ペンローズ過程と粒子衝突

原田知広

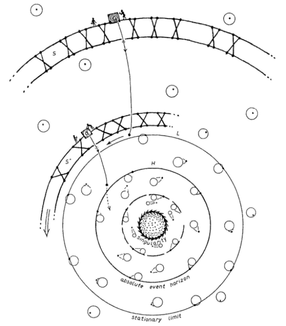
日本物理学会第 76 回年次大会
2021 年 3 月 12 日〜15 日

立教大学理学部

Outline

Penrose 過程の歴史

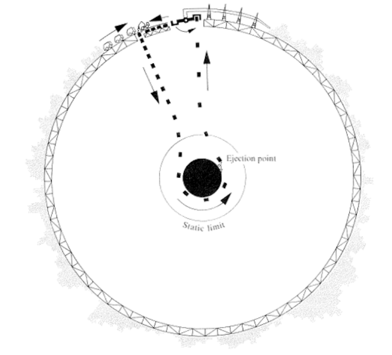
- 1916 **ブラックホール解** (Schwarzschild)
- 1963 **回転ブラックホール解** (Kerr)
- 1963 **系外天体としてのクェーサーの発見** (Schmidt)
- 1969 **ブラックホールからエネルギー引き抜き** (Penrose)



Penrose, Nuovo Cimento, Numero Speziale **1**, 257 (1969)

Penrose 過程の実用化？

- ブラックホール都市
  都市から出るゴミをブラックホールに落としてブラックホールからエネルギーを得て電力として活用する。



Misner, Thorne & Wheeler, "Gravitation" (W. H. Freeman & Co, 1973)

Penrose 過程の発展と現代的意義

- 1969 Penrose **過程** (Penrose; Penrose & Floyd 1971)
- 1971 **波の超放射散乱** (Zeldovich)
  - **ブラックホールとアクシオンの相互作用**
  - AdS **ブラックホールの安定性**
- 1975 **衝突** Penrose **過程** (Piran, Shaham & Katz)
  - **ブラックホール近傍のダークマター粒子反応**
- 1977 **磁場によるエネルギー放射** (Blandford & Znajek)
  - **ブラックホールによる宇宙ジェット**
  - **ガンマ線バースト**

Outline

導入

Kerr ブラックホール

Penrose 過程

粒子加速と衝突 Penrose 過程

まとめ

Kerr 解

- Einstein 方程式の軸対称定常真空解

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1-\frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\phi \\
&\quad +\frac{\Sigma}{\rho^2}\sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\
\rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \\
\Sigma &= (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

- M: 質量, $J = Ma$: 角運動量。
  $M > 0$, $0 < a \leq M$ とする。
- $\omega := -g_{t\phi}/g_{\phi\phi} = (2Mar)/\Sigma$: 慣性系引きずり効果
- $\rho^2 = 0 \Leftrightarrow (r = 0$ and $\theta = \pi/2)$: 曲率特異点

対称性

- Killing ベクトル場

$$\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \quad \psi^a = \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a$$

  無限遠で、ξ^a は時間的、ψ^a は空間的。
- $\xi^a + \Omega\psi^a$ も Killing ベクトル場。
- 粒子のエネルギーと角運動量は測地線に沿って保存

$$E = -u_a\xi^a, \quad L = u_a\psi^a$$

  無限遠で静止した粒子では $E = 1$

静的限界面

- $g_{tt} = 0$ つまり

$$r = r_{sl}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

で ξ^a はヌルになる。その外部では時間的、その内部では空間的になる。

事象の地平面

- $\xi^a + \Omega\psi^a$ が時間的つまり

$$(\xi^a + \Omega\psi^a)(\xi_a + \Omega\psi_a) < 0$$

であるには、$(g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = \Delta \sin^2\theta > 0$ でなければならない。

- $\Delta = 0$ すなわち

$$r = r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

でそのような Ω が存在しなくなる。$r = r_+$ が事象の地平面に対応する。

- $r > r_+$ では $\xi^a + \Omega\psi^a$ が時間的となる Ω が存在する。

事象の地平面の性質

- 地平面 $r = r_+$ を生成するヌル測地線の接ベクトル

$$\chi^a = \xi^a + \Omega_H \psi^a, \quad \Omega_H = \omega(r_+) = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$$

