Penrose不等式と正エネルギー定理

白水徹也

名古屋大学大学院多元数理科学研究科/KMI

KOBAYASHI-MASKAWA INSTITUTE FOR THE ORIGIN OF PARTICLES AND THE UNIVERSE

NAGOYA UNIVERSITY

目次

1. はじめに

Penrose不等式~予想~

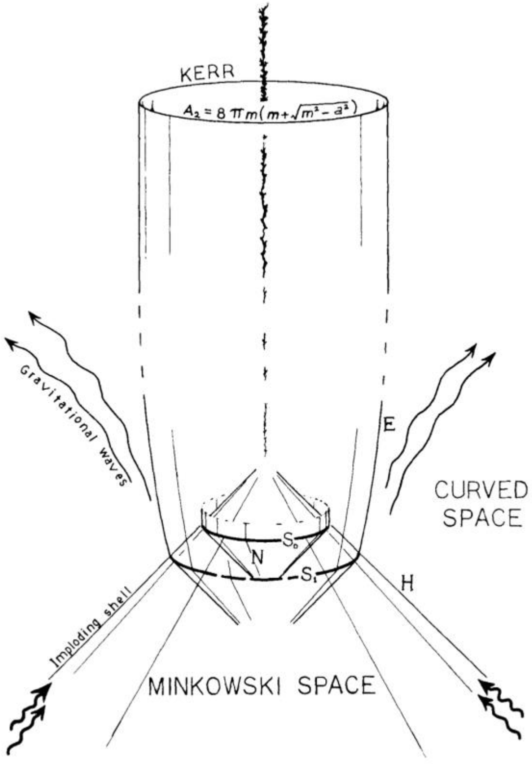
Penrose 1973

Schwarzschild半径

$$A \le 4\pi(2Gm)^2$$

A ･･･ 閉捕捉面の面積

m ･･･ 質量



宇宙検閲官仮説を間接的にサポートする不等式と考えられている。

宇宙検閲官仮説からの洞察

もし宇宙検閲官仮説が成り立つとすると、

面積増大定理(事象の地平面の面積は増大) $\frac{dA(t)}{dt} \geq 0$

唯一性定理 ➡ 時空は重力波等を放出しKerr/Schwarzschildブラックホールへ落ち着くと予想される。

➡ $$A_{\mathrm{Kerr}} \leq A_{\mathrm{Sch}} = 4\pi(2Gm)^2$$

➡ $$A(t) \leq 4\pi(2Gm)^2$$

Penrose不等式が破れている場合、裸の特異点が発生することが示唆される

Penrose不等式と正質量定理

Penrose不等式(PI)

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$$

正質量定理(PMT)

$$m \geq 0$$

m: 全質量(ADM mass)

正質量定理をブラックホールがある場合に
下限を精査したものとみなすことができる。

PIはPMTと連動して発展している傾向

D. Lee, Geometric Relativity, AMS, 2019

主要研究の歴史

Penrose不等式(PI)

