の範囲でX振り子の動きは単振り子の動きと同等と見なせる。その上、X振り子のおもりの重心の位置を調整することで重心の軌跡が平坦に近づき長い単振り子と等価になる。つまり、僅か数10cmのX振り子で100 mから1kmの長さを持つ単振り子を実現できる。現在のところ、最長周期として70秒が報告されている。[15]これは単振り子に換算して約1.2kmの振り子に相当する。このため、微弱な重力などを測定する際にX振り子を用いると大きな変位が得られ、測定が容易になる。ちょうど、X振り子は重力のメカニカルな増幅器として働いている。

そもそもこのX振り子は、当研究室にてレーザー干渉計型重力波検出器の防振装置として開発された。振り子は固有振動数以上の振動に対して応答の落ちるメカニカルなローパスフィルターとして働き、振り子のワイヤーを通して伝わってくる地面振動なども固有振動数以上の領域のものはカットされ振り子には伝わらない。従って、共振振動数を下げるつまり長周期の振り子を実現できればそれだけ強力なローパスフィルターとなりより多くのノイズが落とせることになる。この意味で長周期を手軽に実現できるX振り子は、防振装置として期待が寄せられた。また、X振り子は単振り子とは反対に周期が長くなればなるほど振動のQ値が下がる。Q値が低いということは、励起した振り子の振動がすぐに減衰してしまうことを意味する。つまり、突発的なノイズにより揺れ始めた振り子がすぐに止まり、定常状態へすぐに復帰できるというメリットがある。このように防振装置としていくつかの長所を持つX振り子であるが、地面の傾きに対してX振り子は敏感であり、地面が少し傾くとそれに応じてX振り子の振動面が大きく傾いてしまい防振せずに逆に増幅してしまうという短所がある。この短所は、防振装置としては致命的であり、何らかの制御を施す必要があるが、結局現在のレーザー干渉計型重力波検出器の防振装置としては使用されておらず、開発もストップしたままになっている。因みに、現在のレーザー干渉計型重力波検出器防振装置としては振り子を振り子で吊った2段振り子が用いられている。

以上、X振り子の特徴を概略したのであるが、以下ではこのX振り子のメカニズムの定式化を行う。

3.1 X振り子のメカニズム

3.1.1 α 、 β 、 θ の関係式

ここでは、一番簡単な場合について考えることにする。2本のワイヤーの長さを共に u とし、このワイヤーを繋いでいる上下2枚の板の長さを共に t とする。ワイヤーの質量は無視し、振り子の重心は下板の中央の点から真下 h の点にあり重量は m とする。また、2本のワイヤーと上板のなす角をそれぞれ α 、 β とし、X振り子の下板の傾きを θ とする*。更に、上板を固定して上板の中央の点を原点にとり、上板を X 軸、それと直交する軸を Y 軸とする。

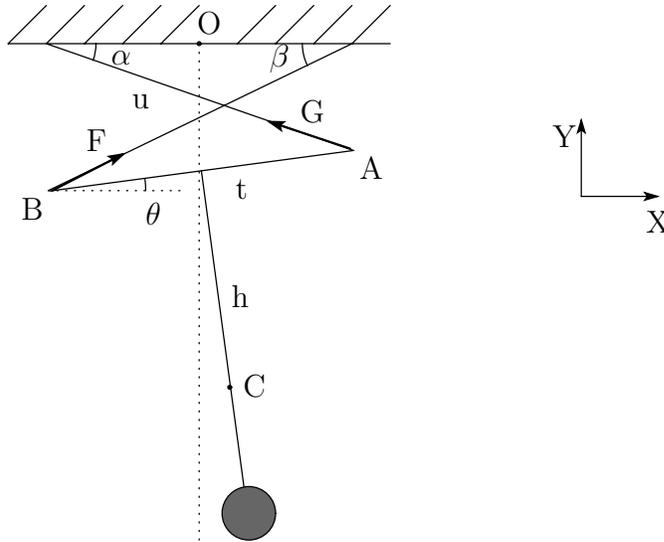


図 3.1: X振り子のメカニズム

すると、下板の右端の点 A の座標は

$$\begin{cases} x_A = u \cos \alpha - \frac{t}{2} \\ y_A = -u \sin \alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

となり、下板の左端の点 B の座標は

$$\begin{cases} x_B = -u \cos \beta + \frac{t}{2} \\ y_B = -u \sin \beta \end{cases} \quad (3.2)$$

となる。ところで、この点 A と点 B の間の距離は、当然下板の長さ t になっていなければならない、束縛条件となっている。この束縛条件を X 成分と Y 成分に分けると

$$\begin{cases} t \cos \theta = u (\cos \alpha + \cos \beta) - t \\ t \sin \theta = -u (\sin \alpha - \sin \beta) \end{cases} \quad (3.3)$$

*下板が上板に対して水平の時、 $\theta = 0$ とし、半時計周りに角度 θ を測るものとする。

と表現できる。この式 (3.3) を解くことにより、 α 、 β 、 θ の関係式が得られる。[†]

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{2u} \left(-t \sin \theta + \sqrt{t^2 \sin^2 \theta + 2(u^2 - t^2)(1 + \cos \theta)} \right) \\ \cos \alpha = \frac{1}{2u} \left(t(1 + \cos \theta) \pm \sqrt{(1 - \cos \theta)(2u^2 - t^2(1 + \cos \theta))} \right) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{1}{2u} \left(t \sin \theta + \sqrt{t^2 \sin^2 \theta + 2(u^2 - t^2)(1 + \cos \theta)} \right) \\ \cos \beta = \frac{1}{2u} \left(t(1 + \cos \theta) \mp \sqrt{(1 - \cos \theta)(2u^2 - t^2(1 + \cos \theta))} \right) \end{cases} \quad (3.5)$$

つまり、 α 、 β 、 θ のうち一つでも決定されると 3 つの角度は決定されて X 振り子の運動も決定されるのである。後の計算のために、これらの関係式を θ の 1 次で近似した式を列挙しておく。

$$\begin{cases} \sin \alpha \sim \frac{1}{2u} \left(-t\theta + 2\sqrt{u^2 - t^2} \right) \\ \cos \alpha \sim \frac{1}{2u} \left(2t + \theta\sqrt{u^2 - t^2} \right) \\ \sin \beta \sim \frac{1}{2u} \left(t\theta + 2\sqrt{u^2 - t^2} \right) \\ \cos \beta \sim \frac{1}{2u} \left(2t - \theta\sqrt{u^2 - t^2} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

また、 $\theta = 0$ の時の α と β の角は等しく、その角を α_0 と置き α_0 からの α および β のずれをそれぞれ $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\beta$ とする。この時、上式 (3.6) の左辺を α_0 の周りで Taylor 展開し 1 次の微小量までをとることにより

$$\begin{cases} \Delta\alpha \sim -\frac{1}{2}\theta \\ \Delta\beta \sim \frac{1}{2}\theta \end{cases} \quad (3.7)$$

を得る。

3.1.2 重心の軌跡

まず、重心 C の座標は、

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B) + h \sin \theta = \frac{u}{2}(\cos \alpha - \cos \beta) + h \sin \theta \\ y_C = \frac{1}{2}(y_A + y_B) - h \cos \theta = -\frac{u}{2}(\sin \alpha + \sin \beta) - h \cos \theta \end{cases} \quad (3.8)$$

である。ここで、先の α 、 β 、 θ の関係式 (3.4)、(3.5) を用いて θ だけの式に書き直すと

$$\begin{aligned} x_C &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \cos \theta)(2u^2 - t^2(1 + \cos \theta))} + h \sin \theta \\ y_C &= -\frac{1}{2} \sqrt{t^2 \sin^2 \theta + 2(u^2 - t^2)(1 + \cos \theta)} - h \cos \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

[†]但し、 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ の表記中に現れる複号に関しては、 θ が正の時は上側の符号を取り、 θ が負の時は下側の符号を取る。

となる。ところで、微小振動の範囲では θ は微小量になるから、これらの式を θ の2次まで展開する。

$$\begin{aligned} x_C &\simeq \left(h + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}\right)\theta \\ y_C &\simeq \frac{1}{2}\left(h - \frac{2t^2 - u^2}{4\sqrt{u^2 - t^2}}\right)\theta^2 - h - \sqrt{u^2 - t^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

つまり、重心の軌跡は、

$$y_C \simeq \frac{1}{2} \frac{h - \frac{2t^2 - u^2}{4\sqrt{u^2 - t^2}}}{\left(h + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}\right)^2} x_C^2 - h - \sqrt{u^2 - t^2} \quad (3.11)$$

と書くことができる。一方、長さが ℓ の単振り子の重心の軌跡は、

$$y \simeq \frac{1}{2\ell} x^2 - \ell \quad (3.12)$$

であることを思い出すと、X振り子も単振り子も重心の軌跡が放物線を描くことが分かる[‡]。つまり、X振り子は長さ

$$\ell_{eq} = \frac{\left(h + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}\right)^2}{h - \frac{2t^2 - u^2}{4\sqrt{u^2 - t^2}}} \quad (3.13)$$

の単振り子と等価と見なせる。この式から明らかなように、X振り子の等価振り子長 ℓ_{eq} は、X振り子の重心の高さ h を調整することによって変化させることができ

$$h = \frac{2t^2 - u^2}{4\sqrt{u^2 - t^2}} \equiv h_c \quad (3.14)$$

になった時、等価振り子長 ℓ_{eq} は無限大になることが分かる。ここでこの h_c の位置はクリティカルポイントと呼ばれている。重心の高さを低いところから徐々に高くしてクリティカルポイントに近づけていくと、重心の軌跡は平坦になる。この重心の軌跡はそのまま重心の位置エネルギーの変化を示しており重心の位置エネルギーの変化が小さくなるということを意味している。位置エネルギーの変化率は、復元力を表しているので復元力が弱まるということにつながる。すると、振り子はゆっくりと振動するので周期は長くなるすなわち等価振り子長が長くなるのである。そして、重心の高さがこのクリティカルポイントを超えて高くなってしまうと重心の軌跡は上に凸の放物線になってしまい、もはやX振り子は中央で釣合わず、両端のいずれかに傾いてしまう。

3.2 X振り子の応答

次に、X振り子の傍に r だけ離して重い質量源 M を置いた時この質量源との間に生じる万有引力によってどれだけX振り子が傾くのかを計算してみる。

[‡]Y座標の定数項の違いは、X振り子の原点のY座標を選び直すことで一致させることができる。

この場合、X 振り子に働く外力は地球からの万有引力とこの質量源からの万有引力であり合力の大きさは

$$\sqrt{(mg)^2 + \left(G \frac{mM}{r^2}\right)^2} \sim mg \quad (3.15)$$

となり、一次の範囲では変化しない[§]。一方、合力の向きは最初の地球からの万有引力の向きから

$$\phi \equiv \tan^{-1} \left(\frac{G \frac{mM}{r^2}}{mg} \right) \sim \frac{G \frac{mM}{r^2}}{mg} = \frac{GM}{r^2 g} \quad (3.16)$$

だけ傾く。

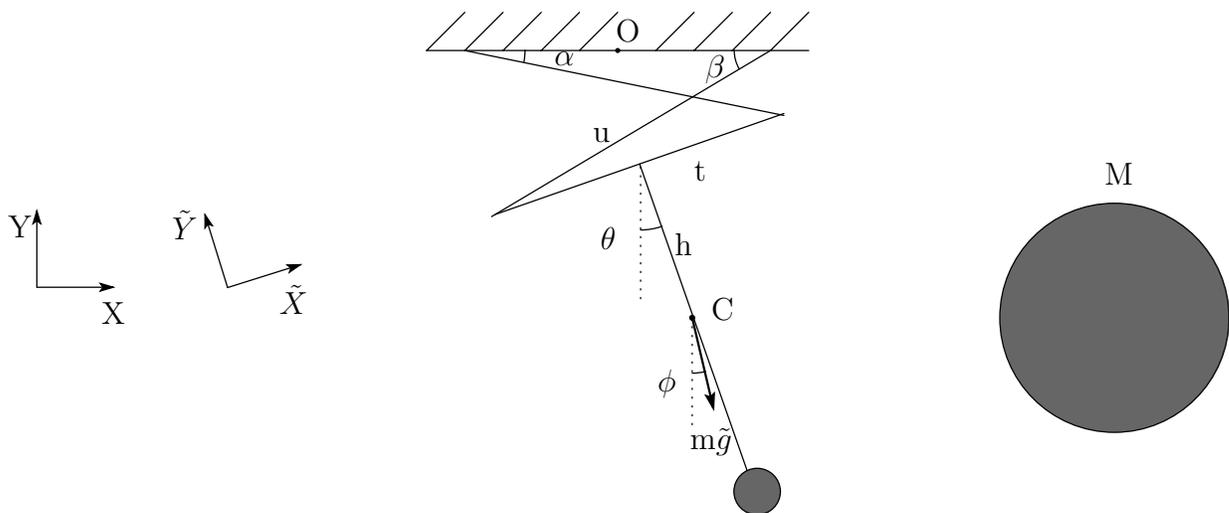


図 3.2: X 振り子の応答

ここで、この合力方向に Y 軸を取り直し \tilde{Y} 軸とし、それに合わせて X 軸も \tilde{Y} 軸に直交する方向に取り直し \tilde{X} 軸とする。すると、X 振り子は重心 C がその軌跡の中で \tilde{Y} 軸方向において一番低い位置をとるような状態で釣り合う。重心 C の座標は式 (3.9) で与えられるから、角度 ϕ の一次変換を行うことにより重心 C の \tilde{Y} 軸方向の座標が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{y}_C &= -\sin \phi \cdot x_C + \cos \phi \cdot y_C \\ &= -\frac{1}{2} \sin \phi \sqrt{2u^2(1 - \cos \theta) - t^2 \sin^2 \theta} - h \sin \theta \sin \phi \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos \phi \sqrt{t^2 \sin^2 \theta + 2(u^2 - t^2)(1 + \cos \theta)} - h \cos \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (3.17)$$

従って、この \tilde{y}_C を θ で微分して停留点となる

$$\frac{\partial \tilde{y}_C}{\partial \theta} = 0$$

[§]例えば、 $M=10^3$ [Kg]、 $r=1$ [m] とすると $\frac{GM}{r^2} \sim 6.7 \times 10^{-8}$ [m/s^2]

時に重心 C は位置エネルギーが最も低くなり X 振り子は釣り合う。結局、X 振り子は

$$\theta \sim \frac{h + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}}{h - h_c} \phi = \frac{\ell_{eq}}{h + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}} \phi \quad (3.18)$$

だけ傾いて釣り合う。因みに、この傾き角 θ を重心 C の X 座標 (3.10) に代入し直すと

$$\Delta x_C \sim \ell_{eq} \cdot \phi \quad (3.19)$$

を得る。つまり、微小な万有引力による X 振り子の重心の X 座標の変位はちょうど長さが ℓ_{eq} の単振り子の変位と等しいことが分かる。これは、X 振り子の重心の軌跡が単振り子の軌跡と等価と見なせるのであるから当然の結果と言える。また、X 振り子の重心以外の点の変位は重心の軌跡と異なるので上式 (3.19) のようには書き表せない。例えば、下板の中央の点から真下に p だけ離れた X 振り子の軸上の点 P の x 座標は重心の x 座標の式 (3.10) から

$$x_P \sim \left(p + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2} \right) \theta$$

と表されることが分かるので、この場合の変位は

$$\Delta x_P \sim \frac{p + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}}{h + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}} \ell_{eq} \cdot \phi$$

となる。重心よりも下の点においては有効振り子長が等価振り子長 ℓ_{eq} よりも長くなり、逆に重心よりも上の点においては短くなるのである。特に、

$$p = -\frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}$$

となる点（ちょうど下板と上板の中央）においては変位が常にゼロになる。

実際の X 振り子の変位測定においては、光学定盤に固定されたセンサーから下板の面までの距離を測定している。この場合についても一応、記述しておく。下板を表している直線 AB の方程式は

$$y = \tan \theta \left(x - u \cos \alpha + \frac{t}{2} \right) - u \sin \alpha$$

である。一方、センサーは Y 軸と平行な $x = \lambda$ の位置にあるとする。すると、 $x = \lambda$ とこの直線 AB の交点の y 座標の変化をセンサーで X 振り子の変位として測定することになる。代入すると、この交点[¶]の y 座標は

$$\lambda \tan \theta - u \tan \theta \cos \alpha + \frac{t}{2} \tan \theta - u \sin \alpha \sim -\sqrt{u^2 - t^2} + \lambda \cdot \theta$$

[¶]下板を表している直線 AB が回転と並進運動をしているので交点は固定された一点ではない。

となる^{||}。従って、センサーで測定される微小な万有引力に対する X 振り子の変位は、 θ に (3.18) を代入して

$$\lambda \cdot \theta = \frac{\lambda}{h + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - t^2}} l_{eq} \cdot \phi \equiv l_{ef} \cdot \phi \quad (3.20)$$