Ω_H: ブラックホールの角速度

- 表面重力: 地平面上で $\chi^b \nabla_b \chi^a = \kappa \chi^a$

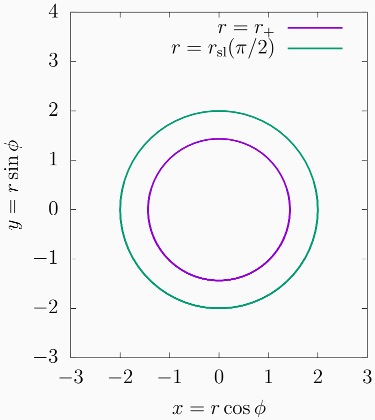
$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2}$$

- 地平面の表面積

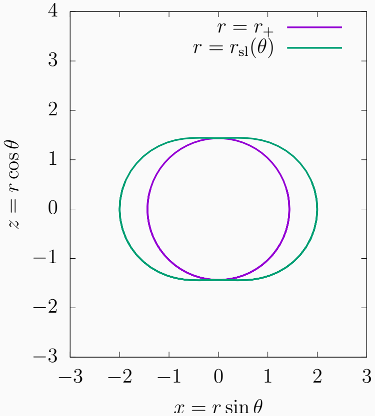
$$A = \int \int_{r=r_+} d\theta d\phi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} = 4\pi(r_+^2 + a^2)$$

エルゴ球

- 領域 $r_+ < r < r_{\rm sl}(\theta)$ では、事象の地平面の外側でありながら ξ^a が空間的になっている。



上から見た図



横から見た図

Outline

導入

Kerr ブラックホール

Penrose 過程

粒子加速と衝突 Penrose 過程

まとめ

負のエネルギーの粒子

- 粒子 (4 元速度 $u^a = \dot{x}^a$) のエネルギー $E = -u_a \xi^a$ は、ξ^a が未来向き時間的かヌル的なら非負だが、ξ^a が空間的なら負になりうる。
- 時間前進条件 $\dot{t} > 0$

$$\begin{aligned} E &= -u_a \xi^a = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi}, \\ L &= u_a \psi^a = g_{\phi t}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} \end{aligned}$$

より、$r > r_+$ では

$$E - \omega L = \frac{(g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}}\dot{t} > 0.$$

$\omega > 0$ なので、$E < 0$ ならば $L < 0$。
- 負エネルギーの粒子はエルゴ球から外へ抜け出すことはできない。

測地線

- Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}$$

は変数分離できて、

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta)$$

とかける。これより、新たな保存量として Carter 定数 Q が現れ、測地線方程式が一階の常微分方程式

$$\dot{x}^\mu = f^\mu(x^\alpha)$$

に帰着。

赤道面上の測地線

- 例えば動径座標については

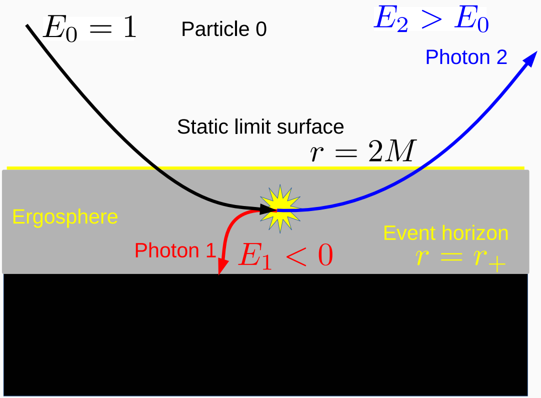
$$
\begin{aligned}
\rho^2 \dot{r} &= \pm\sqrt{R} \\
R(r) &= [(r^2+a^2)E - aL]^2 \\
&\quad -\Delta[m^2 r^2 + (L-aE)^2 + Q]
\end{aligned}
$$