1967 Israel　唯一性定理(等式)

1973 Penrose　null dust shell

1977 Jang & Wald　逆平均曲率流

1997 Gibbons　一般のnull dust shell

2001 Huisken & Ilmanen
逆平均曲率流の問題解消
Bray　共形流+正質量定理

正質量定理(PMT)関連

1961 Arnowitt, Deser & Misner　ADM質量

1968 Brill & Deser　摂動

1973 Geroch　逆平均曲率流

1979 Schoen & Yau　Riemannian PMT, 3D

1981 Schoen & Yau　spacetime PMT, 4D
Witten　spacetime PMT, spin

1987 Bunting & Masood-ul-Alam
静的BHの唯一性定理への応用

2006/2015/2016 Lohkamp PMT D≧4

2017 Schoen & Yau　PMT D≧4

2019 Bray, Kazaras, Khuri & Stern　調和関数

2. 正質量定理

正質量定理

Schoen & Yau, Witten 1981

-漸近的に平坦な正則な時空

-Einstein方程式

-Dominant energy condition

$$\Rightarrow \quad m \geq 0$$

$$m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{平坦時空}$$

『一般相対論的時空は安定』

正則定常真空時空への洞察

Einstein & Pauli 1943, Lichnerowicz 1955, …

真空、正則、全域定常 ⇨ 平坦時空

『非自明な真空定常配位(Geon)は存在しない』

(現代的証明の流れ)
方程式から質量0であることを示し、正質量定理を用いる。

注意:BHが存在する場合は対象外

電磁真空の場合

白水、大橋、鈴木 2011

SOS

電磁真空、正則、全域定常 ⇒ 平坦時空

ブラックホール(BH)時空への応用

静的BHの唯一性定理:　　Israel 1967, Robinson 1977
漸近的平坦、真空、静的ブラックホールはSchwarzschild時空に限られる。

ブラックホールが単一であることが仮定されていた。

多重ブラックホールの場合？

静的BH唯一性定理の別証明

Bunting & Masood-ul-Alam 1987, Hawng 1998, Gibbons, 井田, 白水 2002

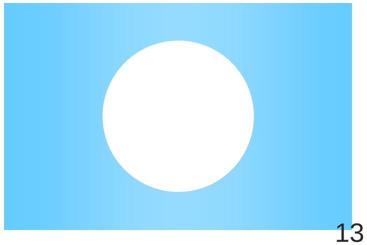
(新証明の流れ)

1. 時間一定面に対して共形変換を行い、質量0の空間を構成

2. 正質量定理より平坦空間。
   正則性から事象の地平面は球対称

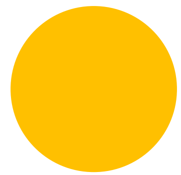
3. 平坦空間における球対称境界条件の静電ポテンシャル問題に帰着

4. 空間全域で球対称



静的平衡形状への応用

星　($P=P(\rho)$)