となる。この場合も、有効振り子長 l_{ef} がセンサーの位置 λ によって異なる。下板の中央の点 (X 振り子の中心軸) から離れれば離れるほど有効振り子長が長くなり大きな変位を得られることを示している。

ところで、上記の議論では重力源による微小な万有引力は地球の万有引力の方向を ϕ だけ変化させる効果をもたらしそれによって等価振り子長 l_{eq} に応じて大きく X 振り子が傾くことを示しているが、この ϕ という角度変化は逆に地球の万有引力の方向が変わらずに X 振り子の上板の角度が ϕ だけ変化した状況と等価である。従って、地面が傾くとそれによって等価振り子長 l_{eq} に応じて大きく X 振り子が θ だけ傾くことも示している。即ち、X 振り子は水平面の傾きに対して敏感であり傾斜計としては期待できる。しかしながらこれが、X 振り子の防振装置としての弱点となっている。

^{||} 下板は、並進と回転の運動をしているが微小振動の範囲では交点の y 座標に下板の回転のみ寄与し、X 軸方向の並進は寄与しない。もう少し具体的に言うならば、下板の X 軸方向の並進は θ の 1 次のオーダーであるが、この並進が交点の y 座標に寄与する量には $\tan \theta$ が掛かるために結局並進の寄与は θ の 2 次のオーダーになってしまう。

第4章 原理および方法

4.1 概観

先の章でみたように、X 振り子は微弱な力に対して大きく変位するのでメカニカルな増幅器として働く。従って、X 振り子を用いれば微弱な力である万有引力を測定し、その係数である万有引力定数 G を求めることが容易になることが分かる。しかしながら、X 振り子は水平面の傾きに対しても敏感なので、万有引力を生じさせるために X 振り子の傍に重い物質を置くとその重い物質により床がわずかに沈み床がわずかに傾くことにより X 振り子は大きく傾いてしまう。すると万有引力定数の測定において、純粋に重い物質の万有引力の効果と重い物質による床の傾きの効果の両方により X 振り子が傾くことになる。そこで、純粋に重い物質の万有引力の効果だけを取り出すために X 振り子を 2 台使用することにした。同一の光学定盤の上に 2 台の X 振り子を並べて配置すれば、重い物質による床の傾きはそのまま光学定盤の傾きとなり 2 台の X 振り子は同じ床の傾きを受けることになる。この時、2 台の X 振り子の変位の差を測定すれば床の傾きの効果は相殺されるので 2 台の X 振り子の配置と重い物質の位置に応じた純粋な万有引力の差が現れる。結局、万有引力の勾配を測定することになり、この値から万有引力定数 G が算出されるのである。

以下では、もう少し具体的に述べる。図 4.1 のように 2 台の X 振り子が同一の光学定盤の上に 1m 離して置かれ、右側の X 振り子から 1m 離れたところに 1 トンの鉛が置いてある場合について考えてみる。1 トンの鉛が 1m だけ離れた右側の X 振り子の重心付近に及ぼす重力加速度は

$$g_{Pb右} \equiv \frac{6.7 \times 10^{-11} [N \cdot m^2 / kg^2] \times 10^3 [kg]}{1 [m]^2} = 6.7 \times 10^{-8} [m/s^2]$$

となる。すると、地球からの万有引力の向きはこの鉛による万有引力と合成されて

$$\phi = \frac{g_{Pb右}}{g_{\oplus}} \sim 6.7 \times 10^{-9} [rad]$$

だけ傾くことが分かる。つまり、1m の単振り子をこの X 振り子の代わりに置いておくと 1 トンの鉛の万有引力により僅か 6.7[nm] しか変位しない。周期約 20 秒の X 振り子であれば等価振り子長は約 100[m] であるから 0.67[μ m] だけ変位する。サブミクロンの領域なので測定は非常に容易になることが分かる。しかし実際には、1 ト

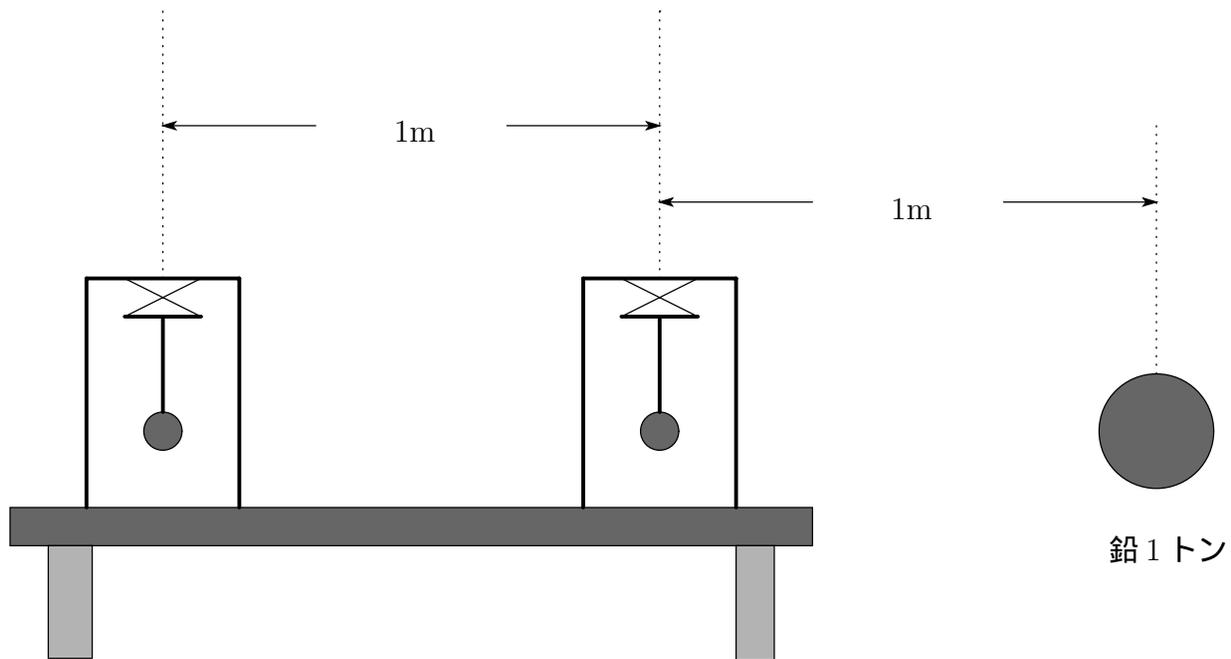


図 4.1: 2 台の X 振り子を使用した万有引力定数の測定

ンの鉛の影響で床が沈みそのために光学定盤が傾き X 振り子も傾いてしまう。結局のところ右側の X 振り子の変位は

$$\Delta x_{\text{右}} = \ell_{\text{eq 右}} \left(\frac{g_{\text{Pb 右}} + \Delta F_{\text{other}}/m}{g_{\oplus}} + \phi_{\text{Pb}} + \phi_{\text{other}} \right)$$

と表される。ここで、 F_{other} は鉛 1 トンのおもり以外の重力源からの万有引力をはじめ電磁気力など一般的に働く力すべての変化であり、 m は X 振り子の重さである。そして ϕ_{Pb} は鉛を床に置いたことによる床の傾き、 ϕ_{other} は鉛を置いたこと以外の原因による床の傾きすべてを表すものとする。一方、右側の X 振り子からさらに 1m 左に離れたところにある X 振り子の変位はほぼ右側の X 振り子の変位の式と同じように書けるが、唯一 1 トンの鉛が及ぼす重力加速度の項のみが異なり大きさが $\frac{1}{4}$ になる。従って、それぞれの X 振り子の変位をそれぞれの等価振り子長で割った値の差を取ると

$$\frac{\Delta x_{\text{右}}}{\ell_{\text{eq 右}}} - \frac{\Delta x_{\text{左}}}{\ell_{\text{eq 左}}} = \frac{3}{4}\phi$$

となり純粋な万有引力の勾配が求められる。そして、この値から万有引力定数が算出できるわけである。この方法の長所は、床の傾きを相殺できると同時に他の力、例えば月や太陽による潮汐力も相殺できるという長所がある。但し、2 台の X 振り子に対して共通に働かないような力が働いた場合には相殺できない。

4.2 原理

以上から分かるように、同一の光学定盤の上に2台のX振り子を離して配置し、片方のX振り子のそばに万有引力源となる重い物質を近づけたり遠ざけたりする時に変化する2台のX振り子の平衡点の変位を測定し、この平衡点の変位の差から万有引力定数Gの値を算出する。

4.3 方法

以下に、おおまかな流れを示しておく。

First 準備

- まず、万有引力源として鉛*のブロックを用意した。この鉛ブロックは1つ当たり約5cm × 10cm × 40cmの大きさを約20[kg]ある。このブロックを何個か重ねて使用した。
- 次に、万有引力という力の変化を平衡点の変位という長さの変化に置き換えるトランスドューサーとしてX振り子を2台製作した。そして、2台のX振り子について力の変化と平衡点の変位を対応づける力-変位換算係数をそれぞれ求めた。
- 更に、長さの変化を電圧の変化に置き換えるトランスドューサーとしてフォトセンサーを2台製作した。この時、長さの変化と電圧の変化を対応づける変位-電圧換算係数をそれぞれについて求めた。

Second 測定

- まず、同一の光学定盤の上の同一線上に製作した2台のX振り子を1[m]離して配置する。そして、それぞれのX振り子に対して適当な位置にフォトセンサーを配置する。
- 万有引力の大きさを変化させる為に、万有引力源となる鉛の塊を台車に乗せて台車を移動させ片方のX振り子（式号機）に近づける（または遠ざける）。

*鉛の密度は11.34[g/cm³]であり、非常に大きいためにコンパクトで効率良い万有引力源となる。例えば、アルミニウムの密度は2.69[g/cm³]しかなく、銅でさえも8.93[g/cm³]しかないことを考えれば鉛の密度の大きさが理解できる。鉛よりも大きい密度を持つ物質としてはタンタル、タングステンそして白金などがあり、これらはそれぞれ16.6[g/cm³]、19.1[g/cm³]そして21.37[g/cm³]である。

- この時、この X 振り子（式号機）は万有引力の変化と床が傾くことにより平衡点の位置がずれ傾く。もう一方の X 振り子（初号機）は万有引力源から離れているために万有引力の変化はほとんど無視できるが床が傾くことにより同様に平衡点の位置がずれ傾く。
- この 2 台の X 振り子の平衡点の位置の変化をそれぞれ別々のフォトセンサーで測定する。
- デジタル電圧測定装置で 1 秒毎に 2 台のフォトセンサーからの出力電圧をそれぞれ測定しハードディスクに格納する。

Third 解析

- ハードディスクに格納されている時系列電圧データに対して、約 4.8[mHz] のローパスフィルターを掛ける。
- 鉛が近くにある状態と遠くにある状態におけるフォトセンサーからの出力電圧の平均値をそれぞれ求める。この平均操作は、ローパスフィルターの掛けられた時系列データに対して行った。
- 鉛が近くにある状態と遠くにある状態における出力電圧の平均値の差をそれぞれのフォトセンサーに対して求め、それぞれのフォトセンサーの変位-電圧換算係数で除することによりそれぞれの X 振り子の平衡点の変位を求める。
- それぞれの X 振り子の平衡点の変位をそれぞれの力-変位換算係数で除することによりそれぞれの X 振り子における万有引力の変化に床の傾きの効果が加えられた量を求める。
- 2 台の振り子におけるこの量の差を取ることで万有引力の変化のみを抽出し万有引力定数を算出する。

第5章 X振り子の製作

先の章では2本のワイヤーで襷掛けに吊るされたX振り子について定式化を行った。原理的には2本で十分であるが、実際には不可能である。具体的に言えば、2本のワイヤーが接触しないように前後少しずらして2本のワイヤーを張らなければならない。すると、ねじれモーメントが働きX振り子は擦れてしまい襷掛けに吊るす状態が保てない。この為にワイヤーを用いて吊るす場合には4本用いたものが当初製作されていた。

ところで、X振り子は、長周期になればなるほどQ値が減少しすぐに振動が減衰してしまい周期を調整するのが困難になる。従って、振り子自体のQ値が大きい即ちロスの少ない振り子を製作すれば長周期が実現しやすくなる。そこで、このQ値を高める目的でワイヤーの代わりに薄板バネを用いることが考案された。同じ耐張力で比較した場合、ワイヤーよりも板バネの方が振動方向の厚みを薄くすることができ、その分だけ振動時の変形が少なくなり内部摩擦によるロスが減少するからである。幸嘉平太は、Cu-Beの薄板バネ(厚さ $50\mu\text{m}$)を用いて最長周期として約70秒を実現すると共に、約20秒で安定動作させている。因みに、ワイヤーを用いた場合には約10秒くらいである。

今回は、長周期を必要としているので幸嘉平太氏と同じようにCu-Beの薄板バネ(厚さ $50\mu\text{m}$)を用いてX振り子を2台製作した。初号機は、幸嘉平太氏の修士論文に記載されているX振り子と同じ寸法で製作した。支持枠やおもり部分は記載されていなかったので適当に製作した。個々の部品の製作は矢口精機に依頼し、製作された部品を組み立てた。弐号機は、薄板バネのクランプを強化して振り子自体のQ値向上を図り多少改良したために寸法は多少初号機と異なっている。また、初号機はノグスのみを頼りに組み立てたが、弐号機は治具も製作し組み立てやすくした。弐号機も個々の部品の製作に関しては矢口精機に依頼した。

以下、主に弐号機に関して詳しく述べることにする。初号機については、幸嘉平太の修士論文[15]を参照していただきたい。

5.1 弐号機的设计

板バネを用いてX振り子を製作する場合、ワイヤーに相当する部分は中央部が曲がらないような金属の板で両端が板バネで構成される。金属の板には約 $200[\mu\text{m}]$ の切れ込みが入っておりその隙間に板バネを挟み込みネジ止めしている。この中央部の金属の板は図5.3および図5.4で示されているものであり、互いに中央で交差できるようにになっている。一方、板バネはこのクロス部分にクランプされると同時に図

5.2のようなクランプ部の切れ込みにも挟まれてネジ止めされる。このクランプ部を介して板バネ版のワイヤ - に相当する部分が上板と下板に固定される。下板の中央にはM6 (ピッチ 0.5*) のネジ棒が差し込んであり、このネジ棒に銅製のおもり (円柱状) を取り付けている。このおもりにも M6 (ピッチ 0.5) のタップが切っており、ネジ棒に沿っておもりを回転させることで X 振り子の重心を変えることができる仕組みになっている。このようにして組み立てられた X 振り子は上板の4隅に取り付けられた四角柱を通して土台 (図 5.7) に固定される。式号機の全体像は図 5.1 のようになる。

初号機も全体像はほぼ同じである。主要な違いは、

- 襷掛けの交差角度を大きくした。(約 33 度から約 45 度)
- クロス部、クランプ部の厚みを薄くした。(5mm から 4mm)
- クランプ部において、板バネ固定用のネジの本数を多くした。
- クロス部において、板バネ固定用のネジの位置を中央にずらした。
- 上板を厚くした。(5mm から 7mm)

である。一番目の交差角度を大きくすると X 振り子の重心の 4 次のポテンシャルが緩やかになるのでより長周期を実現できると考えたために行ったのだが、実際にはあまり関係がないようで効果はあまり現れなかった。二番目のクロス部とクランプ部の厚みを薄くしたのは、板バネをネジ留めして固定するとき、これらの厚みが薄い方が挟み込みの時に変形しやすくなりより強固にクランプできると考えたためであった。三番目と四番目は、板バネをネジでクランプする際に板バネに対して様にクランプ力がおよぶようにするためである。最後の上板を厚くしたのは、振り子の振動が上板に伝わり振り子の水平面が揺らぐのを防ぐことを目的とした。

5.2 X 振り子の組み立てと調整

以下の手順で X 振り子を組み立てた。

1. Be-Cu シートから目的の大きさの長方形 (28mm × 11mm) をカッターナイフで切り出した。この切り出しは慎重にやらなければならない。特に切り出した長方形の板の短い辺 (11mm) の方は、X 振り子のワイヤーに相当する部分であり切り出す際に傷を残してはならない。傷が残ってしまうとそこが振動時のロスになってしまい正常に動作しない。
2. 内側および外側のクロス部のそれぞれの両端の切り込みに、切り出した Be-Cu の板を挟み込みネジ留めした。この時、Be-Cu の板は 3mm だけクロス部分の切り込みに挟み込み残り 8mm は外に出しておいてある。また、クロス部の幅は 32mm で Be-Cu の板よりも広いがちょうど真ん中に板がくるようにした。ちょうど真ん中であることが望ましいが、それほどシビアな問題ではない。