- 赤道面上（$\theta = \pi/2$）に注目すると $Q = 0$ であり、r の時間発展は 1 次元ポテンシャル問題に帰着。
- $E < 0$ となるための必要十分条件:

$$
L < 0 \quad \text{かつ} \quad r - 2M < -\frac{r\Delta}{L^2}
$$

もともとの Penrose 過程：概観

- 無限遠から落下した有質量粒子 0 がエルゴ球で 2 つの光子に分裂し、光子 1 が負のエネルギーをもち、光子 2 が正のエネルギーを持って無限遠へ逃げる。



もともとのPenrose過程: 詳細

- 無限遠で静止した ($E_0 = 1$) 有質量粒子 0 がエルゴ球のある半径 $r_+ < r < 2M$ で転回点 ($\dot{r} = 0$) に達した瞬間に、2 つの光子 1,2 に分裂する。
- 分裂時 $\dot{r} = 0$ とすると、$E_0 = E_1 + E_2$, $L_0 = L_1 + L_2$ より

$$E_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2M}{r}} - 1\right), \quad E_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2M}{r}} + 1\right)$$

となるので、$E_1 < 0$, $E_2 > 1$

- 光子 2 は無限遠に到達し、$E_2 > E_0$ だから正味のエネルギーを引き抜く。
- $a = M$ かつ $r \to r_+$ のとき光子 2 のエネルギーは最大になり、$\eta_{\max} = E_2/E_0 = (\sqrt{2} + 1)/2 \simeq 121\%$。

Wald 不等式

- 有質量粒子 0 がいくつかの粒子 1,2,... に分裂したとして、そのうちの一つの有質量粒子に注目する。
- 粒子 0(エネルギー E) に対する粒子 1(エネルギー ϵ) の速度を v とすると、

$$\gamma E - \gamma|v|\sqrt{E^2 + g_{tt}} \le \epsilon \le \gamma E + \gamma|v|\sqrt{E^2 + g_{tt}}.$$

→ $E > 0$ で $\epsilon < 0$ となるためには

$$|v| > \frac{E}{\sqrt{E^2 + g_{tt}}}.$$

→ $E = O(1)$ なら相対論的な分裂が必要。

- Bardeen-Press-Teukolsky 不等式も同様の結論

可逆引き抜き過程

- **面積増大則**
  $E - \omega L > 0$ と $\delta M = E$, $\delta J = L$ から、

  $$\delta M - \Omega_H \delta J \geq 0 \Rightarrow \delta A \geq 0.$$

  つまり、地平面の面積は減少しない。
- **回転エネルギーの引き抜き**
  $M_{\mathrm{irr}} := \sqrt{A/(16\pi)}$ を定義すると、

  $$M^2 = M_{\mathrm{irr}}^2 + \frac{J^2}{4M_{\mathrm{irr}}^2}.$$

  右辺第二項は回転エネルギーによる寄与。$\delta M < 0$, $\delta J < 0$, $\delta M_{\mathrm{irr}} \geq 0$ であるから、M の減少は回転エネルギーの減少によるもの。

Outline

導入

Kerr ブラックホール

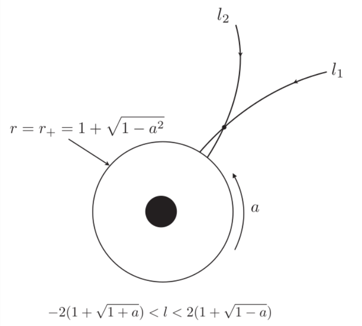
Penrose 過程

粒子加速と衝突 Penrose 過程

まとめ

粒子加速器としての Kerr ブラックホール

- Kerr ブラックホールの赤道面で無限遠で静止した 2 つの粒子を落下させて衝突させる



Banados, Silk, West, PRL **102**, 111102 (2009)

- 重心系エネルギー (保存エネルギー E とは異なる)

$$\boldsymbol{E^2_{\mathrm{cm}}} \ := \ -(\boldsymbol{p}^{(1)} + \boldsymbol{p}^{(2)})^a(\boldsymbol{p}^{(1)} + \boldsymbol{p}^{(2)})_a$$

重心系エネルギーに上限がないこと

- $a = M$ の場合で、$r \to r_+$ の極限をとると

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{cm}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{L_2 - 2M}{L_1 - 2M} + \frac{L_2 - 2M}{L_1 - 2M}}}.$$