Masood-ul-Alam 1988, Beig & Simon 1992,
Lindblom & Masood-ul-Alam 1994

cf)Newton重力
Lichtenstein 1918,
Lindblom 1992

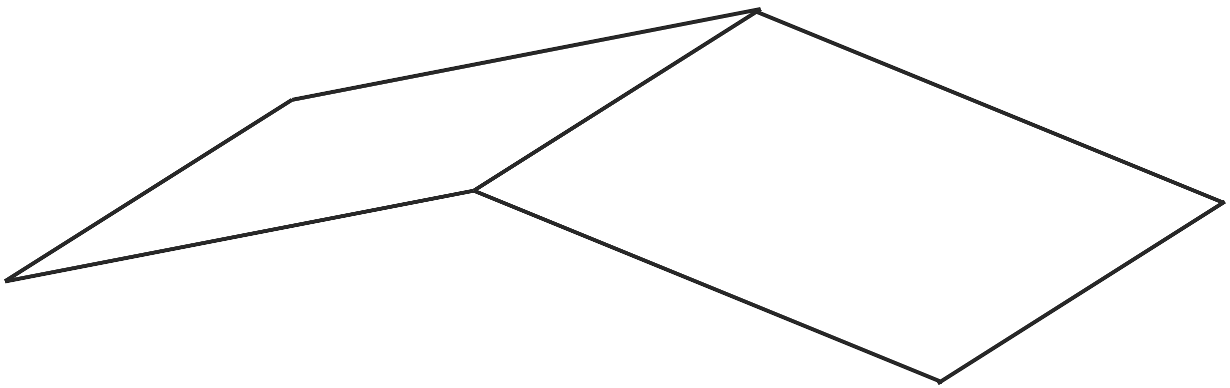
球対称

星 ($P=P(\rho)$)とブラックホールの共存系の非存在

白水、吉野、山田 2006

正質量定理と特異超曲面

Miao 2002, Lee & LeFloch 2015, 澁谷 2018



dominant energy condition(DEC)の(微)修正

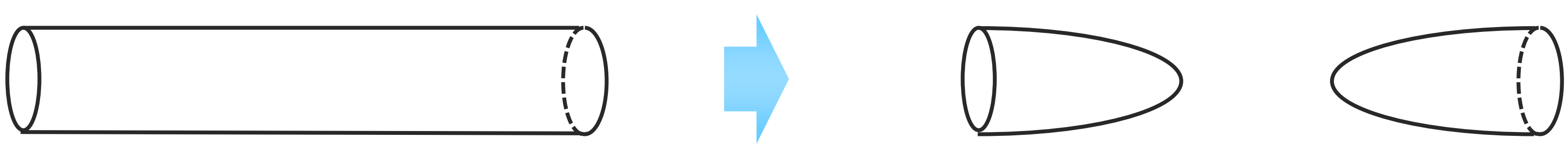
特異面近傍の微小領域で積分したエネルギー運動量テンソルもDECを満足

余剰次元と時空の安定性

一般には不安定

漸近的に局所平坦

無の泡生成 Witten 1981



m=0　　　　m=0

時空の安定性とモデル制限

Dominant energy conditionは満足しないが、Wittenの正質量定理が稼働する物質モデルは？

Boucher 1984, Townsend 1984

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \quad \Rightarrow \quad V(\phi) = 8\left(\frac{dW(\phi)}{d\phi}\right)^2 - 12(W(\phi))^2$$

野澤 & 白水 2014

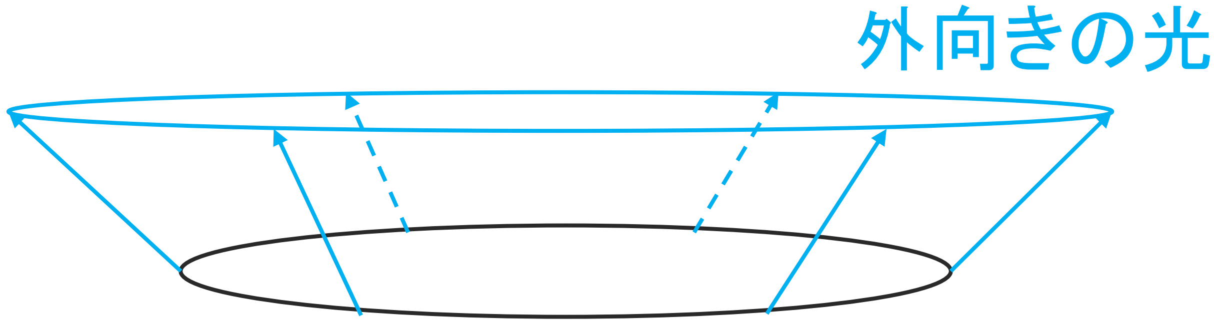
$$\mathcal{L} = K(X, \phi), \quad X = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \quad \Rightarrow \quad K(X, \phi) = X - V(\phi)$$

$$V(\phi) = 8\left(\frac{dW(\phi)}{d\phi}\right)^2 - 12(W(\phi))^2$$

3. Penrose不等式(PI)

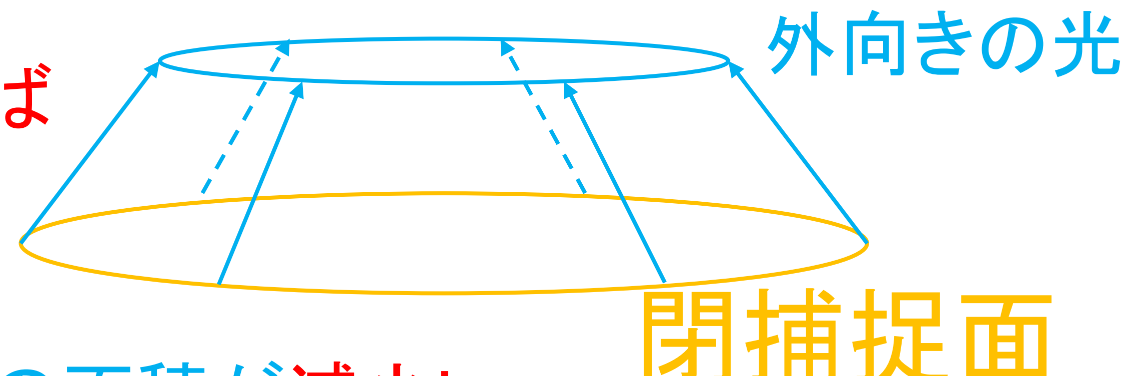
閉捕捉面: 重力の強さの指標

重力が弱ければ



光波面の面積は増大

重力が強ければ



光波面の面積が減少!