*M6 のピッチ 0.5 は規格外である。

3. 治具板 (図 B.1) に 4 つのクランプ部を固定した。この時、固定治具 (図 B.2) を用いて固定している。この作業が一番シビアである。治具板には計算された位置にタップが切っておりそこに合わせて固定治具をネジ留めするだけの作業であるが、ネジ留めには多少の遊びが残っているためにずれが生じてしまうのである。斜向かいにあるクランプ部の切れ込みの入った面が互いに平行になるように固定しなければならない。ここが平行に出来ていないと組み立てて吊るした時に板バネが変に擦れてしまい振り子が正常に動作しない。
4. Be-Cu の板がついた内側のクロス部を外側のクロス部の中で交差させ、治具板に固定されたクランプ部の切れ込みにクロス部に挟み込まれている Be-Cu の板が挟まるようにクロス部を治具板に固定した。この固定には固定治具 (図 B.3) を用いている。
5. クランプ部に挟み込まれている Be-Cu の板をネジ留めした。後は、クランプ部とクロス部を治具板に固定している固定治具を外せば X の部分が完成する。この時、空中でこの X の部分を揺すってみてスムーズに動くようであれば問題はない。しかし、Be-Cu の板がカチカチ音がしたりすればやり直しである。Be-Cu の板のネジ留めか、Be-Cu の板の切り出しに問題がある場合が多い。
6. 下板に X の部分をクランプ部を介して固定する。この時、下板にはネジ棒とおもりを最初から付けておいた方が良い。X 部と下板を支持棒に吊るしてからネジ棒などを取り付けると Be-Cu の板に変な力が掛かり、最悪な場合には Be-Cu の板が擦れてしまい台無しになってしまうからである。
7. 最後に支持棒の一部となっている上板に X 部を取り付ければ完成である。

組み立てが終わると X 振り子の調整に移る。次の二つを調整することになる。

- 支持棒の片側の高さを変化させることにより X 振り子の水平面角を調整する。支持棒の片側はマイクロメーターヘッドの取り付けられた台の上に乗せられており、マイクロメーターヘッドを回転させることにより高さを変化させることができる。
- おもりの高さを変化させることにより重心の位置を調整する。

基本的には、少しずつおもりを上へ上げ振動の中心が真下にくるように水平面角を調整した。このようにして長周期が実現できれば終了である。おもりは、銅製の中心に M6 (ピッチ 0.5) のタップが切った円柱である。このようなおもりを 2 種類使用しており一つは粗調整用の半径 20mm、高さ 15mm の重いもの[†]でありもう一つは微調整用の半径 10mm、高さ 7mm の軽いもの[‡]である。更に、ステンレス製の M6 角ナット (約 5.0[g]) を使用すればより細かい調整ができるようになっている。

しかしながら、このままでは振り子の平衡点が振り子を振り直す度に 100[μm] 近くずれることが起こった。これは、マイクロメーターヘッドの取り付けられた台に問題があることが分かった。支持棒の片側がマイクロメーターヘッドの取り付けら

[†]実測値;161.9[g]

[‡]実測値;17.8[g]

れた台の上に乗っている訳だが、この台にかかる荷重は一定ではなく、振り子がこの台側に傾いている時が最大で逆に反対側に傾いている時が最小になる。例えば、マイクロメーターヘッドの取り付けられた台のある側から振り子を振り始めると荷重が大きくなるので少し支えが下がり X 振り子の水平面角が傾くことにつながり、台側に振り子の平衡点がずれる。例えば、等価振り子長が 100m の場合を考えてみると、振り子の平衡点が $100[\mu\text{m}]$ だけずれるためには $10^{-6}[\text{rad}]$ だけ水平面角が変化する必要がある。X 振り子の幅が約 $10[\text{cm}]$ だとすると $10^{-7}[\text{m}]$ だけ荷重が変化したことによりマイクロメーターヘッドの取り付けられた台の高さが変化したと考えられる。これは、十分に考えられる結果である。マイクロメーターヘッドが不良品というわけではない。元々、マイクロメーターヘッドの最小目盛りは $10^{-5}[\text{m}]$ であり、多少の荷重変化に対して 2 桁下の $10^{-7}[\text{m}]$ だけ変化したとしても製品の保証外であり製品としては問題ない。むしろ、X 振り子が高感度な傾斜計として働くことを如実に語っている結果と言える。

この問題を解決するために、調整の終わった X 振り子はマイクロメーターヘッドの取り付けられた台で支持せず、L 字型の固定具を 4 本用意して支持枠の土台を光学定盤にネジ留めした。

何回か組み立て直したりした[§]のであるが、周期は最高でも 30 秒から 40 秒前後しか出ず幸嘉平太の出した 70 秒には届かなかった。30 秒から 40 秒が出た時も何回か振動したあとだんだんずれ短周期へと移ってしまい、結局 20 秒弱でしか安定に使用することはできなかった。より長周期を実現するためには、より重いおもりを使用することが考えられる。今回は、精密測定であるので重いおもりを使用することにより板バネが機械的に劣化する[¶]ことを恐れ、あまり重いおもりを使用しなかった。

5.3 製作した X 振り子の特性

この章の最後に、今回製作した 2 つの振り子のパワースペクトル密度と減衰振動を併記しておく。初号機の変位のパワースペクトル密度をスペクトルアナライザー (35670A:Hewlett-Packard 社製) で測定したものが図 5.9 である。但し、変位の測定にはレーザー変位計 (LB-040:Keyence 社製) を用いており、電圧距離換算係数は $1[\text{mm}/\text{V}]$ である。これより、初号機の共振周波数は約 $55[\text{mHz}]$ であることが分かる。周期に換算すると約 18 秒である。

また、初号機を励起して振動させ減衰する様子を表したものが図 5.10 である。これより、初号機の Q 値は周期 20 秒程度において約 10 であることが分かる。

同様に、弐号機についても測定した。図 5.11 が弐号機のパワースペクトル密度である。これより、弐号機の共振周波数は約 $58[\text{mHz}]$ であることが分かる。周期に換算すると約 17 秒である。また、弐号機の減衰振動する様子が図 5.12 である。この図より弐号機の Q 値は周期 20 秒程度において約 20 であることが分かる。多少、

[§]より薄い板バネ $30[\mu\text{m}]$ を使用したりもした。長周期が出やすいが非常に薄いので取り扱いが難しく変な力が加わると直ぐに曲がってしまい使えなくなる。

