

日本物理学会

2021年3月15日

オンライン・シンポジウム

ロジャー・ペンローズと相対論

時空の大域的構造と漸近構造

Global and Asymptotic Structure of Spacetime

近畿大学理工

石橋明浩

時空構造の理論研究

1915年

Einstein方程式

局所的手法

1963年

Kerr 解

Penrose図

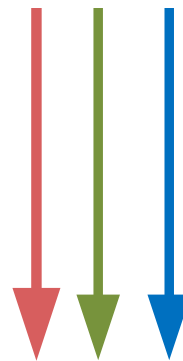
大域的手法

1965年

特異点定理

80年代

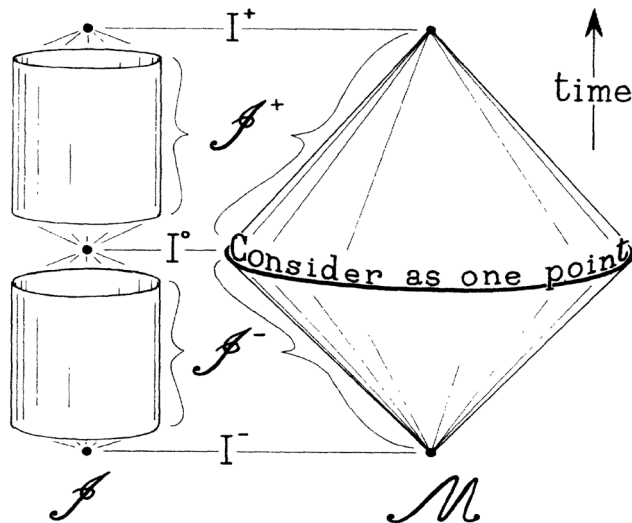
数値的手法



主要テーマ： 光円錐の大域的構造



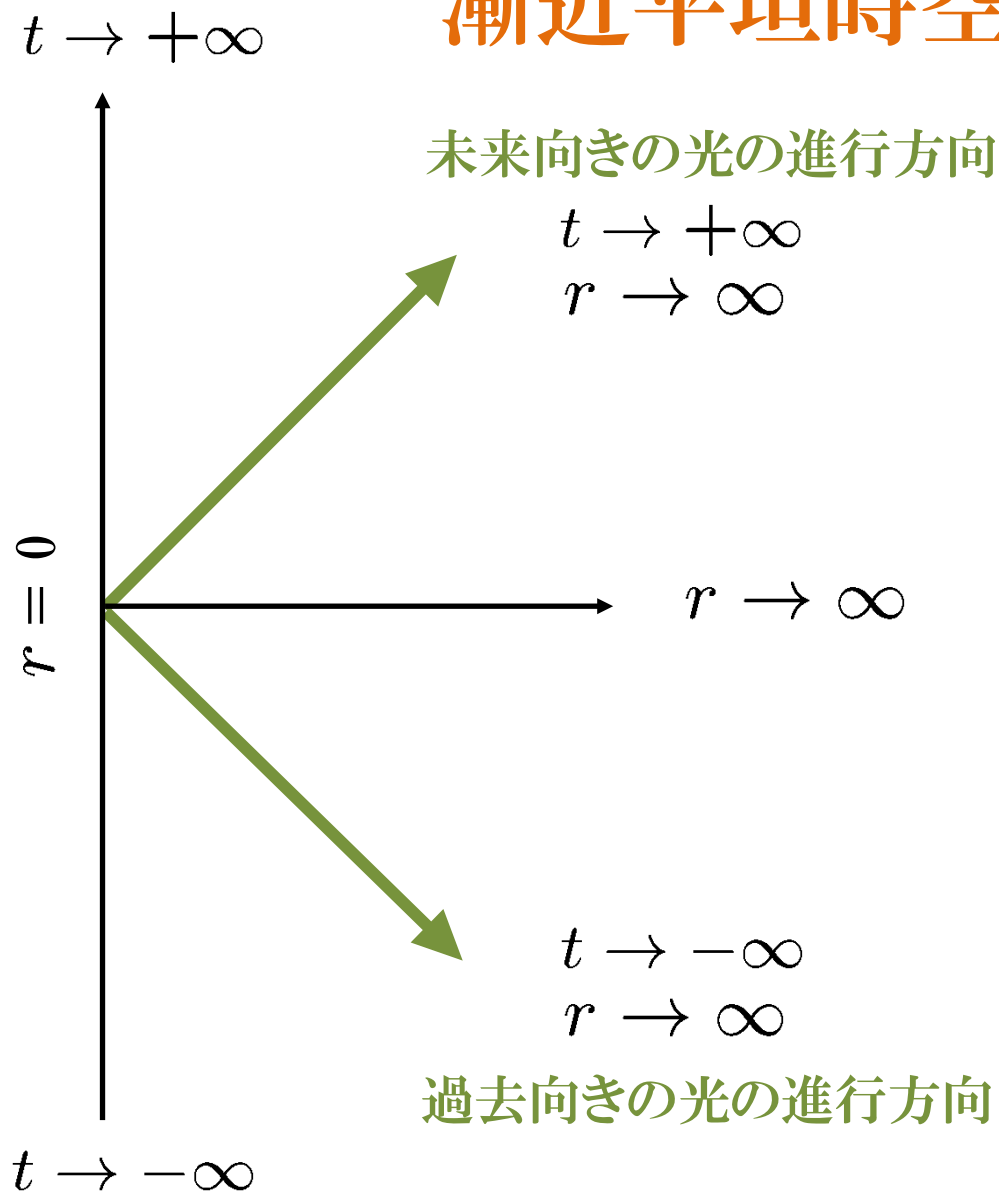
- 漸近平坦性の幾何学的定義
- 重力波の振舞いの共変的記述
- 曲率テンソルの漸近的振る舞い
- 重力孤立系の全エネルギー
- 光的超曲面と初期値問題
- 特異点定理
- ...