Penrose不等式(PI)予想

漸近的に平坦な初期面

$$A \leq 4\pi(2Gm)^2$$

A: 最外閉捕捉面の面積　　*m*: ADM質量

証明済

時間対称な初期面、非負エネルギー密度の場合:

Jang & Wald 1977, Huisken & Ilmanen 2001, Bray 2001

最外閉捕捉面 = 極小曲面

初期面において非負のエネルギー密度(=非負Ricciスカラー)

BH唯一性定理に潜むPenrose

Israel 1967
Robinson 1977

静的BHの唯一性定理:

漸近的平坦、真空、静的ブラックホールはSchwarzschild時空に限られる。

(証明の流れ)

Einstein方程式

↓

発散恒等式 → Penrose不等式 逆Penrose不等式 → 等式 → 球対称

cf)発散恒等式の系統的導出 野澤、白水、泉、山田 2018

常微分方程式の問題に帰着

ジレンマ

定義からブラックホール自体は観測できない

宇宙検閲仮説が成り立っていれば、

閉捕捉面　⊂　ブラックホール

➡ 捕捉面も観測できない

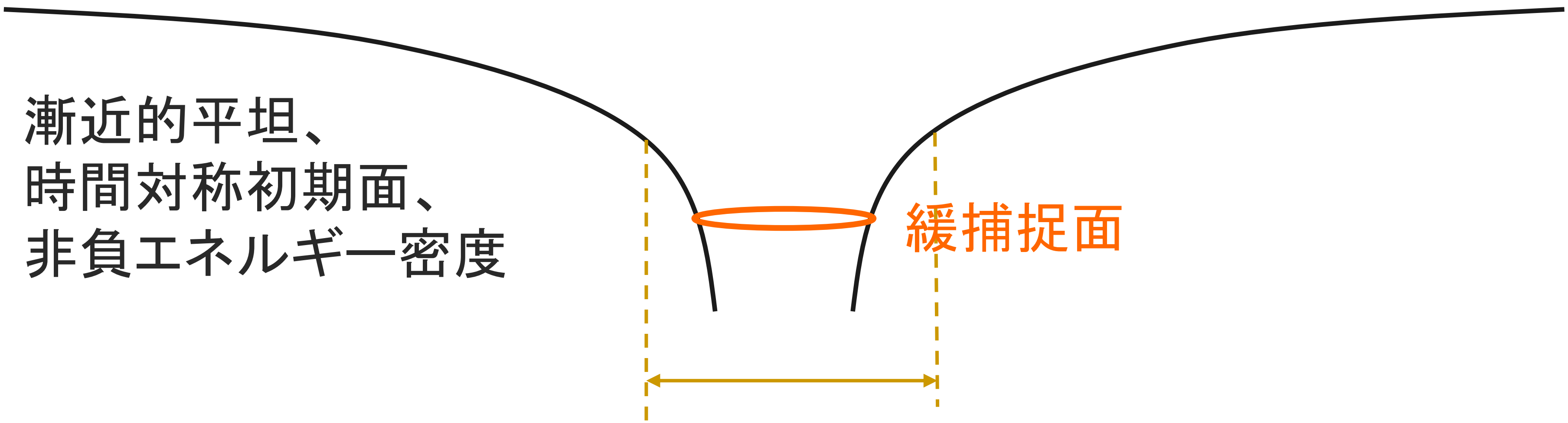
強重力を表現する”観測”可能な代替物？

photon sphere, loosely trapped surface,... ?