[¶]Be-Cu は、耐疲労度が高い物質ではあるが。

式号機の方が初号機よりも Q 値が改善されている。

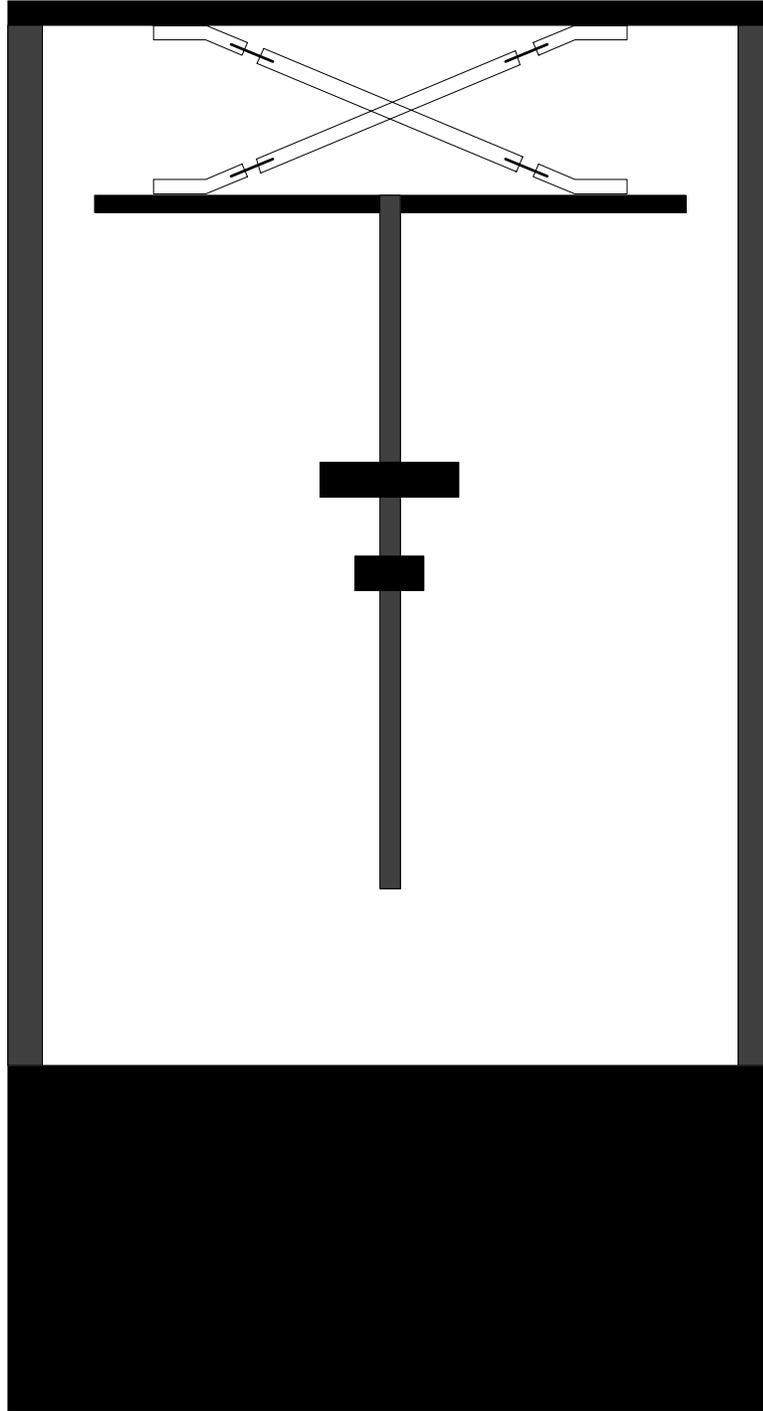


図 5.1: 式号機の全体図

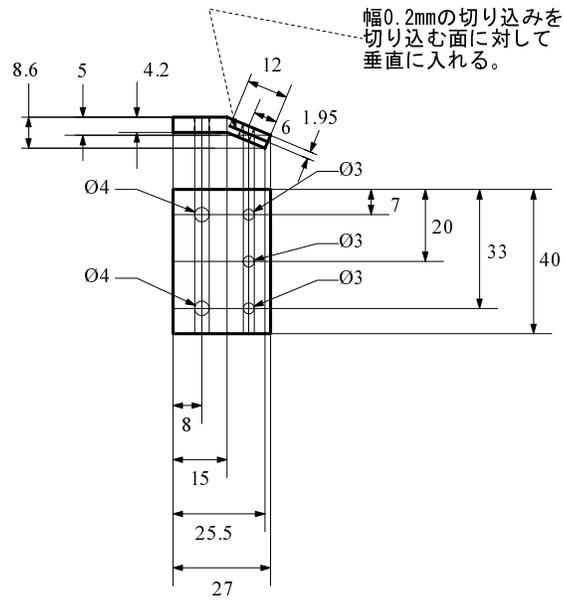


図 5.2: 式号機のクランプ部

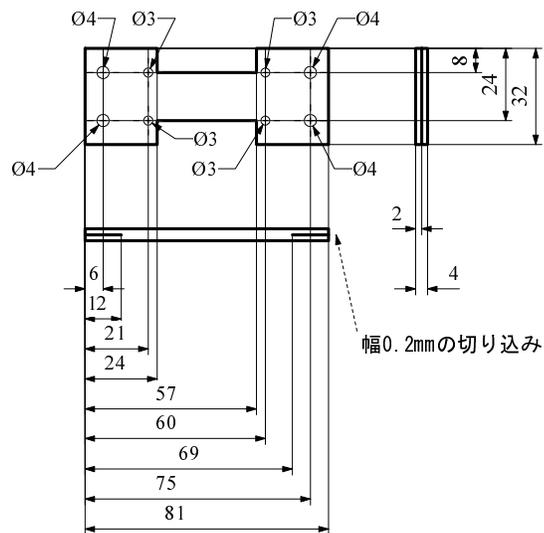


図 5.3: 式号機の内側クロス部

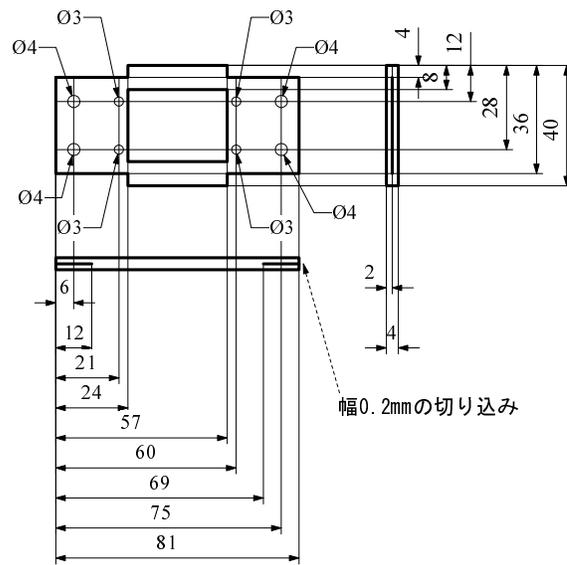


図 5.4: 式号機の外側クロス部

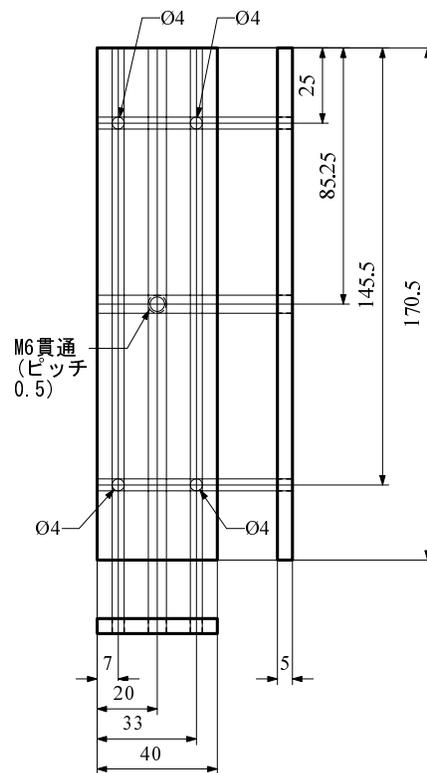


図 5.5: 式号機の下板部

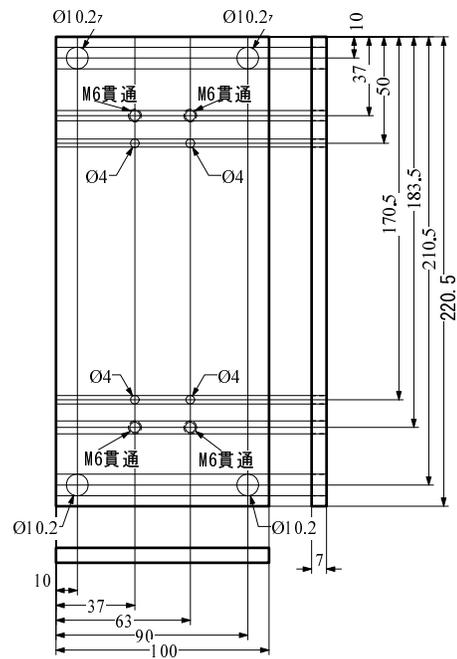


図 5.6: 式号機の上板部

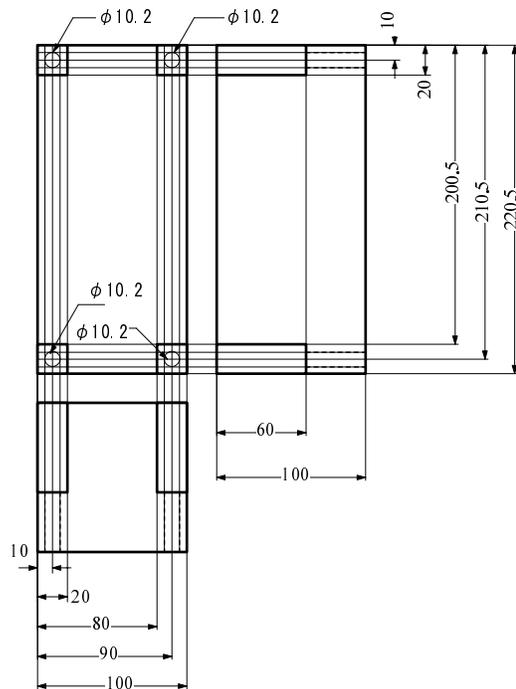


図 5.7: 式号機の土台部

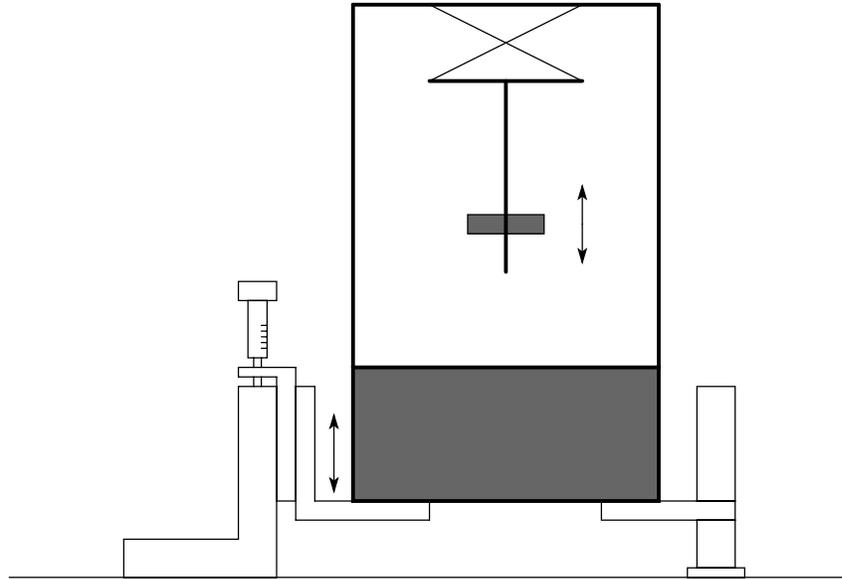


図 5.8: X 振り子の調整機構

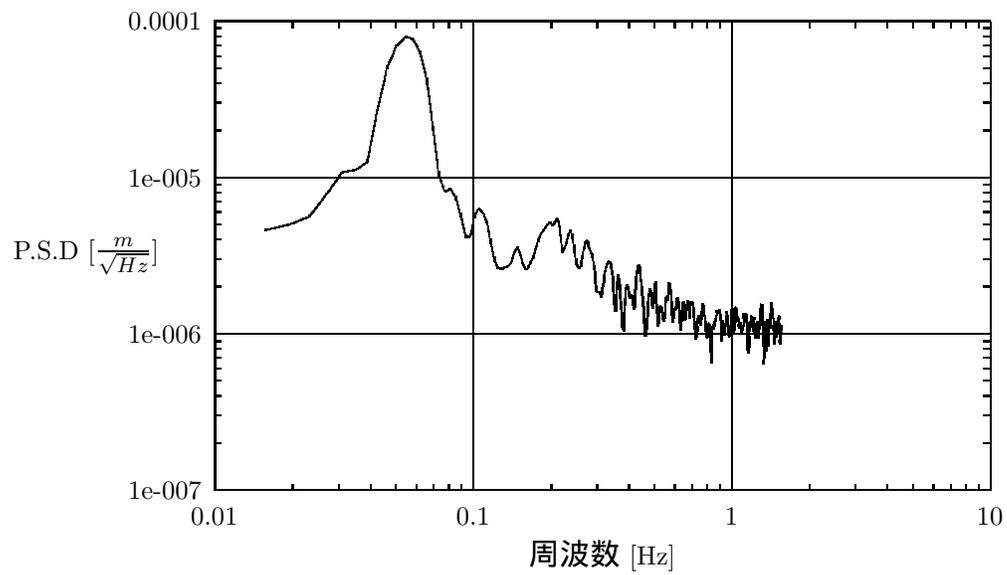


図 5.9: X 振り子初号機のパワースペクトル密度

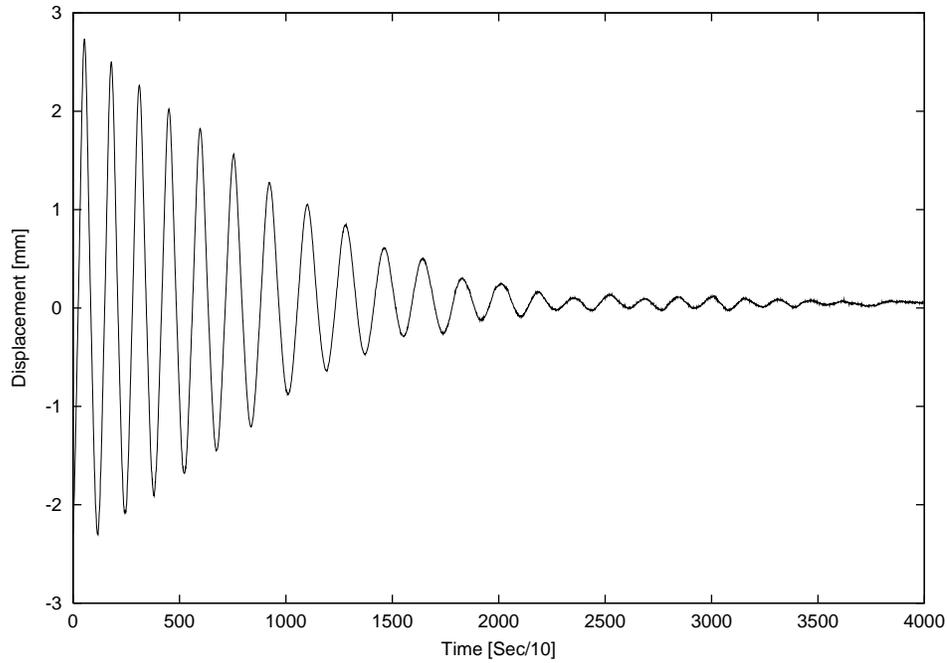


図 5.10: 初号機の減衰振動

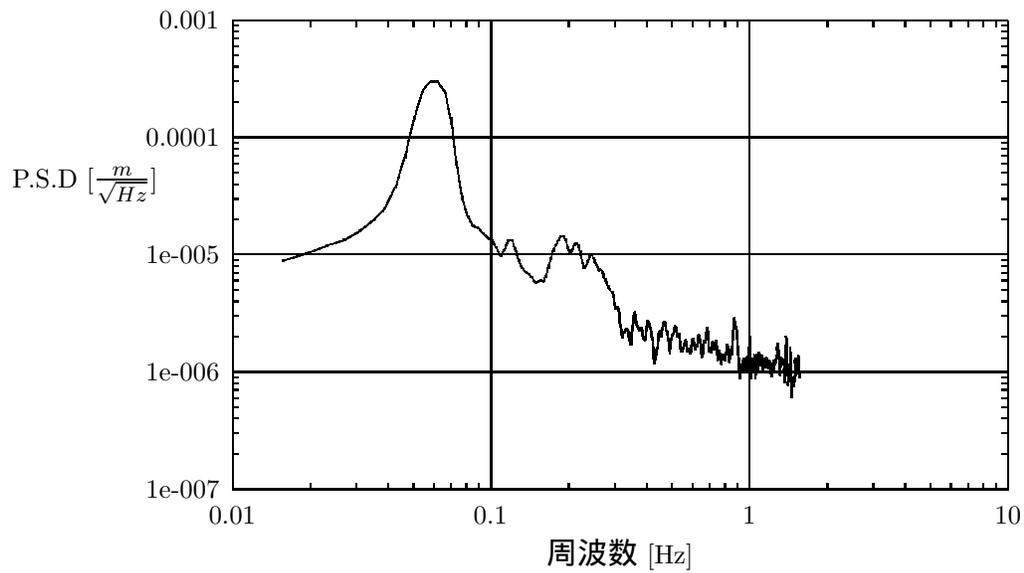


図 5.11: X 振り子式号機のパワースペクトル密度

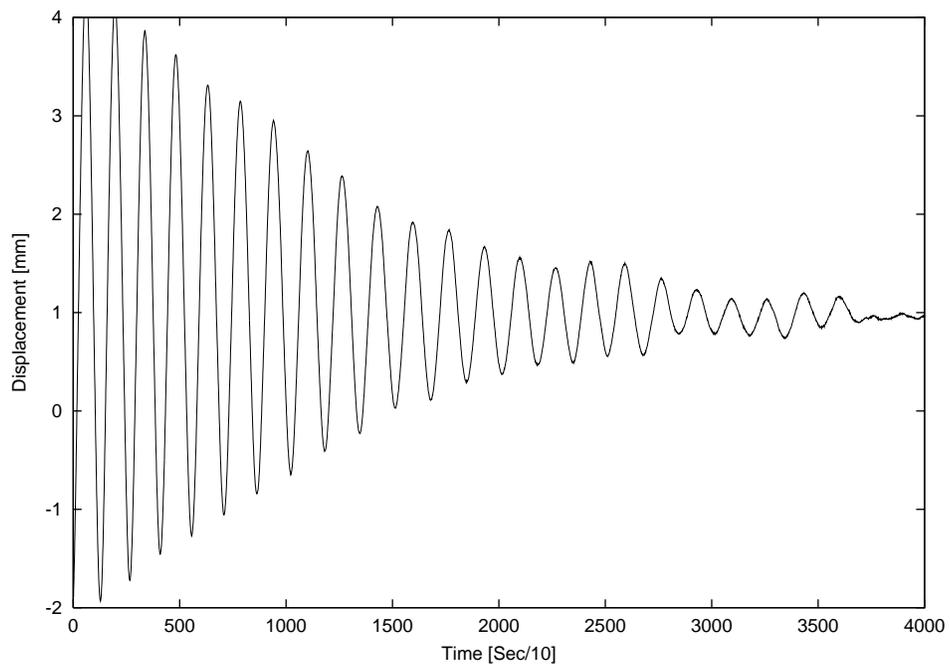


図 5.12: 式号機の減衰振動

第6章 フォトセンサーの製作

重い物質を X 振りの傍に置くと万有引力によって X 振りは引かれ、その X 振りの引かれ具合、つまり X 振りの変位を測定することによって万有引力定数を求めることになる。従って、X 振りは、万有引力という力を変位という長さに変換する一種のトランスドューサーとみなすこともできる。

ところで、この X 振りの変位を測定するのにノギスなどの物差しで測ることは難しい。確かに、長周期の X 振りは長い単振り子と同等であるのだが、もともとの万有引力が弱いために変位もせいぜい $1\mu\text{m}$ ぐらいしか期待できない。そこで、このような微小変位測定においては光を用いて最終的には電圧という形で測定することが多い。つまり、変位を電圧に変換するトランスドューサーを用いることになる。今回は、この目的のためにフォトセンサーを使用した。フォトセンサーとは、発光ダイオード (L.E.D.) とフォトダイオードのセットになったもので、L.E.D. からの光を対象物で反射させ、その反射光をフォトダイオードで受光し、フォトダイオードに流れる電流をオペアンプなどで電圧に変換して取り出す装置である。フォトセンサーと対象物までの距離に応じてフォトダイオードに入る光量が変化し、それに伴って電圧も変化する仕組みとなっている。

しかしながら、このフォトセンサーを単純に X 振りの変位センサーとして利用することはできない。何故ならば、X 振りは振り子面が傾いてしまうので、フォトセンサーのフォトダイオードに入る光量は単純な並進の変化と傾きの変化の両方の変化を受けてしまう。そこで、傾きの変化を取り除き、並進の変化のみを見るために L.E.D. を挟んで両側にフォトダイオードを配置した。このようにすることで、傾いたことにより一方のフォトダイオードには光が減少してももう一方のフォトダイオードに入る光の量は増加するので両方の和をみれば微小な傾きに対して 1 次の範囲で傾きの効果を相殺することができる。この方法は、河邊径太の開発したものである。[16]

6.1 フォトセンサーの回路

フォトセンサーの心臓部は、赤外 L.E.D. (L2656:浜松ホトニクス社製、高出力赤外 L.E.D.) および 2 個のフォトダイオード (S5821:浜松ホトニクス社製) からなる。L.E.D. が中央にあり、7.5mm だけ離れた左右にフォトダイオードが配置されている。L.E.D. には定電圧電源 (5V) から 75Ω の抵抗*を介して約 50mA の電流を流してい

*実際の回路では、2 個の 150Ω の抵抗を並列に使用している。これは、精密金属皮膜抵抗の許容電力が 125mW であったためである。

る。L.E.D.の反射光を左右のフォトダイオードで受光すると電流が流れ、両者の電流の和がオペアンプで電流 - 電圧変換され電圧信号に変わる。次段のオペアンプはボルテージフォロワーであり、バッファである。そして最後のオペアンプでもう一回反転増幅している。最初と最後のオペアンプにはコンデンサを並列につないでありローパスフィルターにもなっている。今回は、ゆっくりとした振り子の振動を測定するのであるから応答速度は要求されない。そのために、時定数は大きめにとつてある。

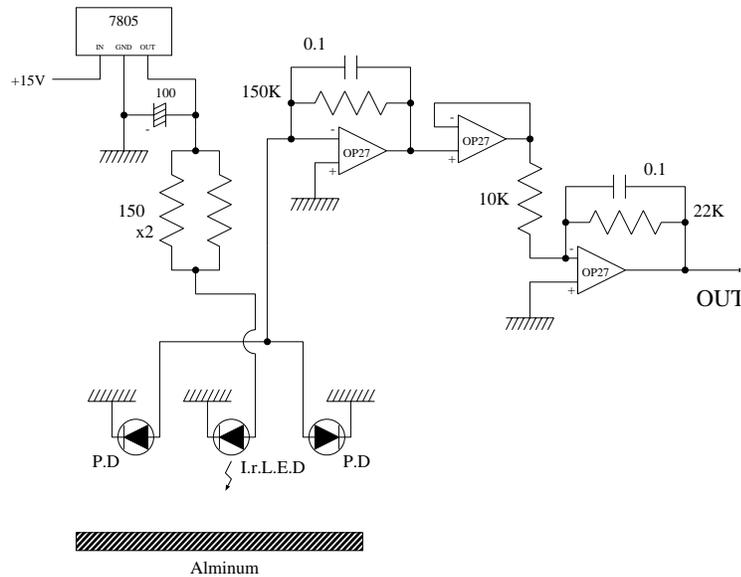


図 6.1: フォトセンサーの回路図

この出力電圧はデータロガー（DL716:横河電機社製）で読み取ることになるのだが、電圧分解能は0V付近のレンジにすればするほど高くなる。例えば、100mVレンジではダイナミックレンジが $\pm 400\text{mV}$ であり、オフセットは $\pm 400\text{mV}$ だけかけられて電圧分解能は約10nVである。この図6.1の回路からの出力電圧は数Vに達し、100mVのレンジで測定できないのでこれだけの電圧分解能を得られない。そこで、この電圧分解能を得るためフォトセンサーの出力電圧を引き算して0V付近になるような回路を作製した。（図6.2を参照）この回路は、2.5Vの基準電圧とフォトセンサーからの出力電圧の差を取り増幅する差動増幅回路であり、それぞれの入力部にバッファが入っている。この回路はインストルメンテーションアンプと呼ばれている。

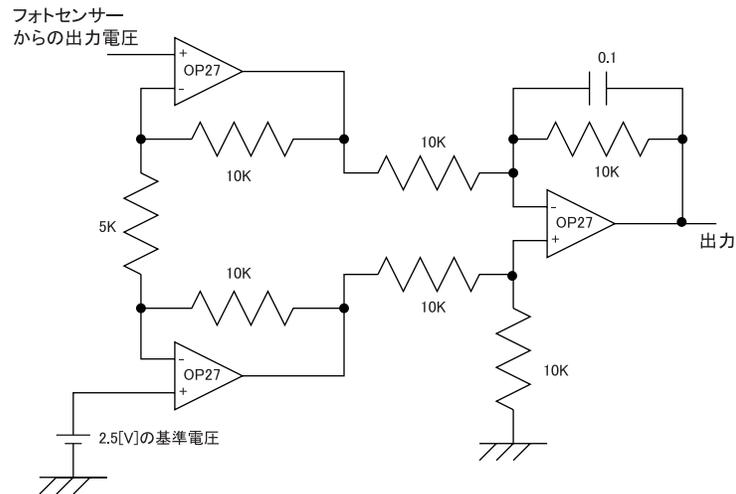


図 6.2: インストルメンテーションアンプ

6.2 フォトセンサーの較正

フォトセンサーを固定し、アルミ板を反射面として平行に置きアルミ板の方を移動させることによりフォトセンサーと反射面との距離を変化させその時のフォトセンサーからの出力電圧を測定しフォトセンサーの較正を行った。アルミ板は、マイクロメーターヘッドの取り付けられた台に固定してありマイクロメーターヘッドを回転させることにより動かすことができるようになっている。このようにして得られた結果が図 6.3 と図 6.4 であり、それぞれフォトセンサー初号機と弐号機のものである。どちらもグラフに記載されている範囲においては直線性が非常に良いことが分かる。またそれぞれのグラフ中に引かれている直線はそれぞれのデータに対して直線でフィッティングしたものである。フィッティングした直線の傾きは

- フォトセンサー初号機：1.53[V/mm]
- フォトセンサー弐号機：1.31[V/mm]

となった。この値は、そのままこのセンサーの変位電圧換算係数となる。以下の測定においては全てこの換算係数を使用している。また、X 振り子の初号機の変位測定に対してはフォトセンサー初号機を用いて、X 振り子弐号機に対してはフォトセンサー弐号機を使用した。

次に、このフォトセンサーのノイズの大きさを調べた。今度はフォトセンサーも反射面のアルミ板も固定した状態でフォトセンサーからの出力をスペクトルアナライザーで測定した。但し、フォトセンサーとアルミ面までの距離は図 6.3 および図 6.4 に描かれている直線領域内にある。従って、上記の変位電圧換算係数を用いてセンサーのノイズを変位雑音に読み替えたものが図 6.5、図 6.6 でありそれぞれフォトセンサー初号機、弐号機に対応する。