1. 共形無限遠とホライズン (ペンローズ図)
2. 漸近対称性と保存量
3. 特異点定理と時空のトポロジー

共形無限遠とホライズン

漸近平坦時空の共形図



無限に広がる時空 g_{ab} を
共形変換により因果律を
保ったままコンパクトに。

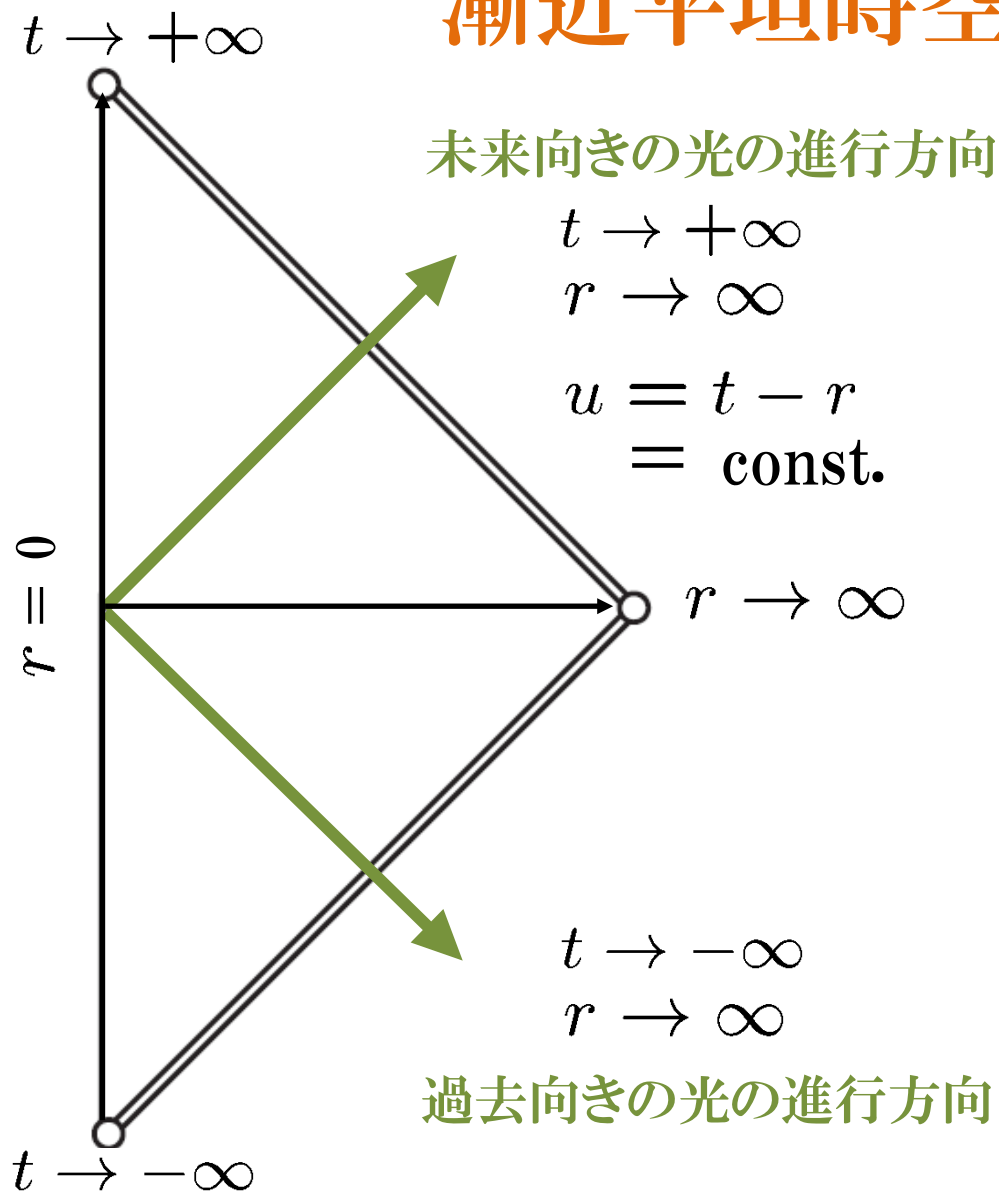
“無限遠方”を境界として扱う

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

$\tilde{g}_{ab}$: コンパクト化のために
導入した非物理的計量

Minkowski 時空の例

漸近平坦時空の共形図



Minkowski 時空の例

無限に広がる時空 g_{ab} を
 共形変換により因果律を
 保ったままコンパクトに。

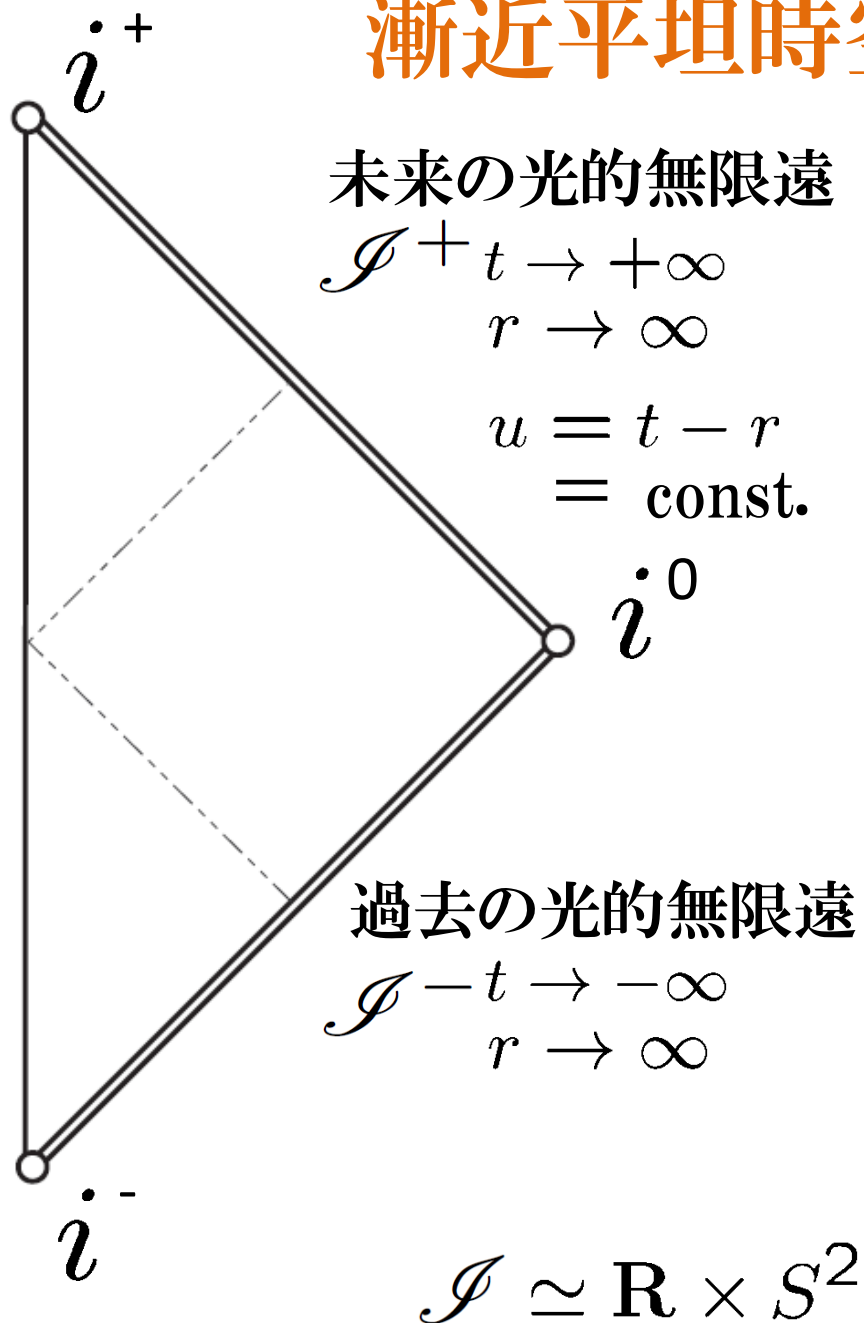
“無限遠方”を境界として扱う

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

$\tilde{g}_{ab}$: コンパクト化のために
 導入した非物理的計量

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \rightarrow 0 \quad \text{滑らか} \\ \tilde{\nabla}_a \Omega \neq 0 \\ \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \Omega \tilde{\nabla}_b \Omega = 0 \end{array} \right.$$

漸近平坦時空の共形図



無限に広がる時空 g_{ab} を
 共形変換により因果律を
 保ったままコンパクトに。

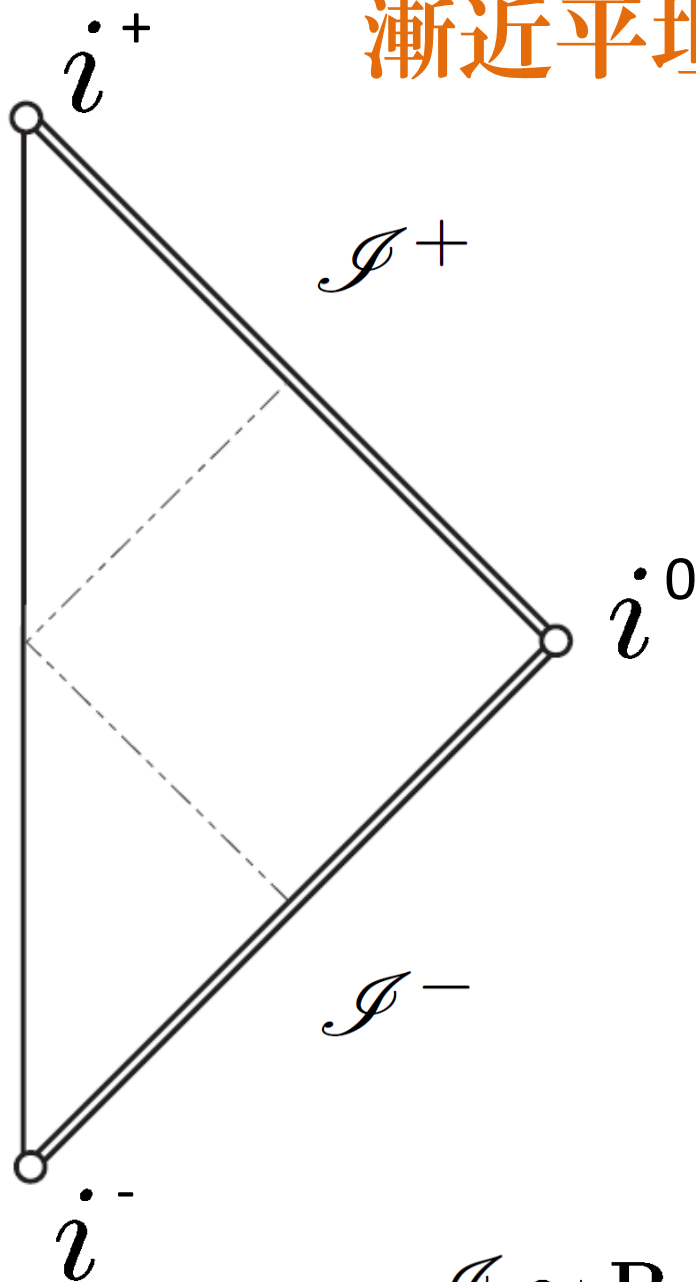
“無限遠方”を境界として扱う

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

於 光的無限遠 $\mathcal{I}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \rightarrow 0 \quad \text{滑らか} \\ \tilde{\nabla}_a \Omega \neq 0 \\ \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \Omega \tilde{\nabla}_b \Omega = 0 \end{array} \right.$$

漸近平坦時空の共形図



“In order to distinguish verbally between ... it is convenient to pronounce as “scri”
– a contraction of “script I” .