  $L_1 \to 2M$(または $L_2 \to 2M$) とすると（臨界条件）、$E_{\mathrm{cm}} \to \infty$ となる。[反作用は無視] Banados, Silk & West (2009)

- Schwarzschild の場合には $E_{\mathrm{cm}} = 2\sqrt{5}$ にしかならない。

一般性

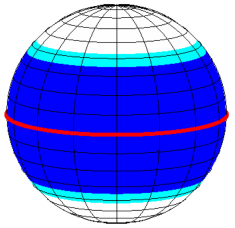
- $a < M$, $a \simeq M$ の場合 Jacobson & Sotiriou (2010)

$$E_{\rm cm} \simeq (1 - a_*^2)^{-1/4}, \quad a_* := a/M$$

- ISCO を回る粒子 1 と落下粒子 2 Harada & Kimura (2011a)

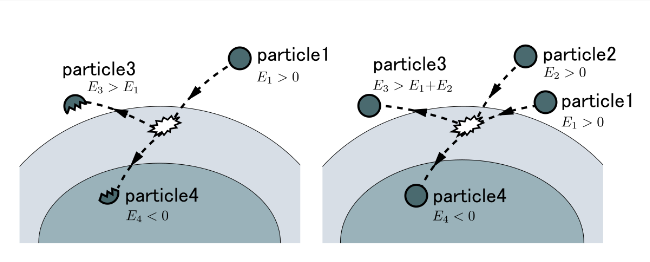
$$E_{\rm cm} \simeq (1 - a_*^2)^{-1/6}$$

- 初速度によらず起こる。光子でも起こる。赤道面以外も起こるが高緯度では起こらない。Harada & Kimura (2011b)



Harada & Kimura, PRD **83**, 084041 (2011)

衝突 Penrose 過程



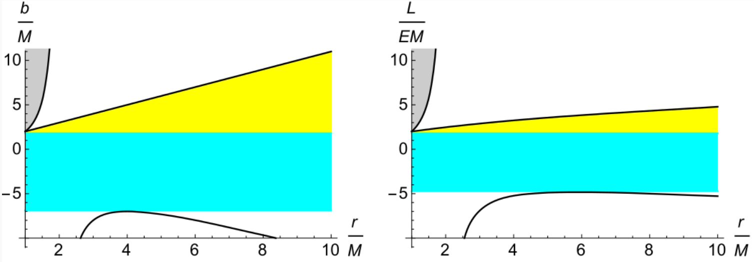
$$p^{(1)a} + p^{(2)a} = p^{(3)a} + p^{(4)a} \text{ on the collision}$$

Harada, Kimura, CQG **31**, 243001 (2014)

- BSW 過程によって相対論的衝突が起こるのであれば、高いエネルギー効率が実現できるのではないか？
- E_{cm} は衝突の前後で保存する。$E_{\mathrm{cm}} \to \infty$ であれば、一般的に、$E_3 \to \infty$, $E_4 \to -\infty$ とできる。

地平線近傍の粒子の振る舞い

- 転回点とインパクトパラメーター b



Ogasawara, Harada & Miyamoto, PRD **93**, 044054 (2016)

（左）零質量粒子　（右）有質量粒子 $(E = 1)$。

- 正エネルギー粒子を地平線近傍から無限遠に逃がす。

  ↑ 外向きに発射する。そのまま無限遠に逃げる。

  ↓ 内向きに発射し、bounce してから無限遠に逃げる。

  $b > 2M$ かつ $b \simeq 2M$ でなければならない。

エネルギー効率の最大値: BSW 過程

- **エネルギー効率**

$$\eta = \frac{E_3}{E_1 + E_2}$$

- $E_{\mathrm{cm}} \gg 1$: **粒子** 1 **は（近）臨界的とする。**
- BSW **過程：無限遠から粒子** 1,2 $\downarrow\downarrow$
  - **粒子** 3,4 $\uparrow\downarrow$: $\eta < 1$
  - **粒子** 3,4 $\downarrow\downarrow$: $\eta_{\mathrm{max}} = 2(2+\sqrt{3}) \simeq 7.464$
    【粒子 3 **が** bounce **を経てから無限遠に到達】**