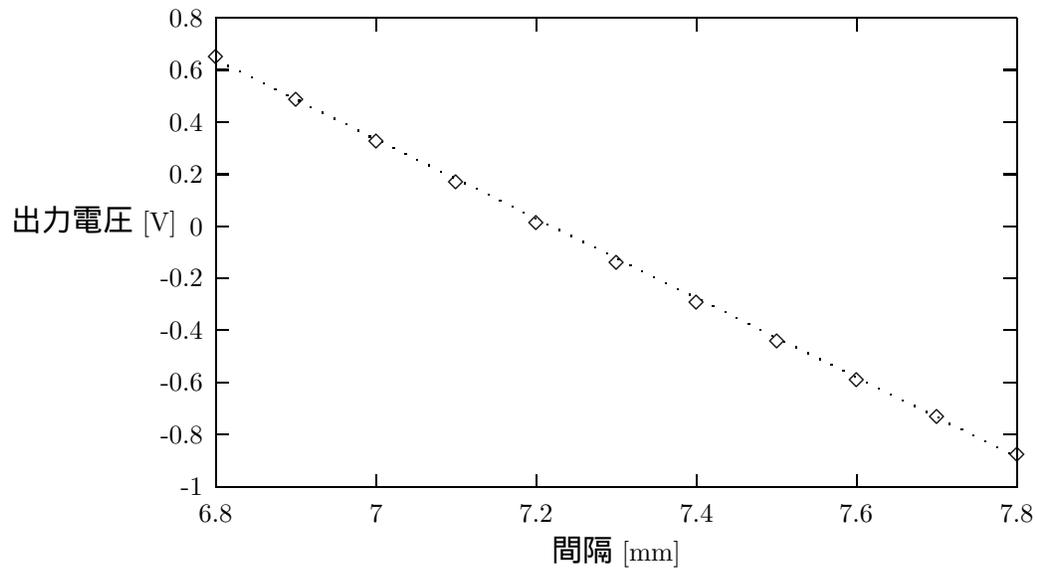


図 6.3: フォトセンサー初号機の較正

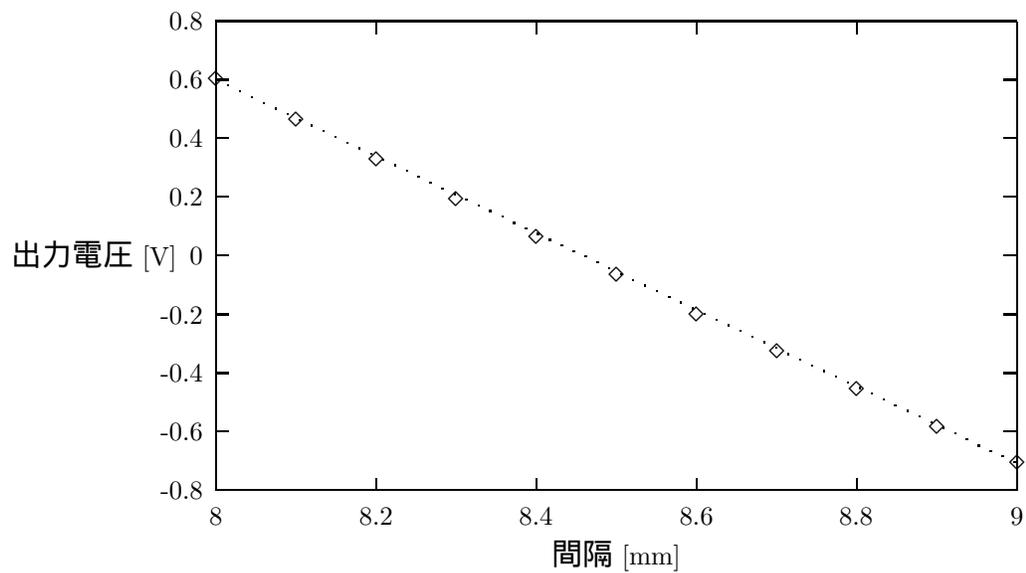


図 6.4: フォトセンサー式号機の較正

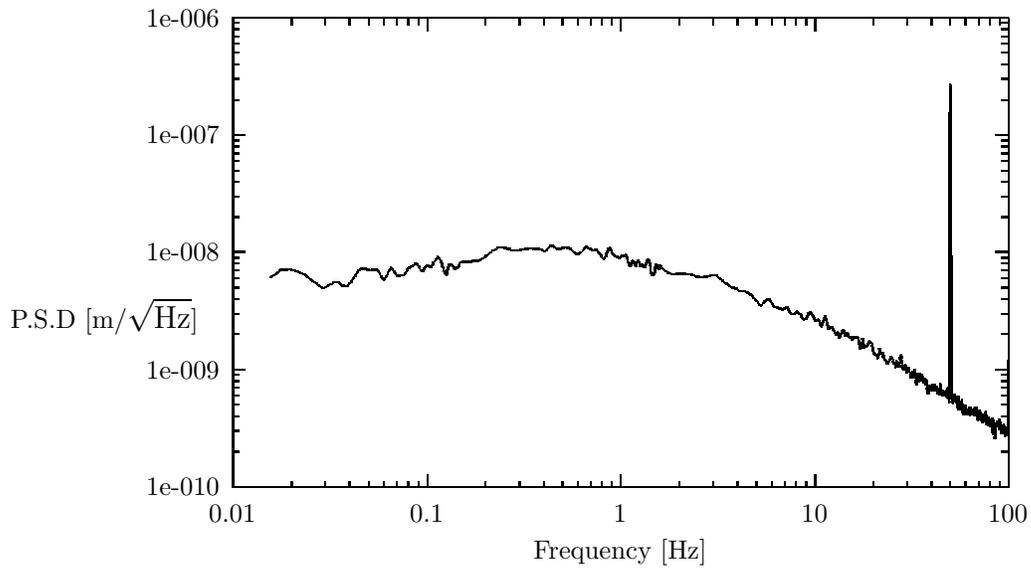


図 6.5: フォトセンサー初号機のノイズパワースペクトル密度

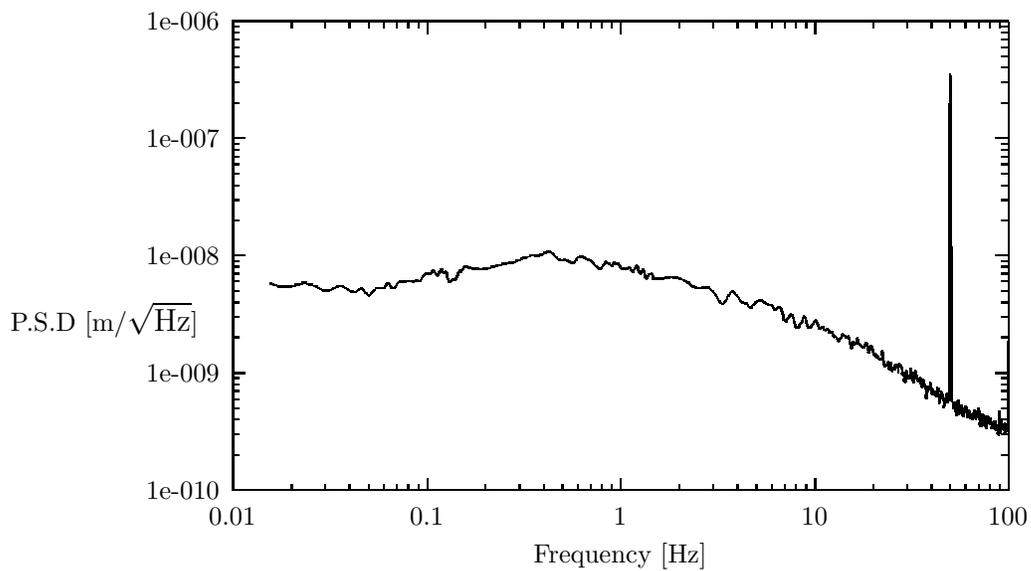


図 6.6: フォトセンサー弐号機のノイズパワースペクトル密度

第7章 測定

7.1 製作した X 振り子の較正

X 振り子の共振周波数からおおよその等価振り子長を決定できるのであるが、実際に X 振り子に対して力が働いた場合どのくらい変位するのかは定かではない。X 振り子を用いて計測するに当たっては X 振り子を較正しておく必要がある。つまり、外力が加わった時に X 振り子の振動の中心がどのくらい変位するかを求めなければならない。一番直接的な方法としては、較正されていて分かっている力、例えば電磁気力などを X 振り子の重心に対して働かせ、そのときの X 振り子の変位を測定すればよい。たしかに、X 振り子の重心の位置は計算で求めることができるが、その重心に対してピンポイントに力を加えるのは非常に難しい。そこで、今回は少し間接的な方法を用いた。先に述べたように X 振り子が傾くのは、X 振り子の上板面と地球からの引力の向きの相対的な角度が変化することによる。重い物質を X 振り子の傍に置くと、X 振り子の上板面の傾きは変化しないが地球からの引力の向きが僅かに傾くために X 振り子は傾く。逆に地球からの引力の向きは変化させずに X 振り子の上板面をわずかに傾ければ同様に X 振り子は傾く。この二つの現象は等価である。このことを利用して X 振り子の較正を行った。図 7.1 のようなセットアップで測

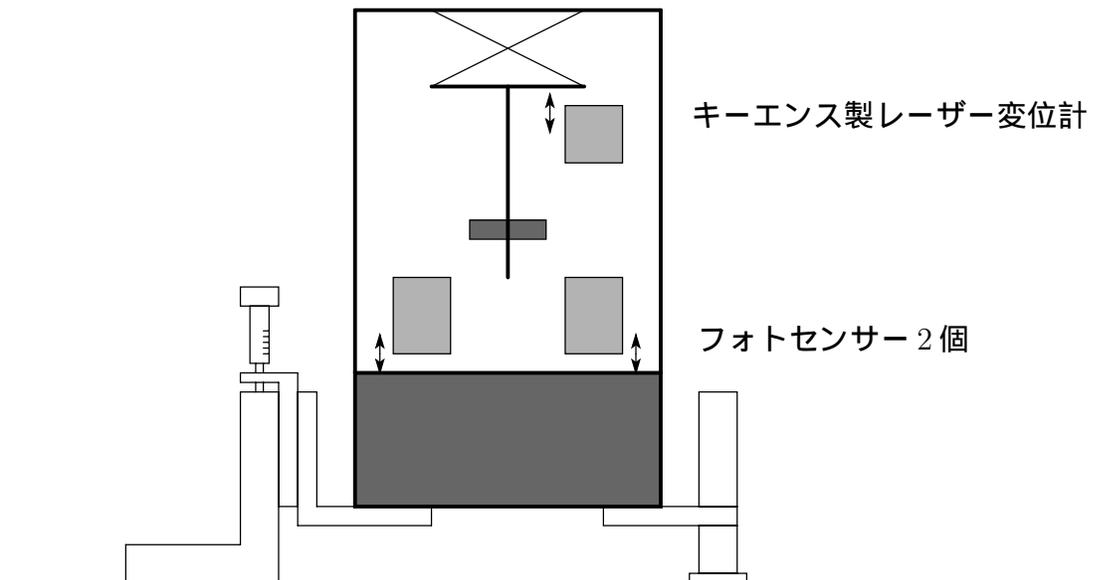


図 7.1: X 振り子の較正

定した。変位センサーは3個使用している。まず、光学定盤に固定されたレーザー変位計でX振り子の変位を測定した。次に、X振り子の上板面の傾きの変化を測定するためにフォトセンサーを2個用いた。このフォトセンサーも光学定盤に固定されていて、上板面の代わりに同等なX振り子の土台の面の傾きの変化を測定した。二つのフォトセンサーは約10cm離して置いてあり、それぞれ固定された場所から土台の面までの距離を測定している。土台を傾ければ二つのフォトセンサーからそれぞれ土台までの距離が変化するので、この変化の差から土台の傾け具合を知ることが出来る。例えば、フォトセンサー初号機において $1\mu\text{m}$ だけ変化し、フォトセンサー貳号機において $5\mu\text{m}$ だけ変化したとすると、

$$\frac{5[\mu\text{m}] - 1[\mu\text{m}]}{10[\text{cm}]} = 4 \times 10^{-5}[\text{rad}]$$

だけ土台の面が傾いたことが分かる。また、土台の面の傾きを変化させるためにX振り子を調整する時に使用したマイクロメーターヘッド付きの台を使用した。

X振り子の変位を測定しているレーザー変位計の位置*を3箇所変えて測定した結果が図7.2と図7.3であり、それぞれX振り子初号機と貳号機のものである。

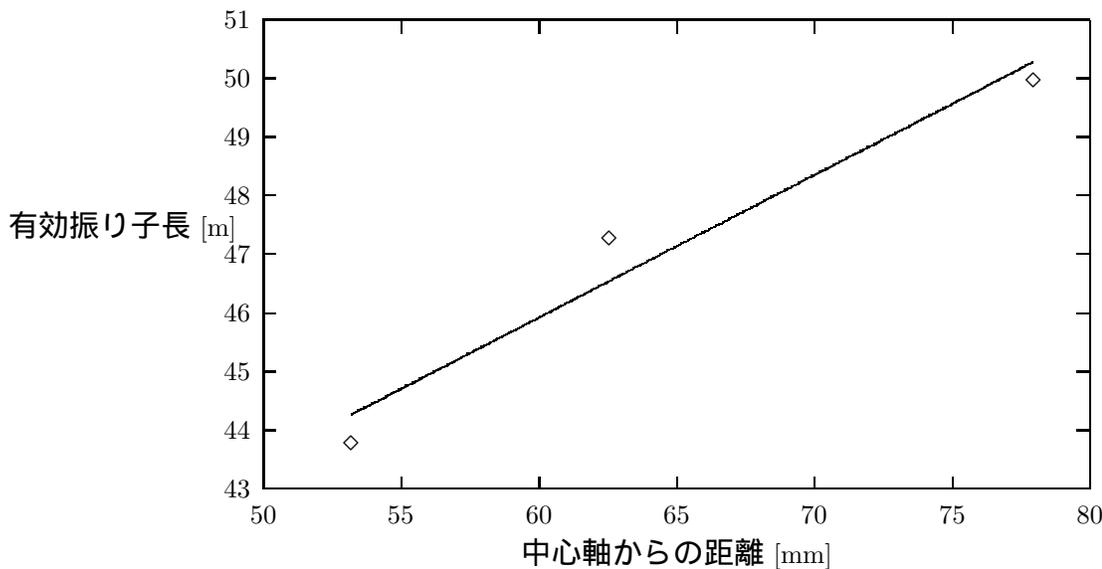


図 7.2: X 振り子初号機の較正

7.2 万有引力定数 G の測定

実際に、X振り子2台を同一の光学定盤の上に約1m離して設置し鉛1トンを重力源として使用して万有引力定数Gの測定を行った。それぞれのX振り子はフォトセンサーで測定した。鉛1トンは台の上に乗せられていてクレーンを用いて移動さ

*X振り子の中心軸からの位置

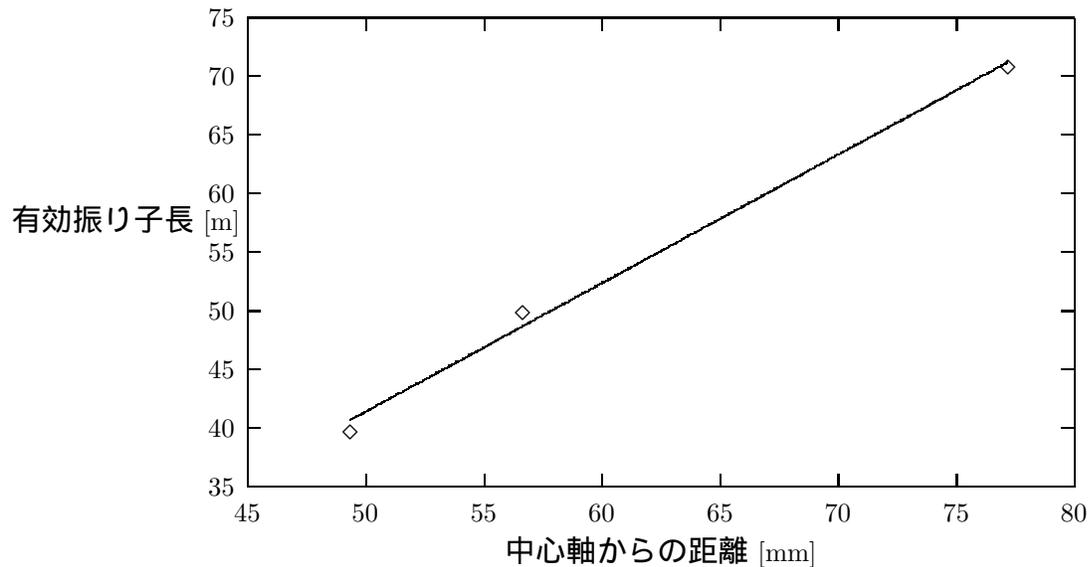


図 7.3: X 振り子式号機の較正

せることができるようになっている。なお、鉛は1つあたり約 $5\text{cm} \times 10\text{cm} \times 40\text{cm}$ の大きさで約 20kg の塊を50個用いて1トンにしている。また、50個の鉛は1列に5個並べて10段に重ねてある。従って、鉛1トンは約 $50\text{cm} \times 50\text{cm} \times 40\text{cm}$ の塊となっていてほぼ球とみなせる。質量を測定した結果、正確には、 $1,046\text{kg}$ あることが分かった。