緩捕捉面 (Loosely trapped surface)

白水、富川、泉、吉川 2017

漸近的平坦、
時間対称初期面、
非負エネルギー密度



面積の(動径方向の)加速的増加領域

$$A_{\mathrm{LTS}} \leq 4\pi(3GM/c^2)^2$$

重力場中の面

泉、富川、白水、吉野 2021

attractive gravity probe surface (AGPS)

$$r^a \nabla_a k - \alpha k^2 \geq 0,\ (\alpha > -1/2)$$ を満足する面

時間一定面、非負Ricciスカラー

k: 正の外的曲率のトレース(平均曲率)

~重力が引力/正質量

α=0 : 緩捕捉面(LTS)
α=∞ : 極小曲面

$$A_\alpha \leq 4\pi \left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha} \right)^2 (Gm)^2$$

宇宙と面積不等式

漸近的deSitter時空(〜インフレーション、加速膨張宇宙)

時間対称初期面における宇宙の地平面の面積に対して

Boucher, Gibbons & Horowitz 1984

$$A_c \leq 12\pi/\Lambda = 4\pi(\sqrt{3/\Lambda})^2$$

BHに対して　白水、中尾、前田 & 小玉 1993, Hayward, 白水 & 中尾 1994, 前田, 古池, 成田 & 石橋　1998

$$A_b \leq 4\pi/\Lambda = 4\pi(\sqrt{1/\Lambda})^2$$

『BHは宇宙よりも小さい』『大きなBHは衝突できない』

4. まとめ

まとめ

Penrose不等式は正質量定理をBHの場合に精査したものと考えられる。

正質量定理と連動し、主に数学分野で発展/展開が続いている。

気になること

時間対称な初期面でない場合のPI?

Schoen & YauとWittenとの関係？

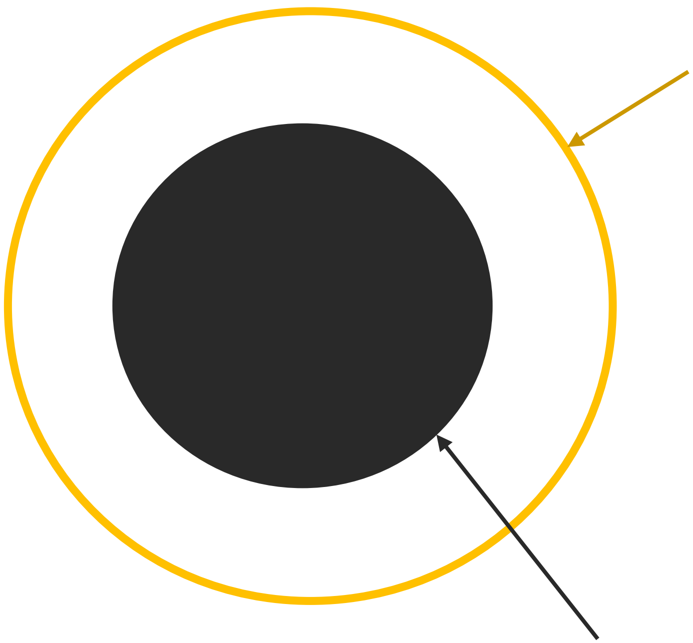
Israel/Robinson/SOSの証明の深層探索？
正質量定理を用いた証明との関係は？

緩捕捉面(LTS)から捕捉面？

・・・

Photon sphere

回転のないブラックホール(Schwarzschild解)



photon sphere : $r = 3GM/c^2$

光の閉じた円軌道

event horizon : $r = 2GM/c^2$

Newton重力から一般相対論

Newton重力

Poisson方程式　$\Delta\phi = 4\pi G\rho$

$$\Rightarrow\quad m = \int d^3x\rho = \frac{1}{4\pi G}\int d^3x\Delta\phi = \frac{1}{4\pi G}\int_{S_\infty}\partial_i\phi dS^i$$

一般相対論

漸近的に平坦　$g_{ij} \simeq \delta_{ij} + h_{ij}$　　$h_{ij} \sim -2\phi\delta_{ij}$

ADM(Arnowitt, Deser, Misner)質量

$$m = \frac{1}{16\pi G}\int_{S_\infty}(\partial^j h_{ij} - \partial_i h^j_j)dS^i$$