“Relativistic symmetry groups”
1972

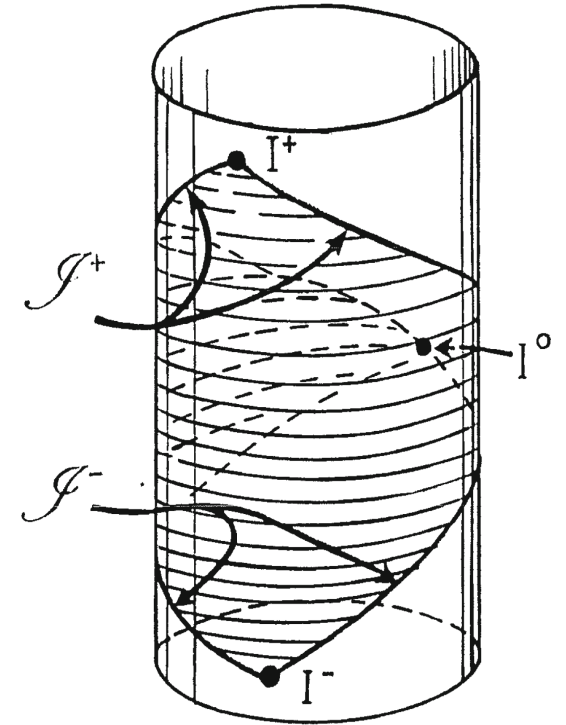
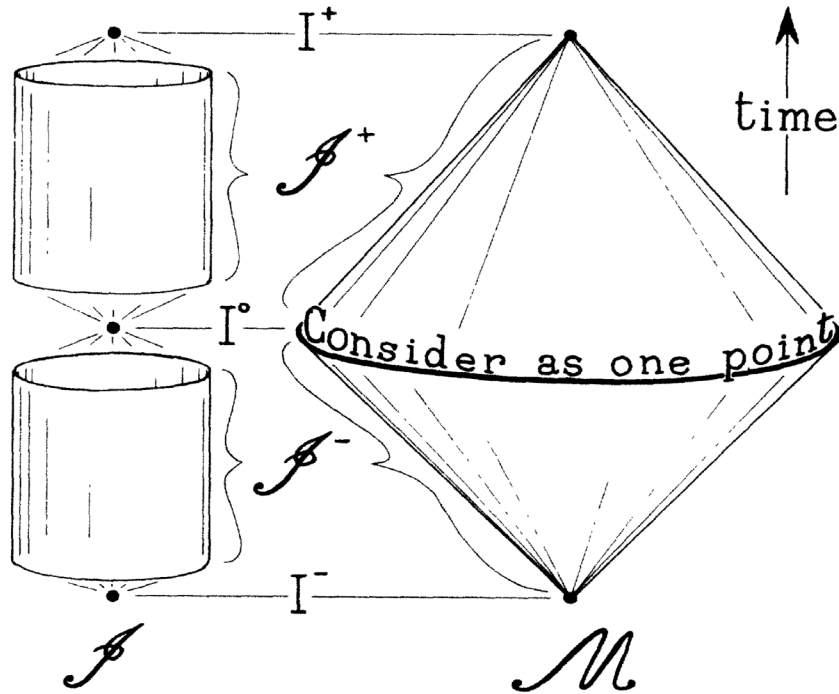
$$\mathcal{I} \simeq \mathbf{R} \times S^2$$

漸近平坦時空の共形図



平坦 (Minkowski) 時空の共形図

静的アインシュタイン時空への埋め込み



Phys. Rev. Lett. 1963

平坦 (Minkowski) 時空の共形図

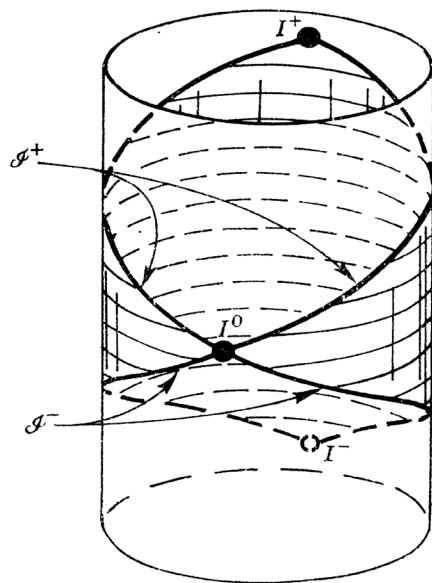


FIGURE 4

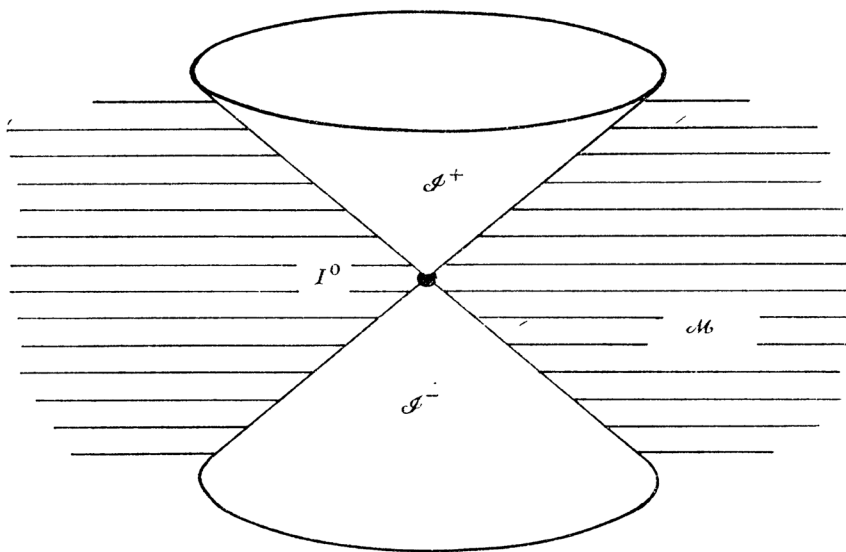
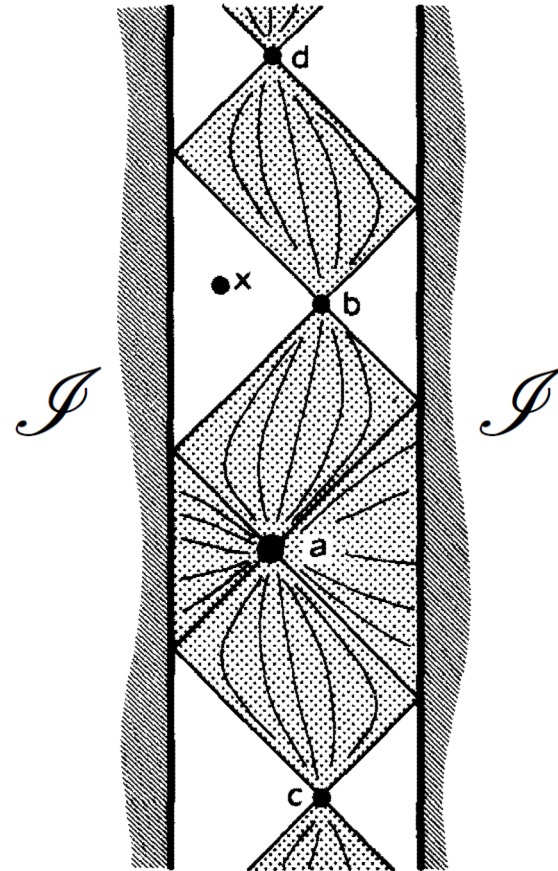
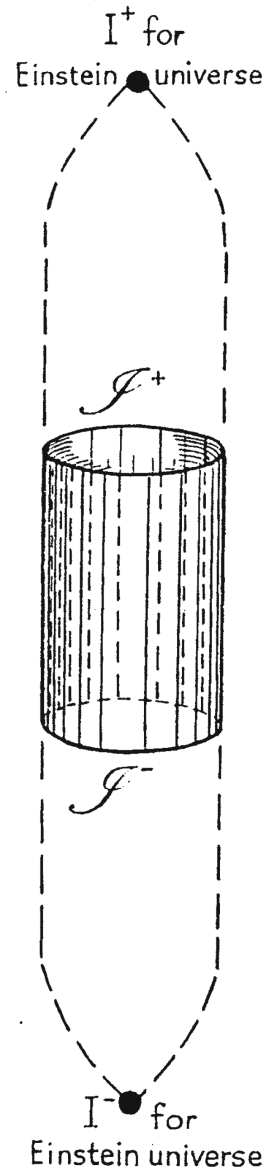


FIGURE 5

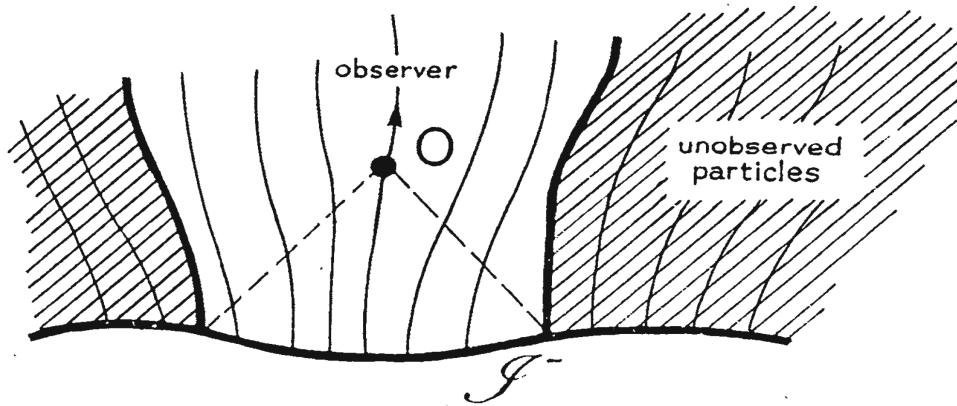
FIGURE 4. The cylinder represents the Einstein universe. The shaded region represents a part conformal to Minkowski space-time. (This time *two* space dimensions are suppressed in the diagram.)

FIGURE 5. The neighbourhood of I^0 . Physical space-time is represented by the shaded region.