7.2.1 その一

まず、鉛、台そしてクレーンを 5m 以上光学定盤から離れたところに置いておき、その状態で二つのX振り子の位置を測定しておいた。

次に、クレーンで鉛を台ごと移動させX振り子式号機から 1m のところの床に置きクレーンは元の場所まで引き返させた状態で二つのX振り子の位置を測定した。

結果は、予想以上に床が傾きその為にどちらのX振り子も約 $60\mu\text{m}$ 傾いた。予想されている純粋な万有引力によるX振り子の変位は約 $0.1\mu\text{m}$ であり、万有引力による効果は誤差となってしまう万有引力定数を測定することができなかった。もし、この測定で万有引力定数 G を算出するには有効数字3桁以上の測定を行えなければ万有引力定数 G は有効数字1桁の精度でも決定できないことになる。

7.2.2 その二

測定その一の失敗を踏まえ、なるべく床の傾きを変えないようにクレーンをあらかじめX振り子から 1m のところまで寄せておき、鉛1トンと台を吊ったままで上下に移動することによりX振り子の変位を測定した。

X 振り子が常時、数マイクロオーダーで平衡点が揺れているためにサブマイクロの平衡点の変動を正しく測定できなかった。

7.2.3 その三

X 振り子自体が数マイクロのオーダーで平衡点がふらふらとゆれているのでサブマイクロの平衡点の移動を検出するのが困難になっていることが判明した。そこで、なるべく万有引力の大きさを大きくして測定しやすい状況にした。

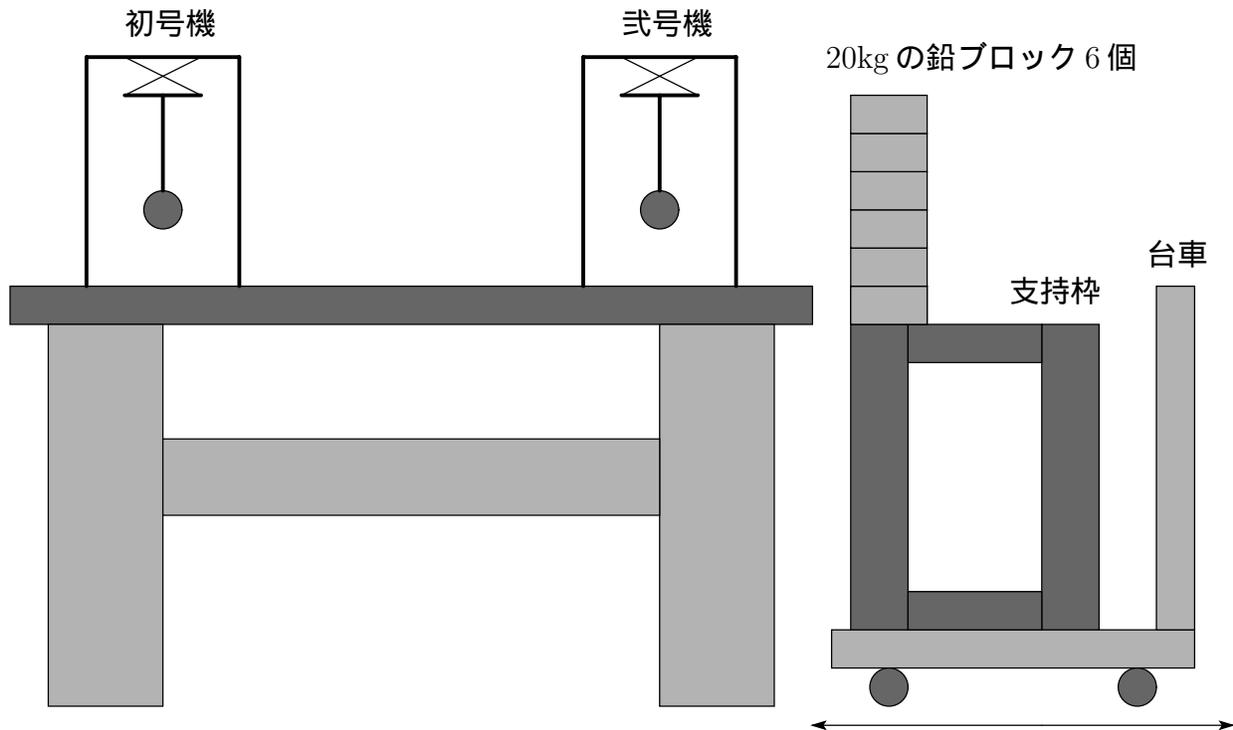


図 7.4: 測定その三の模式図

図 7.4 のように、万有引力源となるおもりは 1 トンの鉛ではなく約 120kg の鉛を用いている。おもりの重量自体は小さくなったが今度は、X 振り子式号機に対して約 20cm の距離まで近づけるために万有引力の大きさは大きくなっている。このおもりは X 振り子の重心の高さに合わせるために支持棒の上に乗せられさらに支持棒が台車に乗せられている。台車を前後に移動させることで万有引力の On/Off を行っている。但し、先に述べたように台車の移動によって床の傾きが変化するのでそれに応じて X 振り子は傾いてしまう。従って、X 振り子式号機にとっては万有引力の On/Off と共に床の傾きの変化が混合されたものに応じて傾き変位することになる。一方、X 振り子初号機にとっては万有引力源から離れすぎているためにほぼ万有引力の On/Off は感じられず、ただ床の傾きのみに応じて傾き変位することになる。

このような環境を準備し、最初の 15 分間は X 振り子式号機から約 1m 離れたところに台車を置き、15 分経過したら台車を X 振り子式号機のそば約 20cm に近づけ 12

分間そのままにした。そして、12分間経過したらまた台車を1mぐらい離し、また12分経過したら台車を近づけるということを行った。(台車の移動時間は約1分で、この12分間のうちに含まれる。)この時の2台のX振り子の変位の様子が図7.5、図7.6にプロットされている。

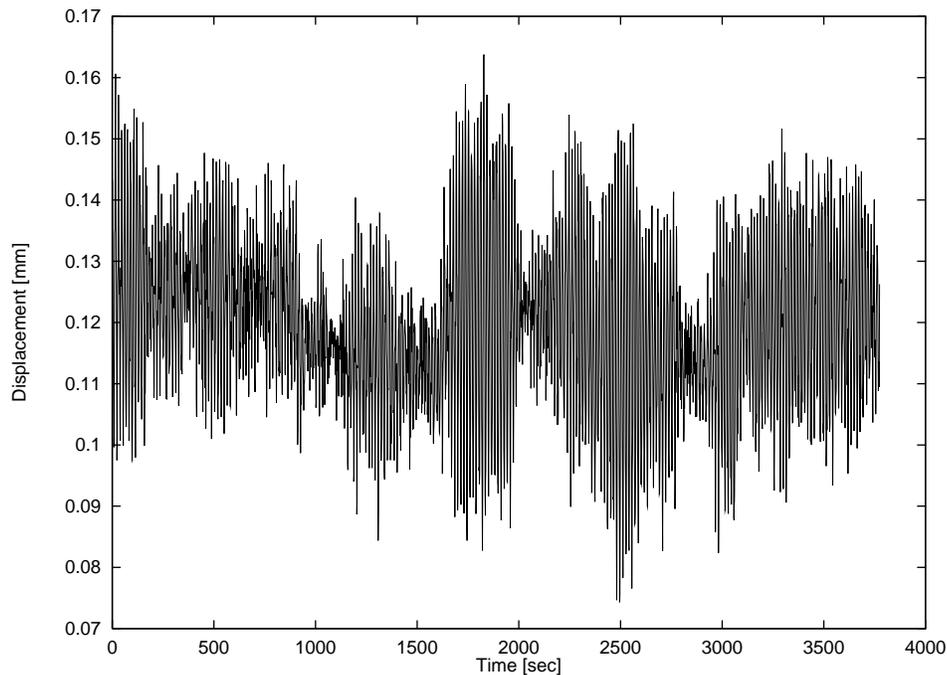


図 7.5: X 振り子初号機の変位

しかしながら、このプロットを見ただけでは何もよく分からない。X 振り子は常に振動しており、その振幅が平衡点の変化を見えにくくしている。そこで、このデータに対してローパスフィルターをかけて DC 的な平衡点の変動を見やすくした。ここで、ローパスフィルターのカットオフ周波数は約 4.8mHz で X 振り子の共振周波数よりも 1 桁低いものになっている。(このローパスフィルターは、デジタルフィルターを用いており付録の中に述べられている。)その結果が図 7.7 および図 7.8 である。この図より X 振り子の平衡点の変位が鮮明に浮かび上がってきていることが分かる。

次に、このローパスフィルターのかけられた 2 台の振り子の平衡点の変動を探し出す作業に移る。この場合、ローパスフィルターのカットオフ周波数が約 4.8mHz であるから平衡点の変動は実際に変動してから約 200 秒経過しなければローパスフィルターからの出力に完全に反映されない。また、台車の移動の前後は測定者の動きなどが加わるために正しいデータとは見なし難い。そこで、9分から14分、21分から26分、33分から38分、45分から50分、57分から62分のそれぞれの区間における平均値を出しその値をもって平衡点の値と見なした。これを計算すると表 7.1 のようになった。

更に、この表 7.1 においてそれぞれの区間と次の区間との間の差を取ると平衡点の変位が求められる。それが表 7.2 である。

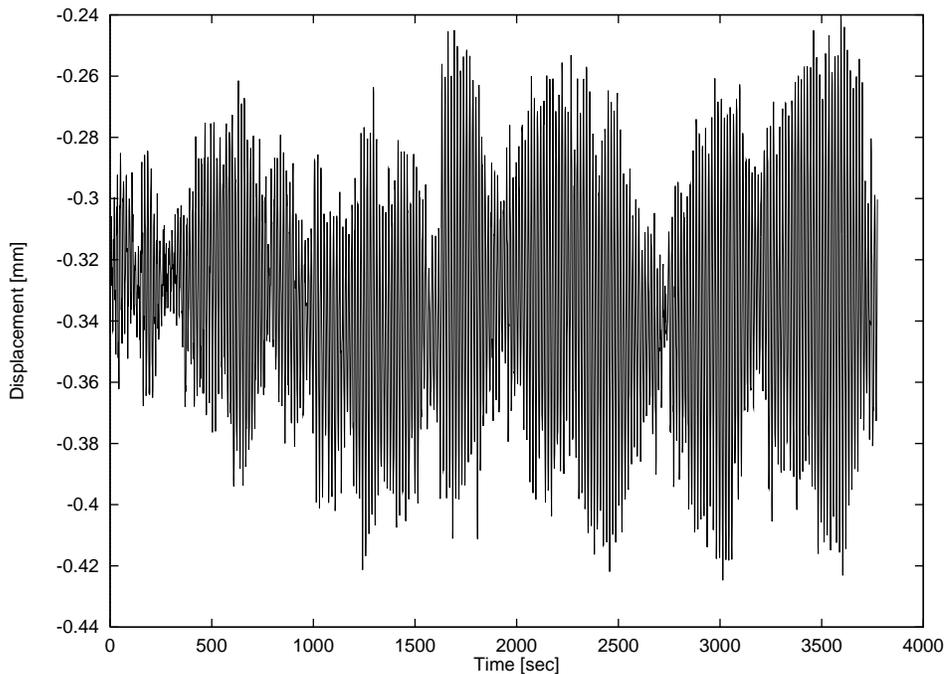


図 7.6: X 振り子式号機の変位

時間 [分]	初号機の平衡点 [mm]	式号機の平衡点 [mm]
9 ~ 14	0.1248	-0.2809
21 ~ 26	0.1136	-0.2951
33 ~ 38	0.1222	-0.2811
45 ~ 50	0.1138	-0.2942
57 ~ 62	0.1219	-0.2824

表 7.1: 各時間における 2 台の平衡点の位置

この表 7.2 で求められたそれぞれの X 振り子の平衡点の変位をそれぞれの有効振り子長で割ればそれぞれの振り子の傾きが算出される。ここで、それぞれの有効振り子長は図 7.2、図 7.3 から求められ 47m、52m であった。この値を使用してそれぞれの振り子の傾きを求め、2 台の傾きの差を計算したものが表 7.3 である。更に、万有引力源である約 120kg の直方体の鉛が X 振り子式号機の重心の位置に及ぼす重力加速度の x 成分はおおよそ

$$1.4 \times 10^{-7} \times \frac{G}{6.7 \times 10^{-11}} [\text{m/s}^2]$$

である[†]。この値と地球の重力加速度の大きさ

$$g_{\oplus} = 9.8 [\text{m/s}^2]$$

を用いると万有引力定数 G が算出される。その値が、表 7.3 に記載されている。

[†]この値を算出するのに数値計算を行った。この数値計算については付録参照。

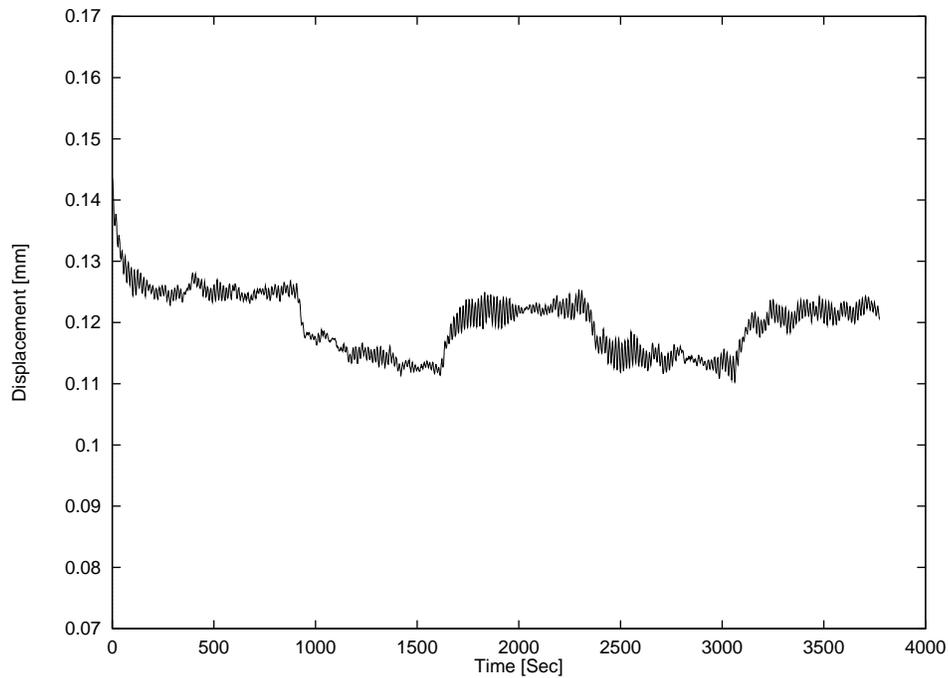


図 7.7: ローパスフィルターのかけられた X 振り子初号機の変位

順番	初号機の平衡点の変位 [mm]	弐号機の平衡点の変位 [mm]
1 回目	-0.0112	-0.0142
2 回目	0.0086	0.014
3 回目	-0.0084	-0.0131
4 回目	0.0081	0.0118

表 7.2: 2 台の平衡点の位置の変化

順番	2 台の傾きの差 [rad]	万有引力定数 [$\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$]
1 回目	8.0E-8	3.8E-10
2 回目	1.3E-7	6.1E-10
3 回目	1.1E-7	5.3E-10
4 回目	9.3E-8	4.4E-10