Bejger et al. (2012), Harada, Nemoto & Miyamoto (2012), Leiderschneider & Piran (2015)

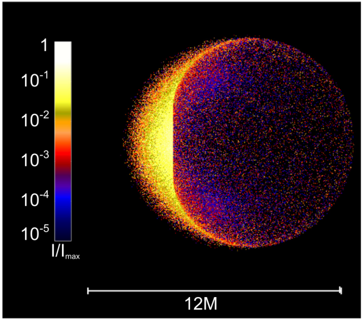
エネルギー効率の最大値: Schnittman 過程

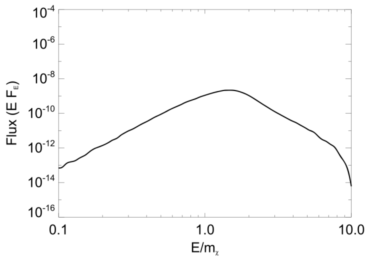
- Schnittman 過程：無限遠から粒子 1,2 ↑↓
  【粒子 1 が bounce を経てから衝突】
  - 粒子 3,4 ↑↓: $\eta_{\mathrm{max}} = 2 + \sqrt{3} \simeq 3.732$
  - 粒子 3,4 ↓↓: $\eta_{\mathrm{max}} = (2 + \sqrt{3})^2 \simeq 13.93$
    【粒子 3 が bounce を経てから無限遠に到達】

  Schnittman (2014), Leiderschneider & Piran (2015), Harada, Ogasawara & Miyamoto (2016)
- 数値シミュレーションによると $(2 + \sqrt{3})^2 \simeq 13.93$ が一般的な上限であるらしい。 Schnittman (2018)
- 粒子 1,2 が任意なら上限なし。 Berti, Brito & Cardoso (2014)

高エネルギー衝突粒子の観測

- **ダークマター粒子の対消滅**
  質量 m のダークマター粒子同士が $E_{\rm cm} > E_{\rm th}$ で衝突すると対消滅して 2 つの光子になるとする。

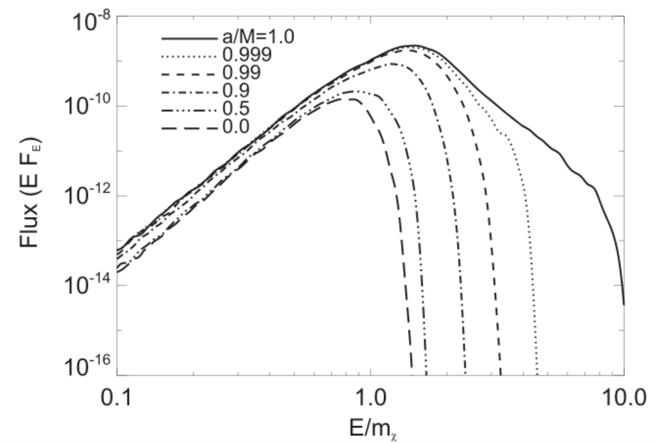




Schnittman, ApJ **806**, 264 (2015). $a = M$, $E_{\rm th} = 3m$。

赤道面上で観測される像（左）とスペクトル（右）。$\eta_{\rm max} \simeq 6.37$

スペクトルのブラックホールスピン依存性



Schnittman, ApJ **806**, 264 (2015). **赤道面上で観測されるスペクトル。**

Outline

導入

Kerr ブラックホール

Penrose 過程

粒子加速と衝突 Penrose 過程

まとめ

まとめ

- **回転ブラックホールには負エネルギー粒子状態がある。**
- Penrose **過程は粒子分裂によるエネルギー引き抜き。**
- **高速回転ブラックホールでは高エネルギー衝突** Penrose **過程により高効率のエネルギー引き抜きが可能。**
- **教科書・レビュー**

    - S. Chandrasekhar, "The Mathematical Theory of Black Holes", (Oxford University Press, 1983)
    - **原田知広・木村匡志**, **日本物理学会誌** 68(2) 102 (2013)
    - T. Harada and M. Kimura, CQG31 (2014) 243001 [arXiv:1409.7502]
    - J. D. Schnittman, GRG (2018) 6, 77 [arXiv:1910.02800]