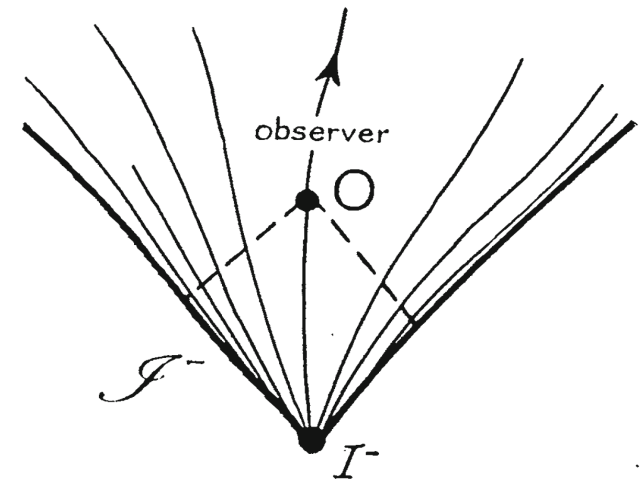
de Sitter、および anti-de Sitter (AdS) 時空の共形図



宇宙の地平面(particle horizon)



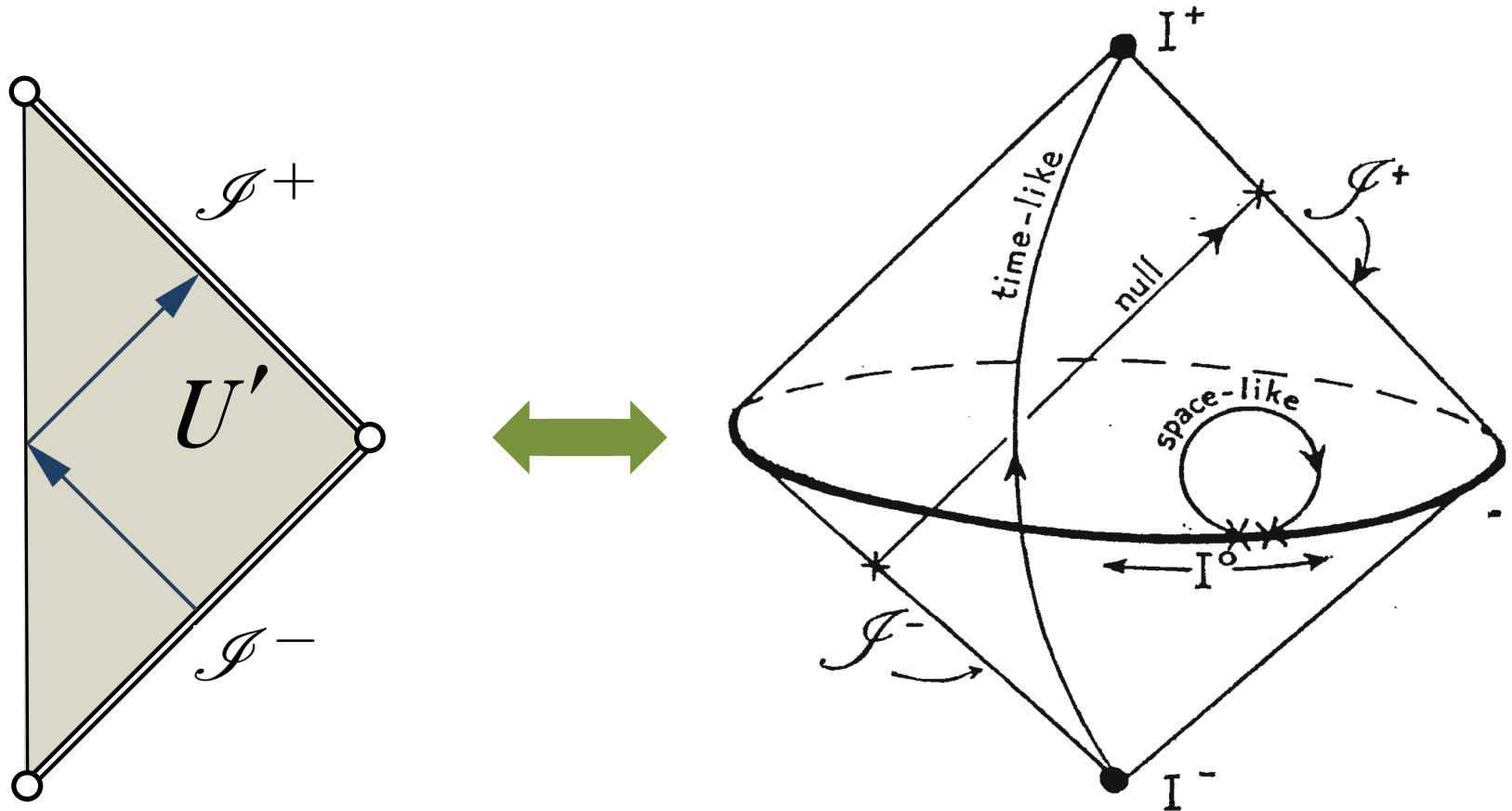
When $\mathcal{I}^-$ is space-like, a particle horizon occurs.



No particle horizon occurs if $\mathcal{I}^-$ is null

“Relativity, groups and topology” 1964

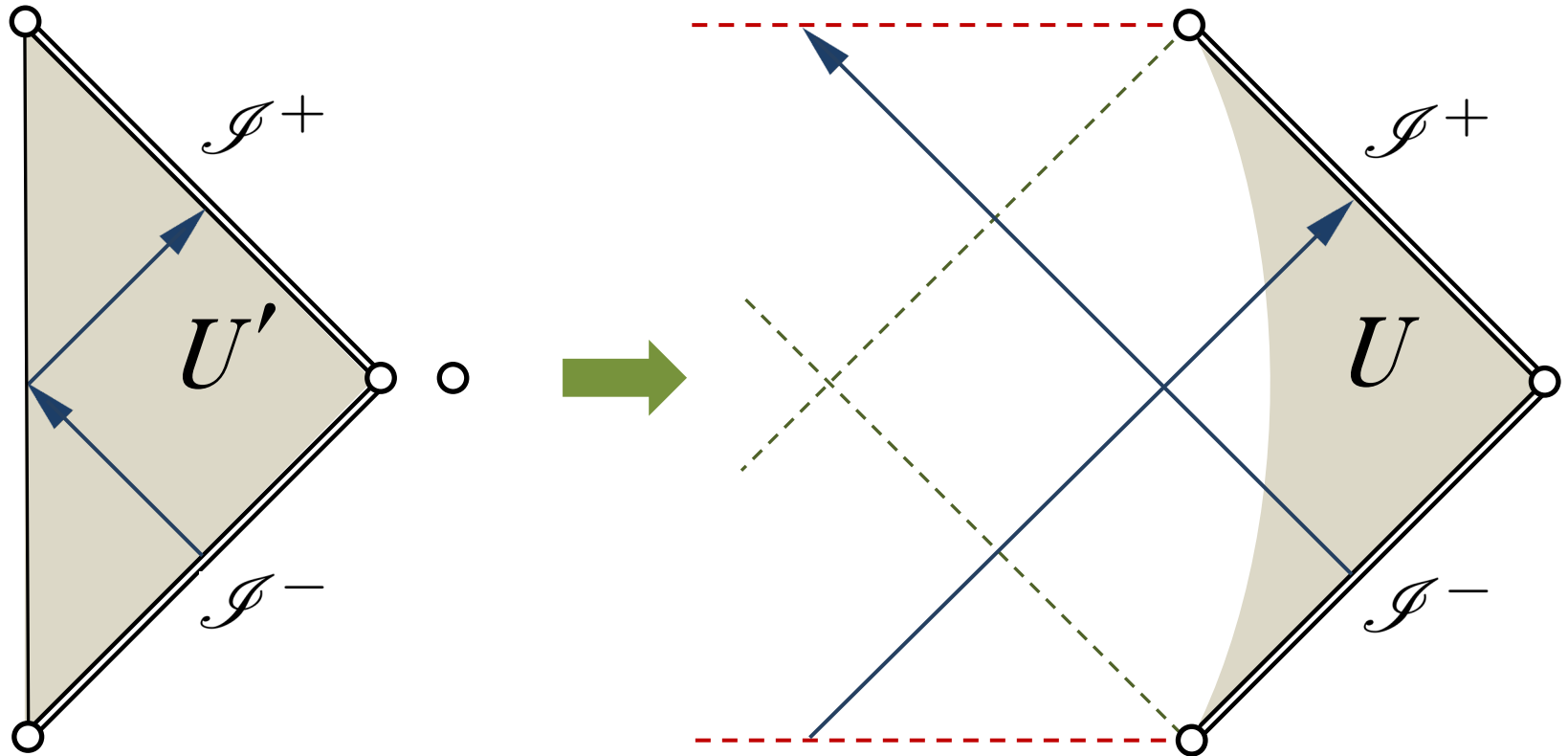
漸近単純時空 (真空)



全ての光的測地線が光的無限遠方に両端点を持つ

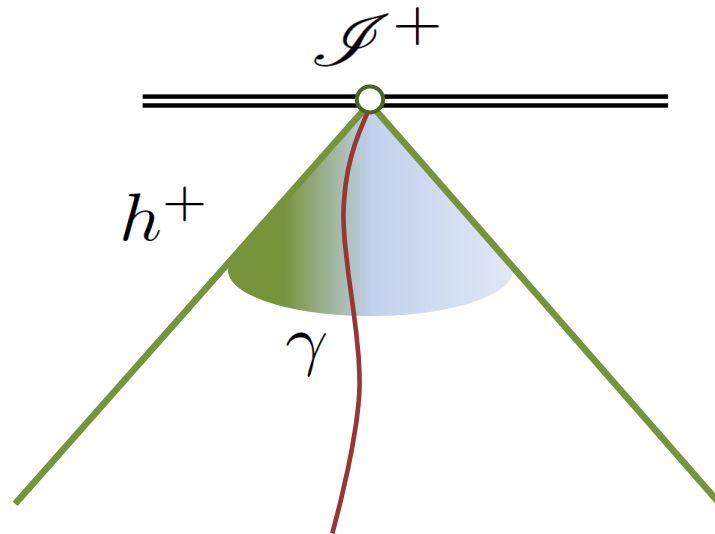
“Relativity, groups and topology” 1964

弱い漸近単純時空 (真空)