表 7.3: 算出された万有引力定数

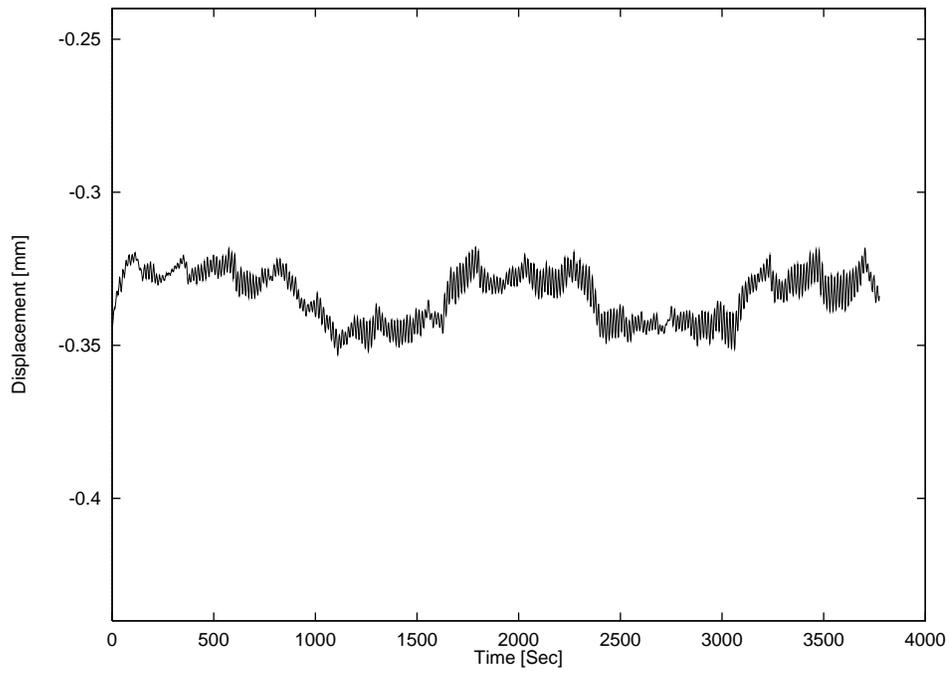


図 7.8: ローパスフィルターのかけられた X 振り子式号機の変位

第8章 考察および検討

8.1 測定結果に関して

今回、測定した万有引力定数 G の値は現在知られている G の値から大きくずれてしまった。その原因についてまず考えてみることにする。

一番、怪しいと考えられるのが X 振り子の有効振り子長である。これは、万有引力定数 G の測定の度に測定した訳ではない。従って、実際に万有引力定数 G の測定している時には少しずれていた可能性がある。逆に、実際の有効振り子長がずれていて今回の測定で測定されたものは床の傾きであって、2 台の傾きの差は単純に有効振り子長の違いだけであると仮定してみる。今回の測定例において 2 台の振り子の変位の比を取ってみると約 1.5 から 1.9 くらいある。すなわち小さく見積もっても 1.5 倍の有効振り子長の違いが 2 台の X 振り子になければならない。初号機の有効振り子長を 50m くらいとすると弐号機の有効振り子長は 75m くらいになければならない。今回の測定において、弐号機の有効振り子長も約 50m としているので残り 20m 以上長くなければならない。これをフォトセンサーの位置のずれだけで説明するならば、図 7.3 からフォトセンサーの位置が約 55[mm] ではなく約 75[mm] になければならず約 2[cm] ずれていることになる。これは、少し考えにくい。

次に、 X 振り子自体が独立なドリフトをしているという可能性がある。この場合には、差を取っても残ってしまうので大きな誤差の原因になると考えられる。実際に、時々 2 台の X 振り子が逆方向にドリフトしていくのが観測された。この現象はおもりを光学定盤のそばにおいたりそばから離して床を傾けた時に時々見られた。これが起こる原因として、光学定盤自体が一樣に傾いていないという可能性が考えられる。光学定盤には、安定のために 2 台の振り子以外に 20kg の鉛が 6 個、光学定盤のへりに沿って配置されているがこのために光学定盤には一樣でないストレスがかかっておりこれが一樣に傾くのを妨げている可能性がある。これに関しては、まだはっきりしていないのでもう少し調査する必要があると考えられる。

また、実際に使用した鉛は少しばらつきがあるが今回は考慮されておらず完全な直方体として近似してしまっている。そして、台車や支持枠の重さについても考慮されていない。この点に関しては、数値計算を行う上でより細かい計算を行えば対処できるが、今回のずれを説明する要因としては弱すぎる。その他、温度変化による影響も考慮すべきであるが、測定中は温度変化を非常に小さく抑えてあり、大きく見積もっても 0.1 度程度の揺らぎしかない。温度変化に対しては均一な温度変化であるならば X 振り子への影響はほとんど無いと考えられる。むしろ、フォトセンサーの方がドリフトを起こす。しかし、大きく見積もっても 1 度の変化に対して 10[mV]

であったから 0.1 度程度の変化に対しては 1[mV] 程度でしかなく、変位-電圧換算係数を考慮すると 1 ミクロン以下の変動となる。更に、2 台のセンサーは同一の構造であるからドリフトもほぼ同じ量であり、差を取ることでほとんど影響を与えていないと考えられる。

8.2 改善策

まず、一番疑われている有効振り子長を正確に測定すると共に、有効振り子長が時間と共にどのくらい変化しているのかなどを調べ測定において補正できるようにすることが挙げられる。

次に、床の傾きが大きいために万有引力の効果が埋もれてしまい SN 比が悪く誤差が大きくなっている。そこで、なるべく床を傾かせないようにすることが挙げられる。具体的には、おもりを乗せる台として大きな台を用意してこの台の脚が光学定盤の脚から離れるようにする。このようにすれば、おもりがのせられたことによりこの大きな台の脚付近の床が歪んでも光学定盤の脚付近での歪みは小さくなりそれほど光学定盤は傾かないはずである。もちろん、硬い岩盤で覆われ、歪みにくい床を使用することが望ましい。

また、X 振り子は常に 100[μm] ぐらいの振動をしており微小な平衡点の変化を見えにくくしている。そこで、振り子の傍に磁石を置き、渦電流を発生させこの振動を減衰させることが考えられる。しかし、振り子自体に磁性が少しでも存在すれば磁力が作用し精密な測定を妨げてしまうことは言うまでもない。

長さの測定において短い部分はノギスを使用しているが長い部分は巻尺を使用しているために誤差が積み重なってしまった可能性が考えられる。この点に関して、当面の測定においては多少の誤差で済まされるがより精度の高い測定においてはこの点で制限される可能性がある。対策としては、中距離レンジのレーザー変位計を用いることが考えられる。

最後に、今回は振り子の平衡点という DC 成分を測定しているが DC 成分は様々な原因によりドリフトを引き起こす。このような場合、万有引力源に変調を掛けることがしばしば行われている。つまり、万有引力源のおもりをある一定の周波数で振動させ、この周波数成分の X 振り子の応答を測定することである。このようにすることで、万有引力によるシグナルを容易に分離することができ SN 比が改善しドリフトから逃れることができる。また、一般に変位センサーのノイズは低周波側ほど大きくなる傾向がある*ので、高い周波数成分を測定した方がセンサー自身のノイズも低減し SN 比を上げることができる。ただ、この場合もおもりを振動させることで床もこの振動数で揺れることが十分に考えられ一筋縄にはいかないことが明らかである。

*1/f ノイズもしくはピンクノイズと称される。

8.3 万有引力定数 G の測定装置としての X 振り子に関して

X 振り子を用いて万有引力定数 G の測定を試みたのは、本研究が初めてである。そこで、代表的な万有引力定数 G の測定法である換れ秤との比較を行ってみた。

まず、万有引力は微弱でありそれを直接測定しやすくするためにメカニカルな増幅を X 振り子、換れ秤共に行っている。この増幅率の大きさを表す指標は周期であり、長いほど増幅率は大きくなる。X 振り子は 100 秒未満くらいしか出ておらず、安定に使用できるのは 20 秒くらいである。それに対して、換れ秤は簡単に 100 秒くらいが実現できる。この観点からすると、換れ秤に軍配が上がる。

次に、振り子の取り扱いについて考えてみる。X 振り子は薄い板バネを使用しており、換れ秤は細いワイヤ - を使用しているため、両者ともに振り子の取り扱いには細心の注意を要する。その上、両者とも物を吊るすという構造であり常に薄い板バネ、細いワイヤ - 共にストレスがかかっており機械的な劣化が避けられない。この意味ではどちらも精密測定に適しているとは言い難い。

両者ともに、長周期の状態を作っているために地面振動の影響を受ける。経験的に、長周期、つまり低周波においては地面振動の大きさは大きくなることが知られており振り子のドリフトなどの問題を引き起こすと考えられる。その上、X 振り子においては床の傾きが問題になり 2 台使用することで補償しなければならず X 振り子の方が不利である。

	X 振り子	換れ秤
増幅率（長周期）	△	○
取り扱い	×	×
地面振動	×	△

表 8.1: X 振り子と換れ秤の比較

以上の点に関して表 8.1 にまとめてみたのだが、換れ秤と比べてみて X 振り子が有利である点はほとんどない。従って、将来的に換れ秤よりも精度の高い測定が行えるとは考えにくい。但し、換れ秤が横振動であるのに対して X 振り子は縦振動になっているという差異があり、直感的に理解しやすく異なる仕組みで万有引力定数を測定すること自体には意義がある。

8.4 傾斜計としての X 振り子

X 振り子を万有引力定数 G の測定装置として使用する場合、X 振り子の床の傾きに対する高い応答性は短所となり、それ故に 2 台の X 振り子を用いてこの短所を補わねばならなかった。しかしながら、見方を変えると短所となっている X 振り子の床の傾きに対する高い応答性は傾斜計として X 振り子を使用する場合には長所となる。

今回の測定において、台車を光学定盤に近づけたり遠ざけたりすることで万有引力を変化させたのだが、同時に光学定盤の傾きも変化している。表 7.2 から分かるように台車を近づけたり遠ざけたりすることで2台の X 振り子は共に約 0.01[mm] だけ平衡点が移動していることが分かる。この量は、予想される万有引力の効果の 10 倍もあるので光学定盤の傾きのみによるものとして見なせるであろう。2台の X 振り子の有効振り子長はどちらも約 50[m] であるから光学定盤は

$$\frac{0.01[\text{mm}]}{50[\text{m}]} = 2 \times 10^{-7}[\text{rad}]$$

だけ傾いたことを示している。従って、光学定盤の幅は 1[m] あるから台車側にある光学定盤の2本の脚は $2 \times 10^{-7}[\text{m}]$ だけ上下動していることが分かる。このことは、120[kg] の鉛と 30[kg] の支持枠を載せた台車の重みで台車の脚の周りの床が歪み、台車の脚から 10[cm] ほど離れた光学定盤の脚の付近では $2 \times 10^{-7}[\text{m}]$ だけ沈んでしまっていることを意味している。但し、この値は、床の材質などに依存する値であり一般論ではないが目安となるであろう。

このように、傾斜計および歪み計として X 振り子が使用できることが分かる。X 振り子の周期が簡単に 100 秒を越せず、床の傾きに支配されている現状においては傾斜計として X 振り子を用いる方が望ましいと考えられる。

第9章 結論

1. 2台のX振り子と2台のフォトセンサーを製作し、それを用いることで万有引力の効果を検出することはできた。
2. 万有引力定数 G の値を決定するだけの精度で測定が行えなかった。
3. 宇宙線研究所の地下実験室の床は意外に傾きやすいことが分かった。
4. X振り子の傾斜計としての有効性を再確認した。
5. X振り子は防振装置でも微小力測定装置でもなく傾斜計として使用することが望ましい。

付録A Keyence社製レーザー変位計 (LB-040) について

Keyence社製レーザー変位計 (LB-040) の較正を行った。レーザー変位計の方は光学定盤に固定しておき、反射面となるアルミ板の方を移動させることでレーザー変位計から反射面までの距離を変化させその時のレーザー変位計の出力電圧を測定した。その結果が図 A.1 である。フォトセンサーと同じように、得られたデータに対して直線でフィッティングしてある。このフィッティングした直線の傾きは

$$0.999[\text{V}/\text{mm}]$$

であった。これが、このレーザー変位計の変位電圧換算係数である。測定レンジも大きく直線性も良いのだが分解能は $2\mu\text{m}$ しかないのが欠点である。

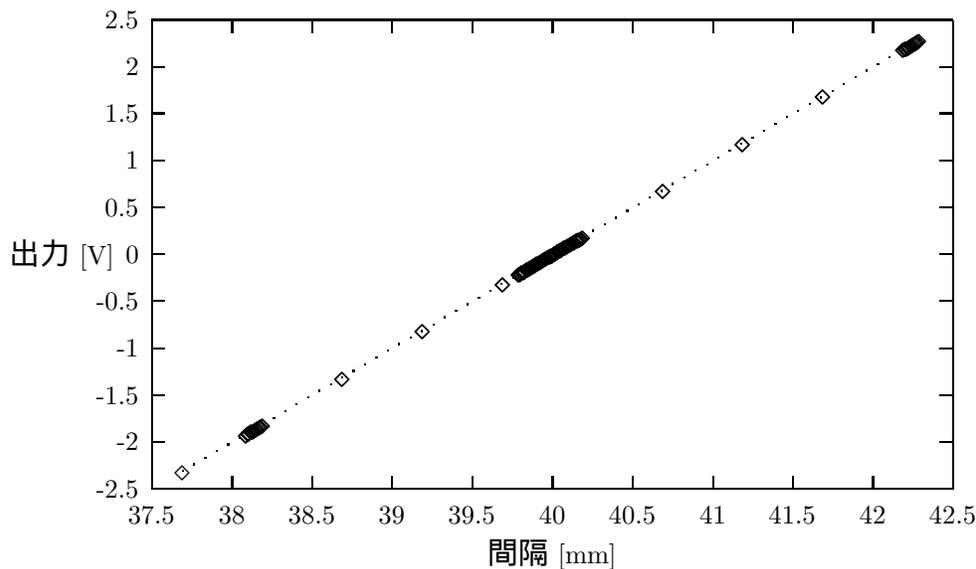


図 A.1: キーエンス社製レーザー変位計の較正

また、このレーザー変位計は反射面の角度に寄らず測定できるために今回の X 振り子の減衰の測定などに使用した。因みに、温度ドリフトも非常に小さい。製作したフォトセンサーと同様にこのキーエンス社製レーザー変位計のノイズパワースペクトル密度も測定した。この場合も、上記の変位電圧換算係数を用いてレーザー変位

計のノイズパワーを変位ノイズに読み替えてプロットしたグラフが図A.2である。このグラフと製作したフォトセンサーのパワースペクトル密度を表している図6.5および図6.6と比較してみると全体的にこちらのレーザー変位計の方がノイズパワーが大きいことが分かる。しかし、グラフにはしていないがもっと低周波においてはレーザー変位計のノイズパワーとフォトセンサーのノイズパワーは逆転する。つまり、製品であるレーザー変位計は長期安定性には優れているのである。

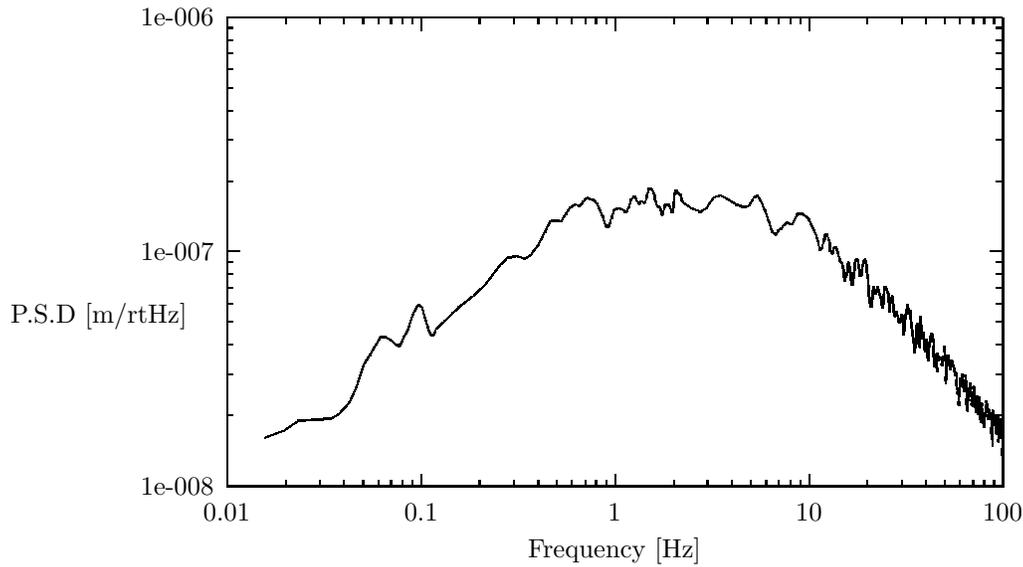


図 A.2: キーエンス社製レーザー変位計のノイズパワースペクトル密度

付 録 B 式号機の治具設計図

前述したように、式号機に関しては組み立て易くするために治具も製作した。治具板（図 B.1 のアルミ板）に X 振り子のクロス部内側（図 5.3）、外側（図 5.4）およびクランプ部（図 5.2）をネジで完全に固定できるようになっている。ここで、クランプ部を治具板に固定するのに図 B.2 の部品を用い、クロス部を固定するには図 B.3 の部品を用いる。なお、治具板の四隅には治具板を光学定盤に M6 のネジで固定できるように $\phi 6.2$ の穴が開けられている。（実際には使用しなかった。）