弱い漸近単純時空

観測者 γ に対する事象の地平面



$$h^+(\gamma) := \partial J^-(\gamma)$$

Battelle Rencontres 1967

$J^-(\gamma)$: γ の因果的過去領域

∂ : 境界

絶対的事象の地平面

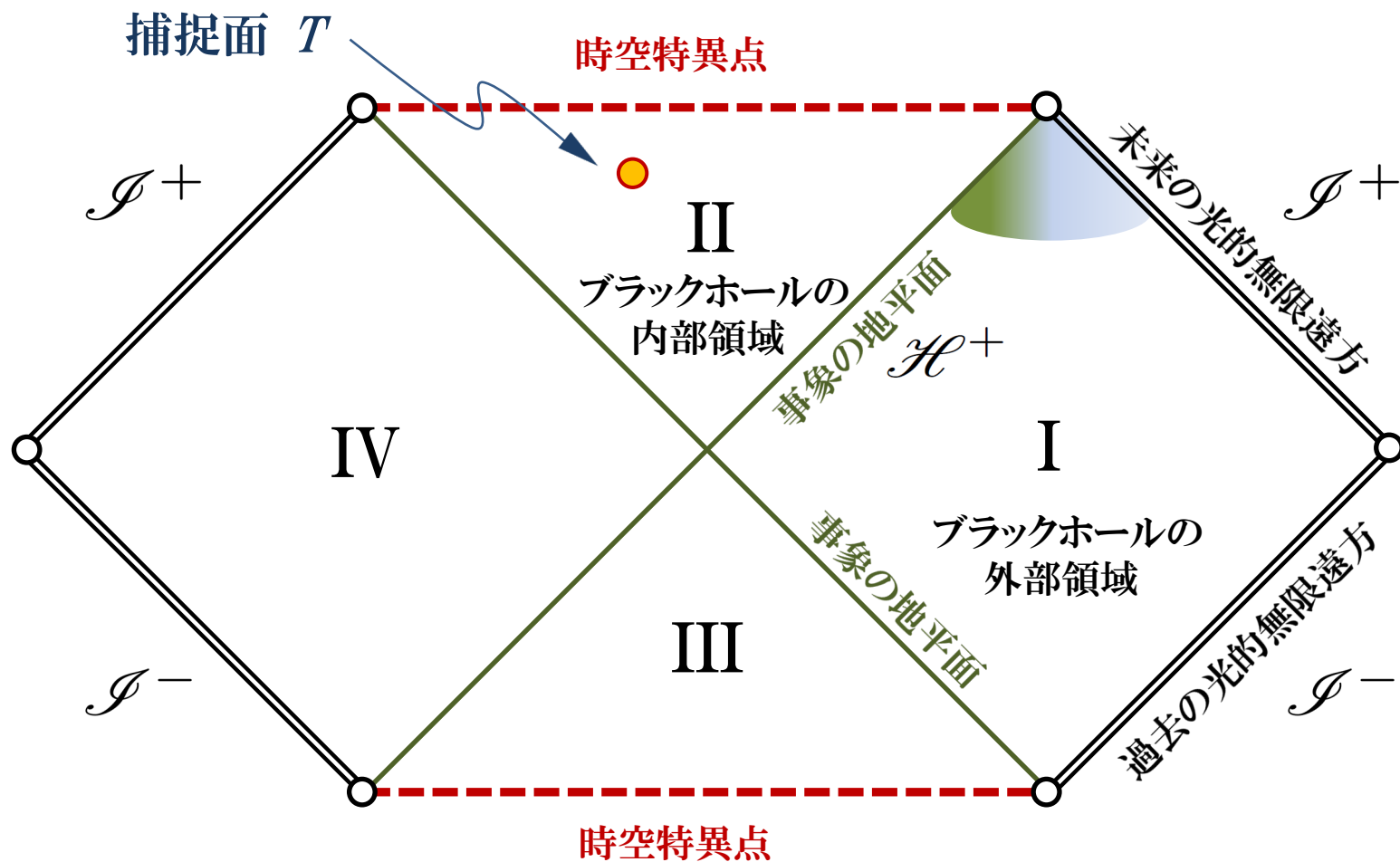


$$\mathcal{H}^+ := \partial J^-(\mathcal{I}^+)$$

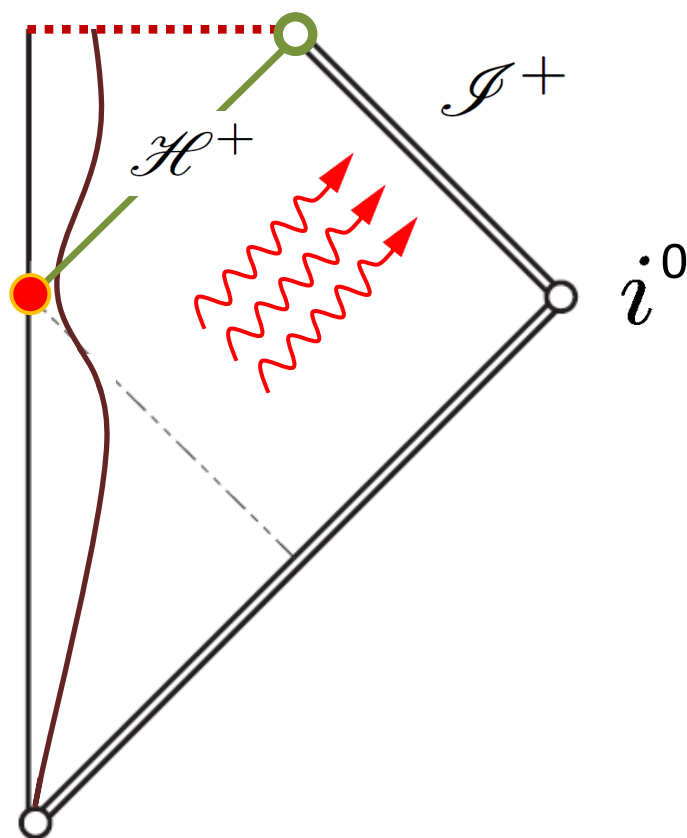
Riv. Nuovo Cimento 1969

「光でも逃れられない領域」
ブラックホールの大域的定義

Schwarzschild ブラックホール



例：重力崩壊する時空のPenrose図



ホライズン $\mathcal{H}^+$ の光的生成子は
過去の端点 ● は持ち得るが、
未来の端点 ○ は時空内には
持ち得ない。



大域構造と局所構造を
結びつける。

例：ブラックホールの面積則

S. W. Hawking
Phys. Rev. Lett. 1971

漸近対称性と保存量

漸近平坦時空と輻射

輻射

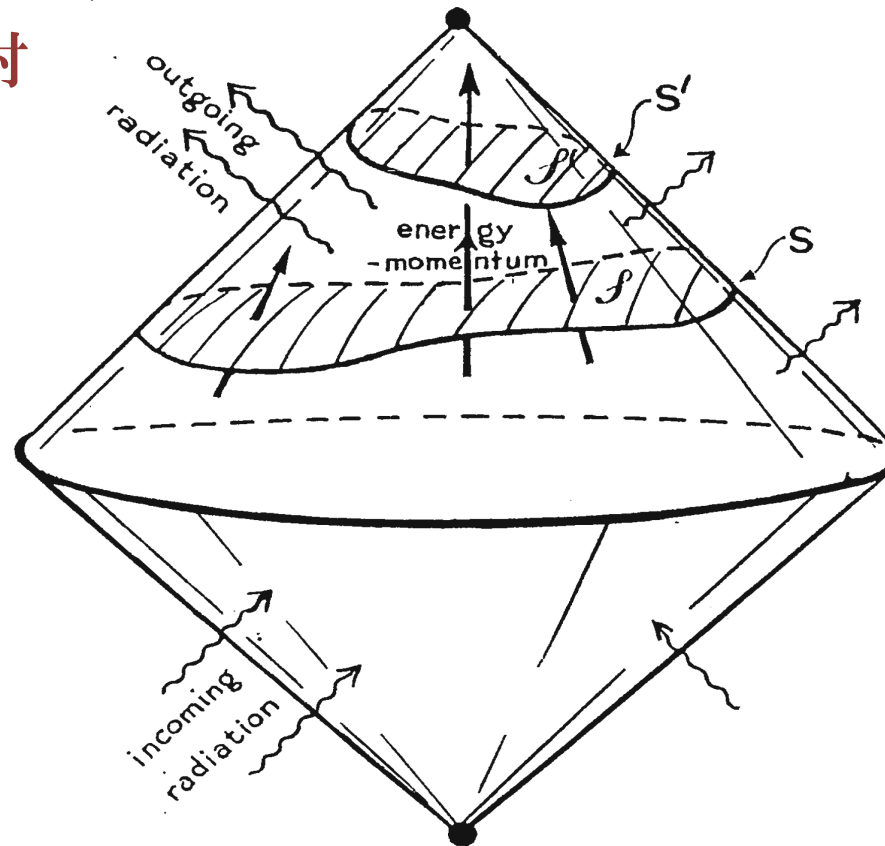
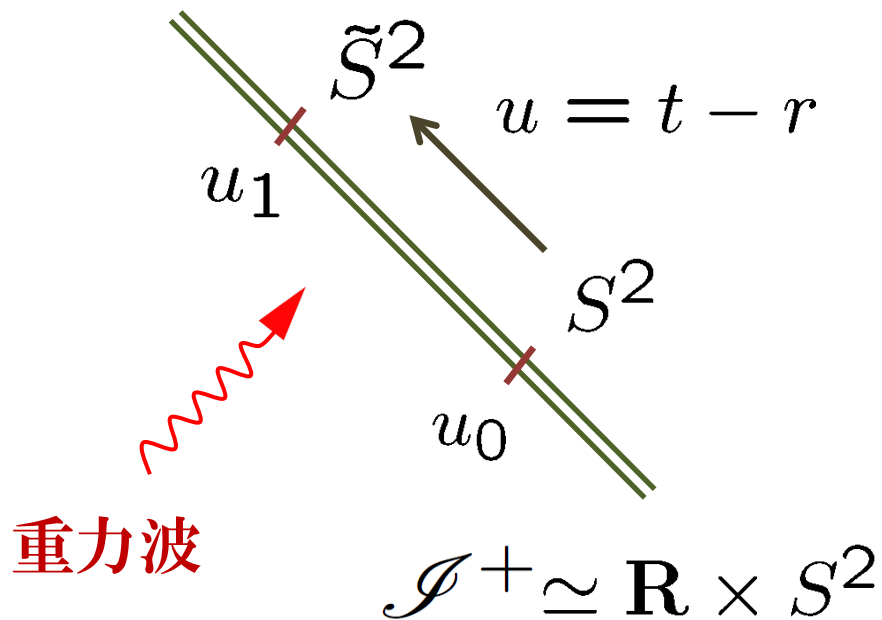
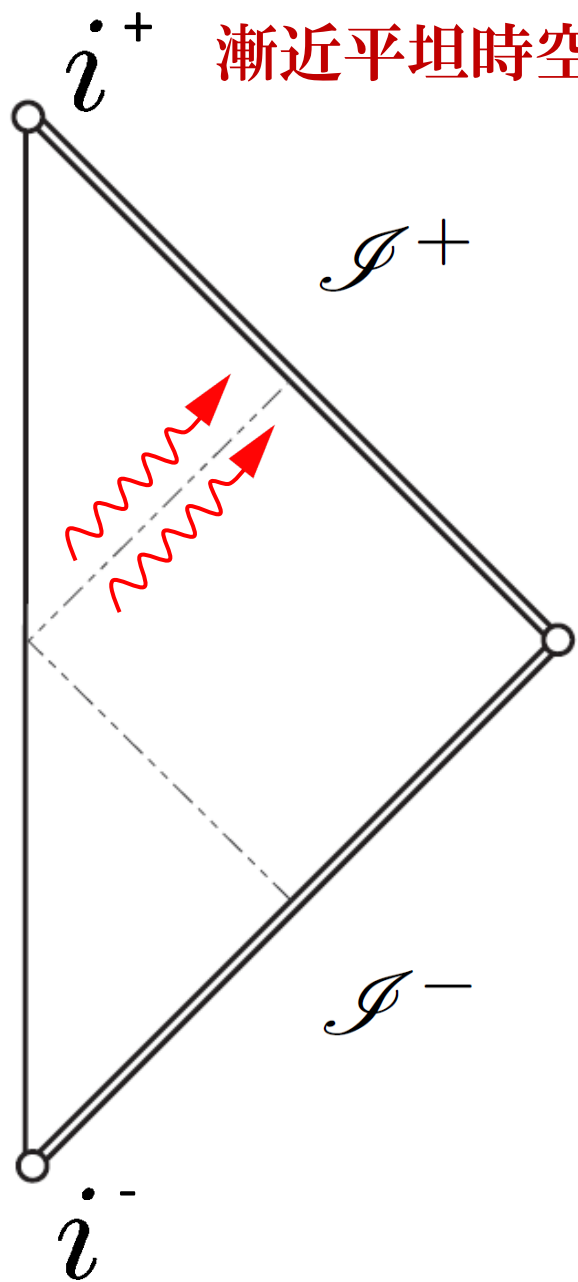


Fig. 5. The energy-momentum intercepted by $\mathcal{S}$ is measured by an integral over S . The corresponding integral over S' is less by an amount equal to the energy-momentum carried away by the radiation which escapes between S and S' .

R. Penrose
“Relativity, groups and
topology” 1964