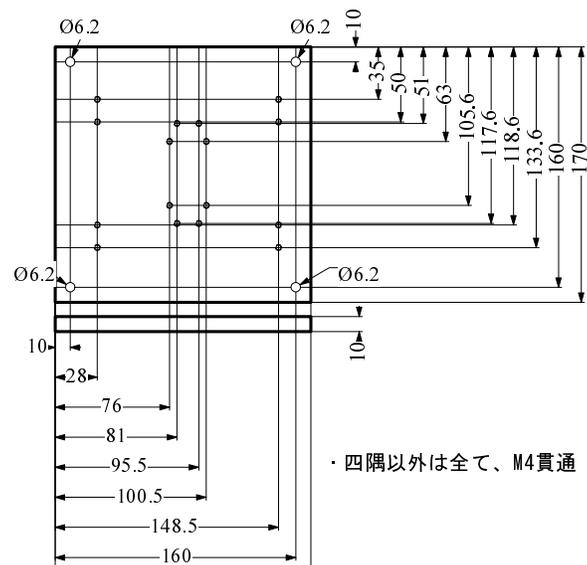


図 B.1: 式号機の治具板

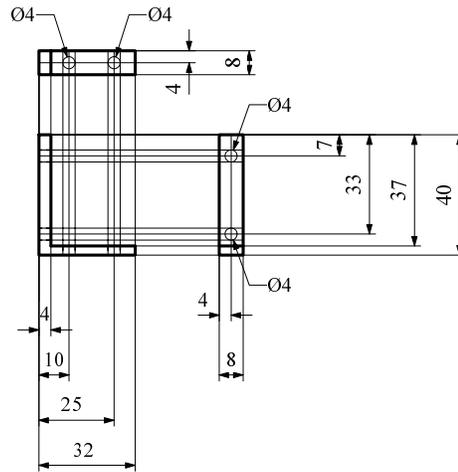


図 B.2: 式号機の治具小物1 (クランプ部固定具)

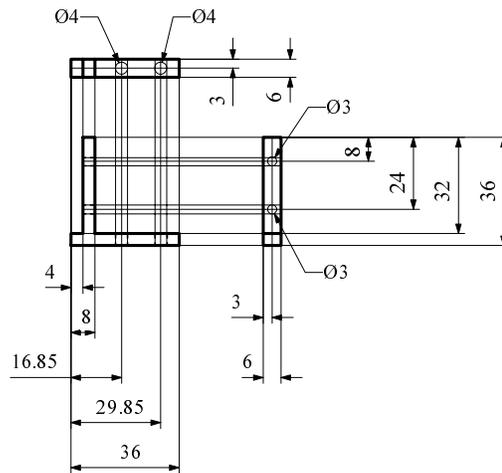


図 B.3: 式号機の治具小物2 (クロス部固定具)

付録C 一次のローパスフィルター

X 振りは常に $100\mu\text{m}$ ぐらいの振幅を持って振動しているためにマイクロメートルのオーダーの平衡点の変位は見にくくなる。そこで、X 振りの共振周波数よりも低い周波数にカットオフ周波数を持つローパスフィルターを通して DC 的な平衡点の変位を見やすくすることを行った。

X 振りの共振周波数は 20 秒だとすると約 50mHz なのでカットオフ周波数を 5mHz ぐらいに持ってくれば X 振りの振幅は $1/10$ になるので約 $10\mu\text{m}$ ぐらいに抑えられる。

ローパスフィルターは、抵抗とコンデンサーを組み合わせれば直に実現する。しかしながらこの方法は不可である。今回はカットオフ周波数が 5mHz に設定しているので時定数は

$$\frac{1}{2\pi \times 5 \times 10^{-3}[\text{Hz}]} = 31.8 \text{ 秒}$$

となる。フィルターのコンデンサーには電解コンデンサーを用いるわけにはいかないのでマイラコンデンサなどを用いなければならずせいぜい数 μF ぐらいのものしかない。例えば $3.3\mu\text{F}$ とすると 31.8 秒の時定数を実現するには約 $10\text{M}\Omega$ の抵抗が必要となる。すると、図 C.1 のようになる。測定器の入力インピーダンスはせいぜい

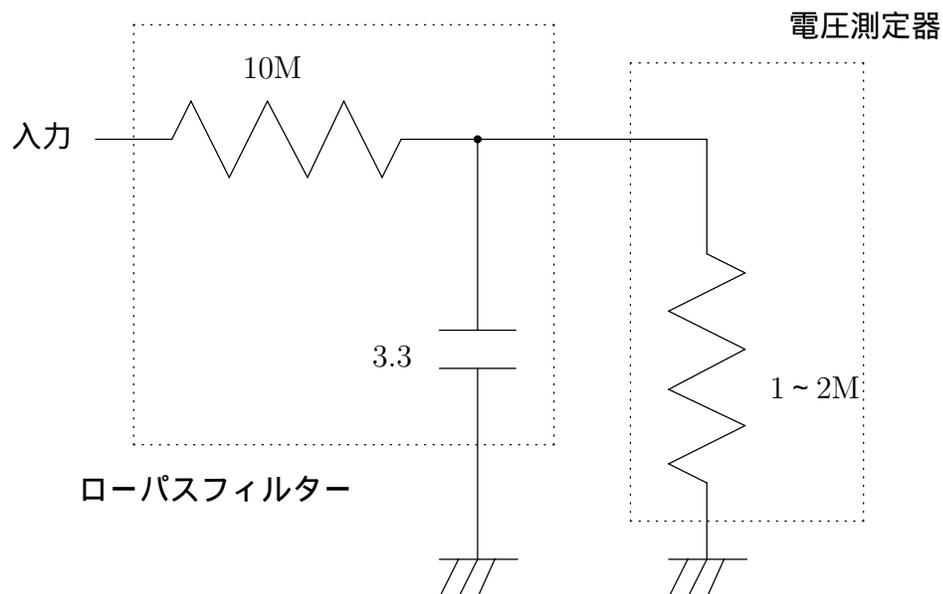


図 C.1: RC を用いたローパスフィルター

数 $\text{M}\Omega$ しかないのに、図 C.1 のようなローパスフィルターを通した出力インピーダ

ンスは $10\text{M}\Omega$ となってしまうのでローパスフィルターで電圧降下を起こしてしまい正しい電圧が測定できなくなってしまう。

そこで、次にオペアンプを用いてローパスフィルターを作ることが考えられる。オペアンプは出力インピーダンスが低いので図 C.1 のような電圧降下の問題は解決できる。例えば、図 C.2 のような回路が考えられる。しかしこの場合にも問題がある。オペアンプの入力インピーダンスは理想的には無限大であるが、実際には数 $\text{M}\Omega$ ぐ

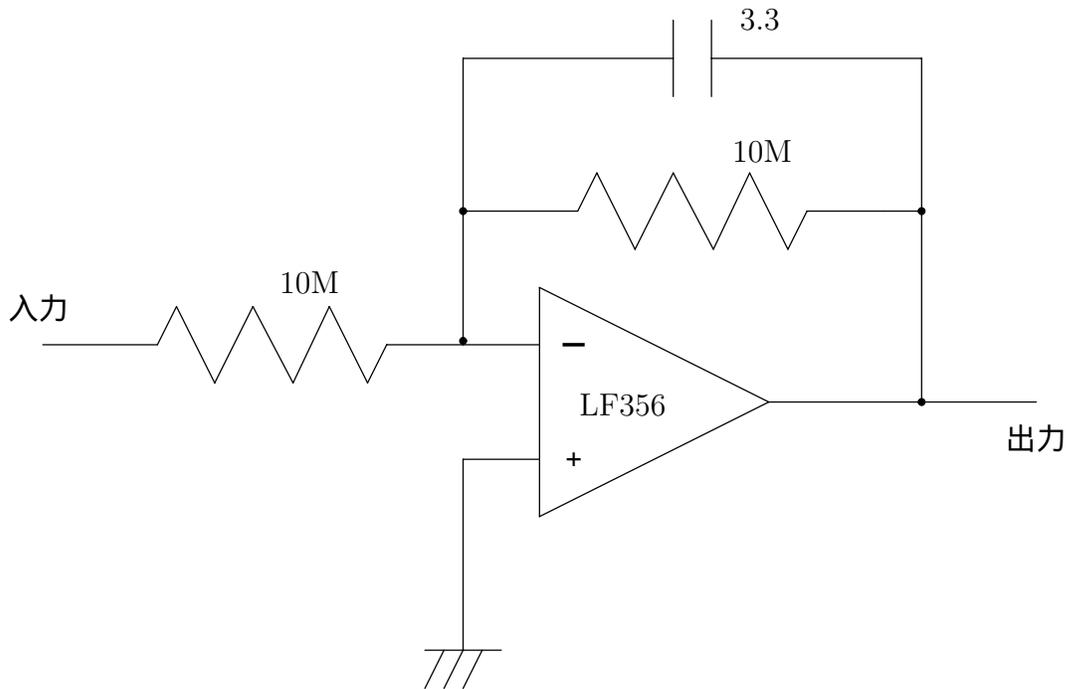


図 C.2: オペアンプを用いたローパスフィルター

らいである。すると、 $10\text{M}\Omega$ の抵抗を使用するには問題が起こる。例えば、反転入力端子に電流が流れ込むことになり理想的なオペアンプとしての振る舞いが期待できなくなる。但し、オペアンプの中には高入力インピーダンスのものが存在する。例えば、LF356 などは入力インピーダンスが $10^{12}\Omega$ もある。このようなオペアンプを使用すれば問題はない。

しかし今回はデジタルローパスフィルターを用いた。以下、その仕組みについて概説する。いま Δt の間隔でサンプリングされた時系列データ x_n があるものとする。この時系列データに対して

$$y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha)x_n \quad (\text{C.1})$$

のような処理を施して新たな時系列データ y_n を作る。但し、 $\alpha < 1$ 。すると、この時系列データ y_n は x_n に 1 次のローパスフィルターが掛かったものになっている。そしてこの時の時定数は

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} \Delta t$$

となる。例えば、 $\alpha = 33/34$ とし $\Delta t = 1$ 秒とすると時定数は 33 であるからカットオフ周波数は約 4.8mHz となる。このように、得られたデータに対して α の値を変更するだけで簡単にカットオフ周波数を変更でき、非常に便利である。この $\alpha = 33/34$ を式 (C.1) に代入すると

$$y_n = \frac{33}{34}y_{n-1} + \frac{1}{34}x_n$$

となる。この式を見ると、新たな時系列データ y_n に対する元の時系列データ x_n の寄与はたった $1/34$ しかない。つまり、34 回分足し算されて元の時系列データ x_n の値が y_n に対して完全に反映されるのであるから、34 回足し算される前に位相が反転してしまうような高周波成分は 34 回の足し算において相殺されてしまいほとんど y_n には反映されない。つまり、ローパスフィルターとなっているのである。

より厳密に考えるには、式 (C.1) の両辺に $e^{-in\Omega}$ を掛けて n について $-\infty$ から ∞ まで和を取ればよい。

$$\sum y_n e^{-in\Omega} = \sum \alpha y_{n-1} e^{-in\Omega} + \sum (1 - \alpha) x_n e^{-in\Omega} \quad (\text{C.2})$$

ここで、 $\Omega = \omega\Delta t$ と考えると x_n 、 y_n の離散フーリエ変換は

$$\begin{aligned} X_d(\Omega) &= \sum x_n e^{-in\Omega} \\ Y_d(\Omega) &= \sum y_n e^{-in\Omega} \end{aligned}$$

であるから式 (C.2) は

$$Y_d(\Omega) = \frac{(1 - \alpha)X_d(\Omega)}{1 - \alpha e^{-i\Omega}}$$

と書ける。従って、 X_d 、 Y_d をそれぞれ入力と出力と見なすと周波数応答関数は

$$H_d(\Omega) \equiv \frac{Y_d(\Omega)}{X_d(\Omega)} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha e^{-i\Omega}}$$

と見なせる。更に、 $\Omega = \omega\Delta t \ll 1$ の場合を考えると

$$H_d(\Omega) \sim \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha(1 - i\Omega)} = \frac{1}{1 + i\frac{\alpha}{1-\alpha}\omega\Delta t}$$

となるから時定数 $\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta t$ の 1 次のローパスフィルターが実現されていることが分かる。


```
c  Observation point
c    xo=2.0d2
      yo=0.0d0
c    zo=0.0d0

c  Source mass
      sx=1.0d2
      sy=4.0d2
      sz=3.0d2

c  sub loop
      do 190 zo=-1.0d3,1.0d3,1.0d1
          do 150 xo=1.0d2,1.0d3,1.0d1
              dgx=0.0d0

c  main loop
      do 100 z=-sz/2,sz/2,delta
          do 50 x=-sx/2,sx/2,delta
              do 10 y=-sy/2,sy/2,delta
                  d=((xo-x)**2.0d0+(yo-y)**2.0d0+(zo-z)**2.0d0)**5.0d-1
                  dgx=dgx+dabs(xo-x)/d**3.0d0
10              continue
50          continue
100         continue

              gx=G*Pdens*(delta*1.0d-3)**3.0d0*(1.0d3)**2.0d0*dgx
              write(*,*) xo,zo,gx
150         continue
190         continue

      stop
      end
```

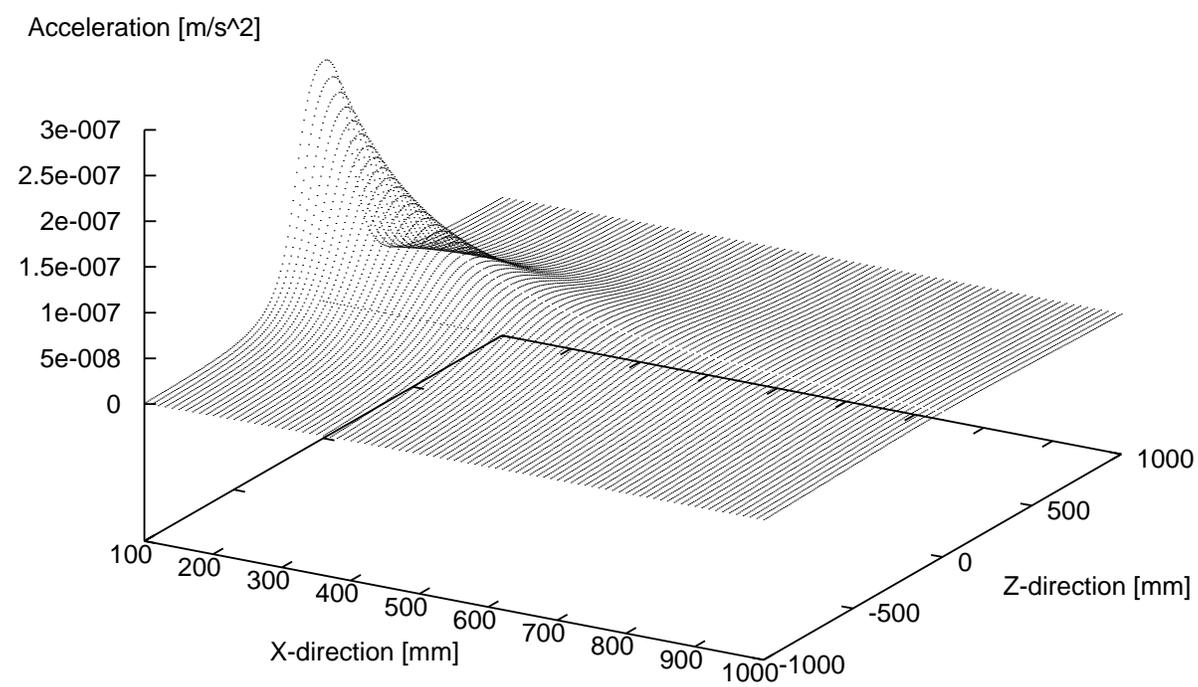


図 D.1: 直方体状のおもりが形成する重力加速度の X 成分

関連図書

- [1] G.G.Luther and W.R.Towler, *Phys.Rec.Lett.* **48**, 121, 1982.
- [2] W.Michaelis, et al., *Metrologia* **32**, 267, 1995/1996.
- [3] M.P.Fitzgerald and T.R.Armstrong, *IEEE Trans.Instr.Measr.* **44**, 494, 1995.
- [4] K.Kuroda, *Phys.Rev.Lett.* **75**, 2796, 1995.
- [5] G.T.Gillies, *Metrologia* **24**, 1, 1987.
- [6] G.T.Gillies, *Rep.Prog.Phys.* **60**, 151, 1997.
- [7] P.J.Mohr and B.N.Taylor, *J.Phys.Chem.Ref.Data* Vol.**28**, No.6, 1713, 1999.
- [8] 金原寿郎, 「基礎物理学」上巻(裳華房), 135 ページ.
- [9] 平川浩正, 日本物理学会誌 Vol.**39**, No.2, 102, 1984.
- [10] 黒田和明, 日本物理学会誌 Vol.**52**, No.10, 752, 1997.
- [11] Y.Fujii, *Phys.Rev.D* **9**, 874, 1974.
- [12] N.Arkani-Hamed et al., *Sci.Am.* **283**, 2, 62, 2000.*
- [13] N.Arkani-Hamed et al., *Phys.Lett.B* **429**, 263, 1998.
- [14] バートラム・シュワルツチャイルド, 須藤靖訳, *パリティ* Vol.**16**, No.04, 45, 2001.†
- [15] 幸嘉平太, 修士論文「重力検出器のための長周期 X 振り子機構に関する研究」, 1996.
- [16] 河邊径太, 修士論文「Fabry-Perot 型重力波検出器の制御」, 1992.

*余次元について英語で書かれているが、大衆向けで理解しやすい。

†余次元について日本語で書かれており一番簡単に理解するのに適している。