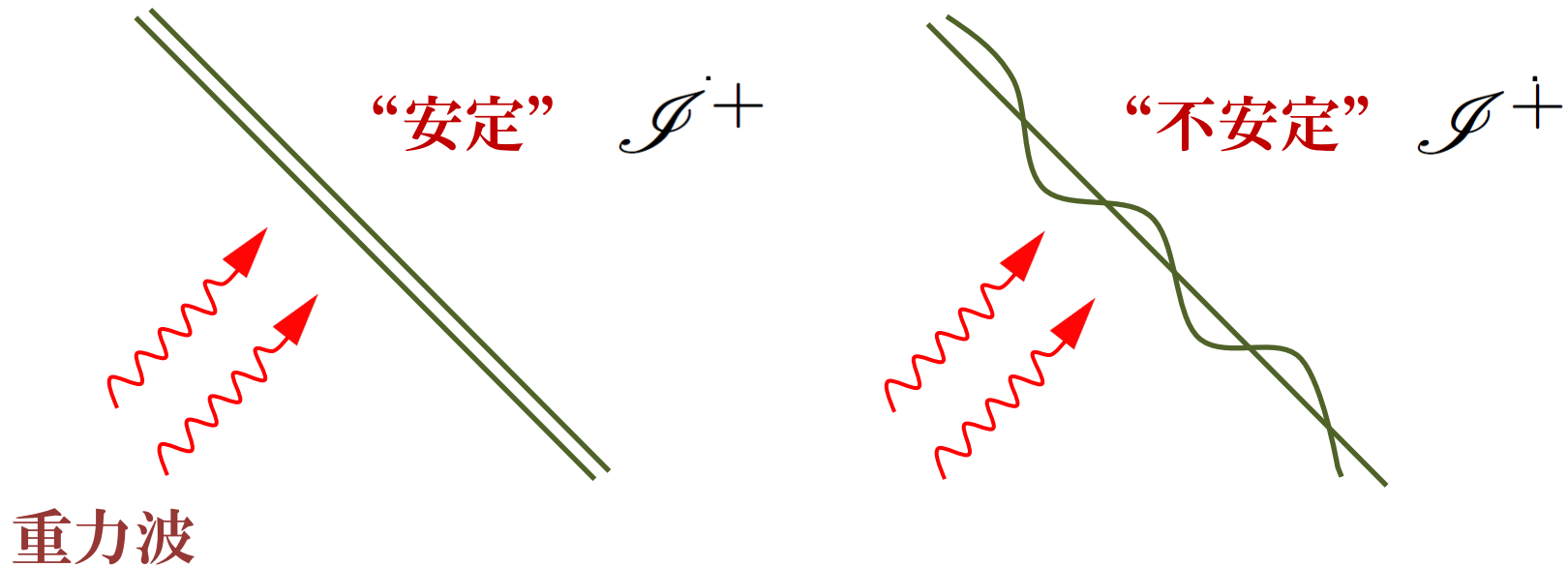
漸近平坦時空・重力波・漸近對稱性(BMS 對稱性)



$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$$

$$\Omega \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

光的無限遠 $\mathcal{I}^\pm$



境界条件: $\mathcal{I}^+$ は、輻射のもとでも正則かつ光的で安定であれ

$$\delta \tilde{g}_{ab} = \tilde{g}^{ab} \delta \tilde{g}_{ab} = O(\Omega) \quad \delta \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^a \Omega = O(\Omega^2)$$

$$\delta \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^a \Omega \tilde{\nabla}^b \Omega = O(\Omega^3)$$

BMS漸近対称性と整合

漸近平坦時空の漸近対称性 Asymptotic Symmetry

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$$

時空内部の対称性

Poincare 対称性

10 パラメーター

- 並進対称性

4

- ローレンツ変換

6

光的無限遠方での漸近対称性

BMS 対称性

無限次元の群

- Super translations

$$X = \underline{T(\theta, \phi)} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \dots$$

- $\mathcal{I}$ の光的生成子をその上へ移す

- 角度依存並進

- ローレンツ群

~ BMS/supertranslations

BMS 超並進(Supertranslations)

(角度依存を許す並進対称性)

生成子： $X^a = T(z)\tilde{\nabla}^a\Omega - \Omega\tilde{\nabla}^aT(z)$

$T(z)$ ： S^2 上の球面調和関数で $\ell \geq 2$ となるもの

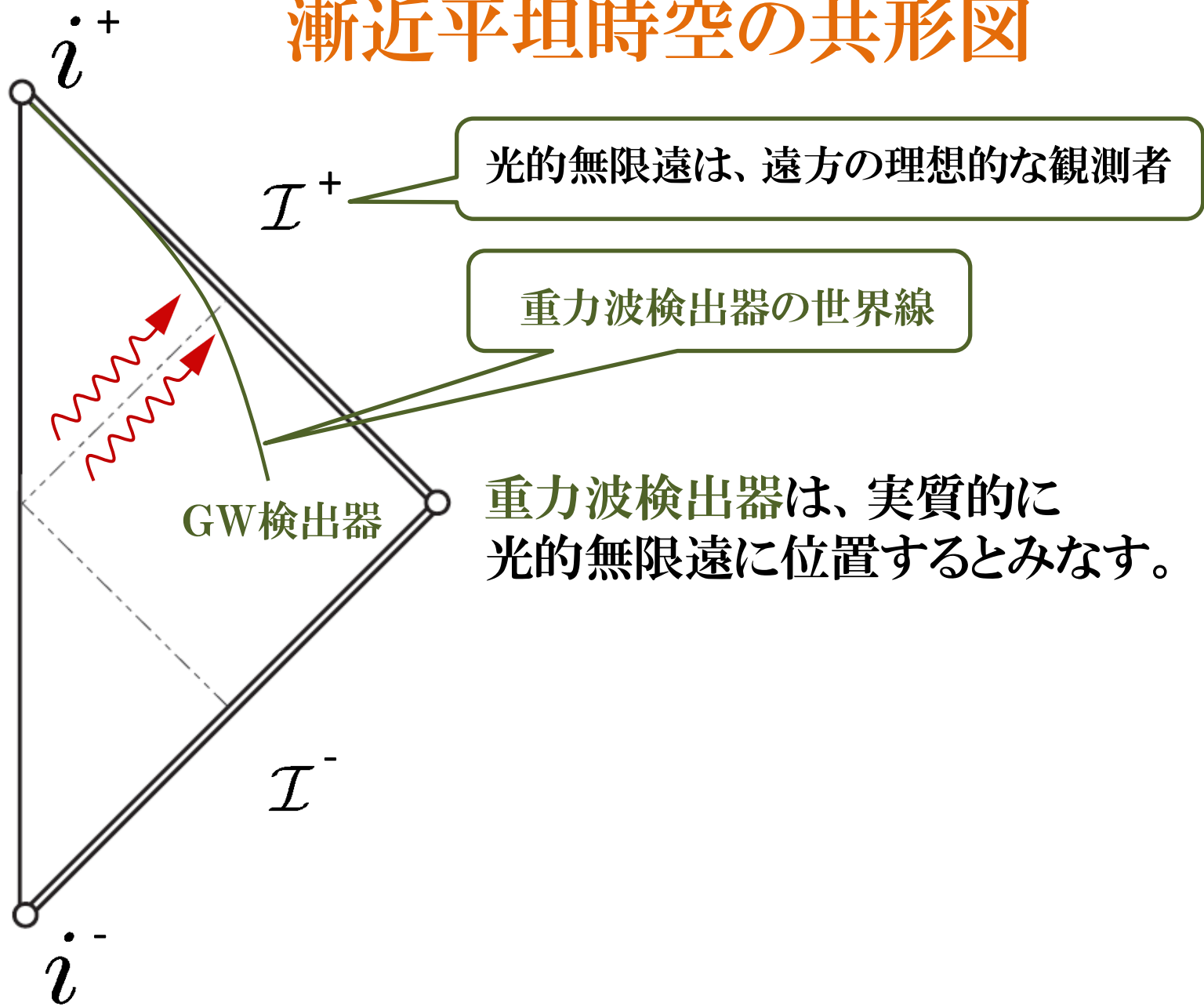
(c.f. $\ell = 0, 1 \Rightarrow \mathbf{X}$: 並進)

偏移テンソル： $\Delta_A{}^B = -\left(D_A D^B - \frac{1}{2}\delta_A{}^B D^C D_C\right)T(z)$

偏移： $\Delta D^B = \frac{1}{r}\Delta_A{}^B D^A$

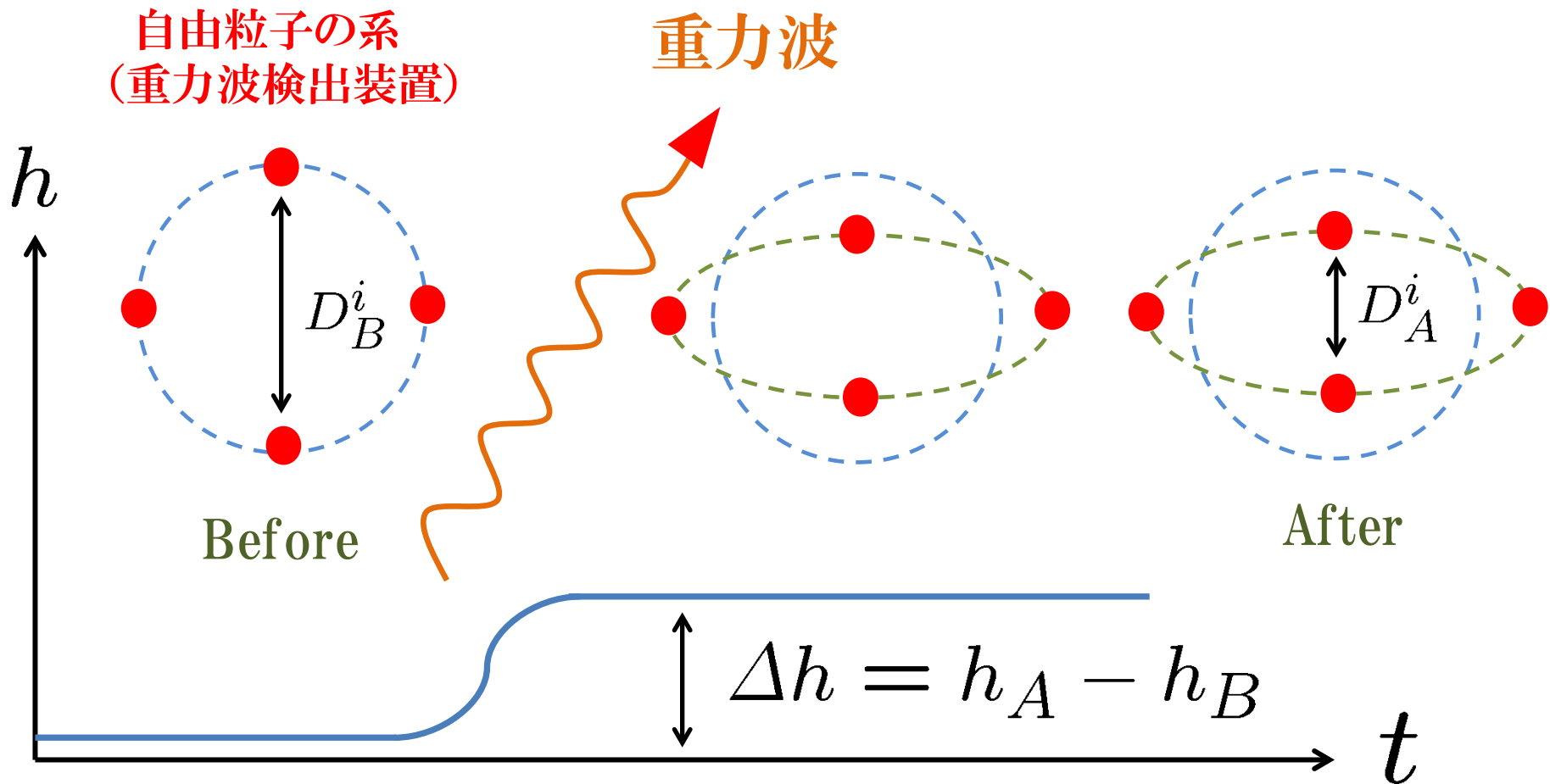
$T(z)$ は、メモリー効果の“ポテンシャル”

漸近平坦時空の共形図

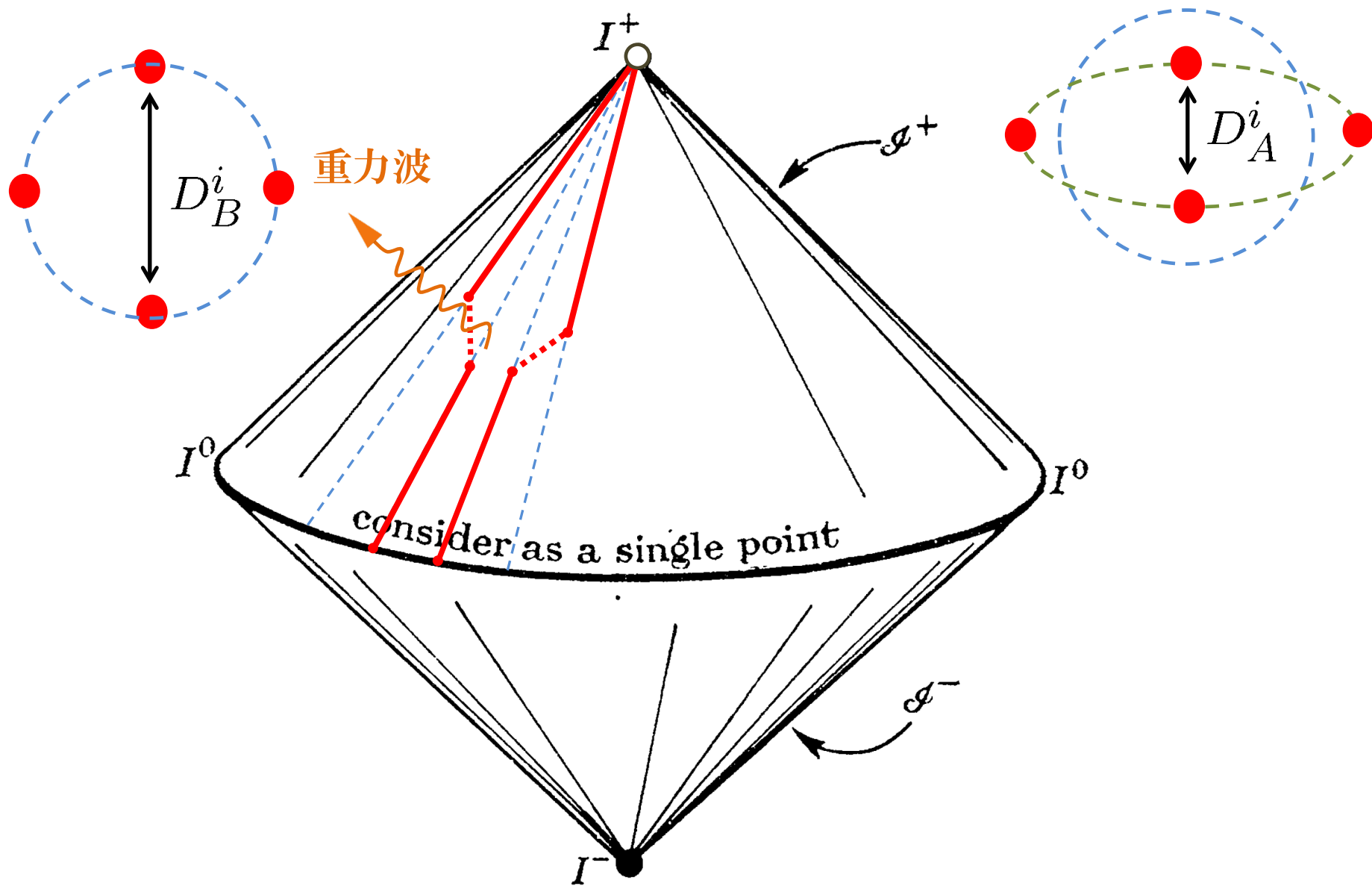


メモリー効果

輻射バーストの通過に伴う自由粒子系の配置変化が元に戻らずいつまでも残る現象



$$\Delta D^B = \frac{1}{r} \Delta_A{}^B D^A$$



BMS 超並進(Supertranslations)

(角度依存を許す並進対称性)

生成子： $X^a = T(z)\tilde{\nabla}^a\Omega - \Omega\tilde{\nabla}^aT(z)$

$T(z)$ ： S^2 上の球面調和関数で $\ell \geq 2$ となるもの

(c.f. $\ell = 0, 1 \Rightarrow \mathbf{X}$: 並進)

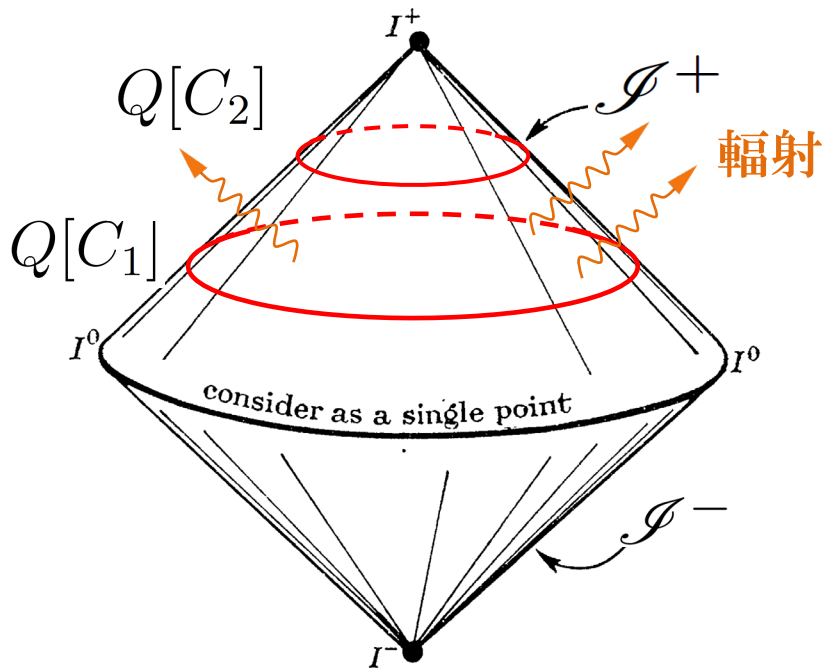
偏移テンソル： $\Delta_A{}^B = -\left(D_A D^B - \frac{1}{2}\delta_A{}^B D^C D_C\right)T(z)$

偏移： $\Delta D^B = \frac{1}{r}\Delta_A{}^B D^A$

$T(z)$ は、メモリー効果の“ポテンシャル”

BMS漸近対称性に対する保存電荷Qと保存則

(1) $\mathcal{I}^+$ の断面でのエネルギー

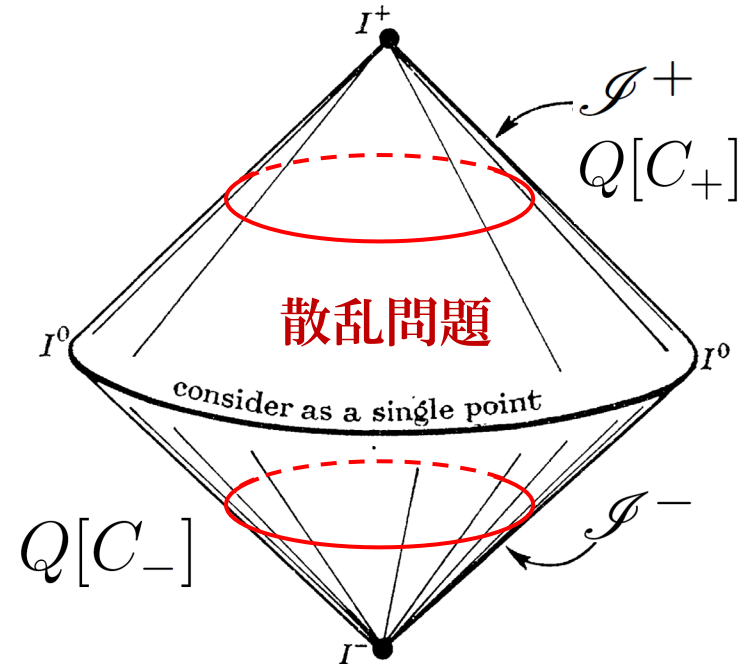


$$Q[C_2] - Q[C_1] = \mathcal{F}$$

Ashtekar-Streubel 81

Wald-Zoupas 00

(2) $\mathcal{I}^-$ と $\mathcal{I}^+$ でのエネルギー保存

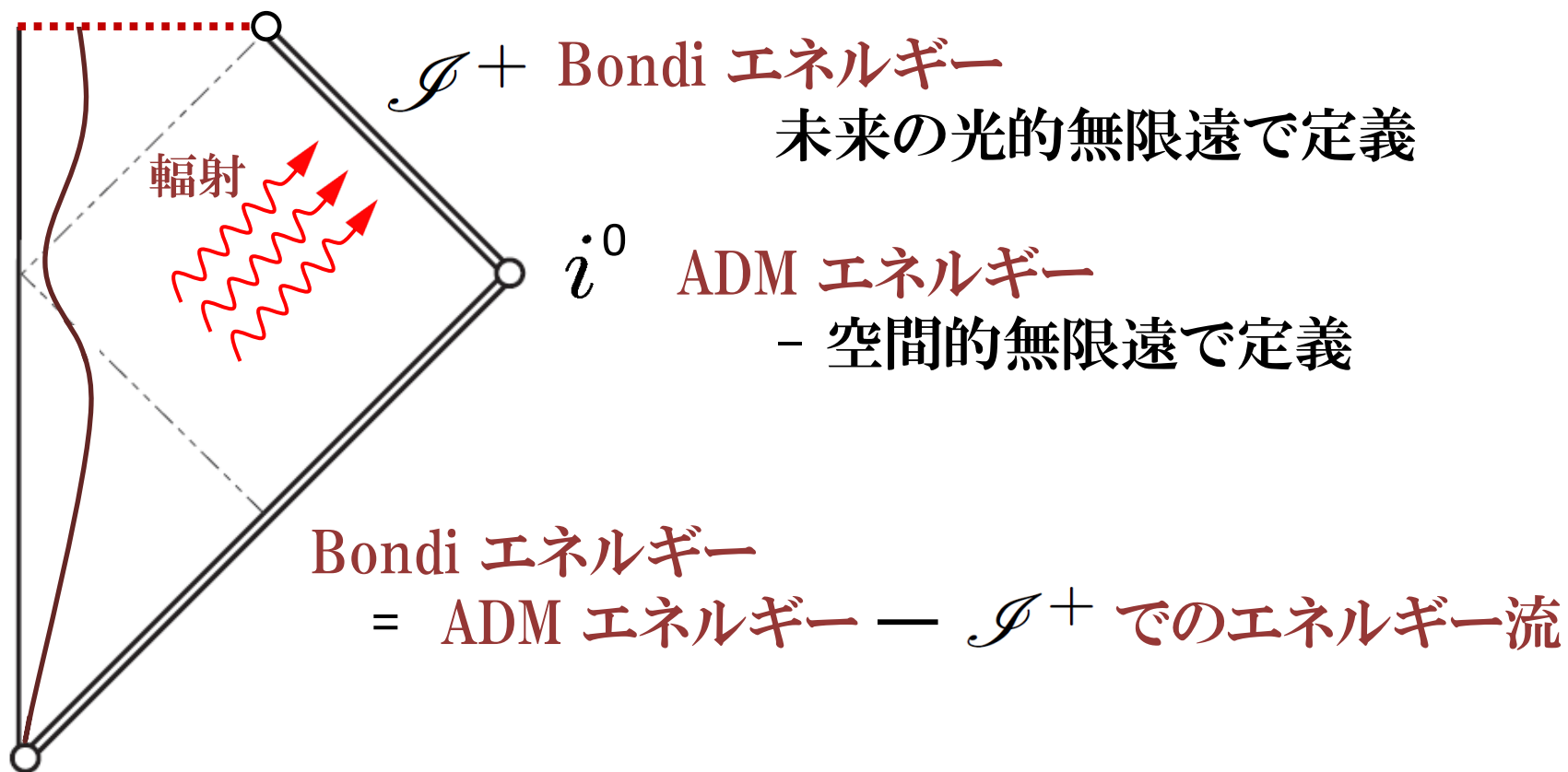


$$Q[C_+ \rightarrow i^0] = Q[C_- \rightarrow i^0]$$

Ashtekar-
Magnon-Ashtekar 79

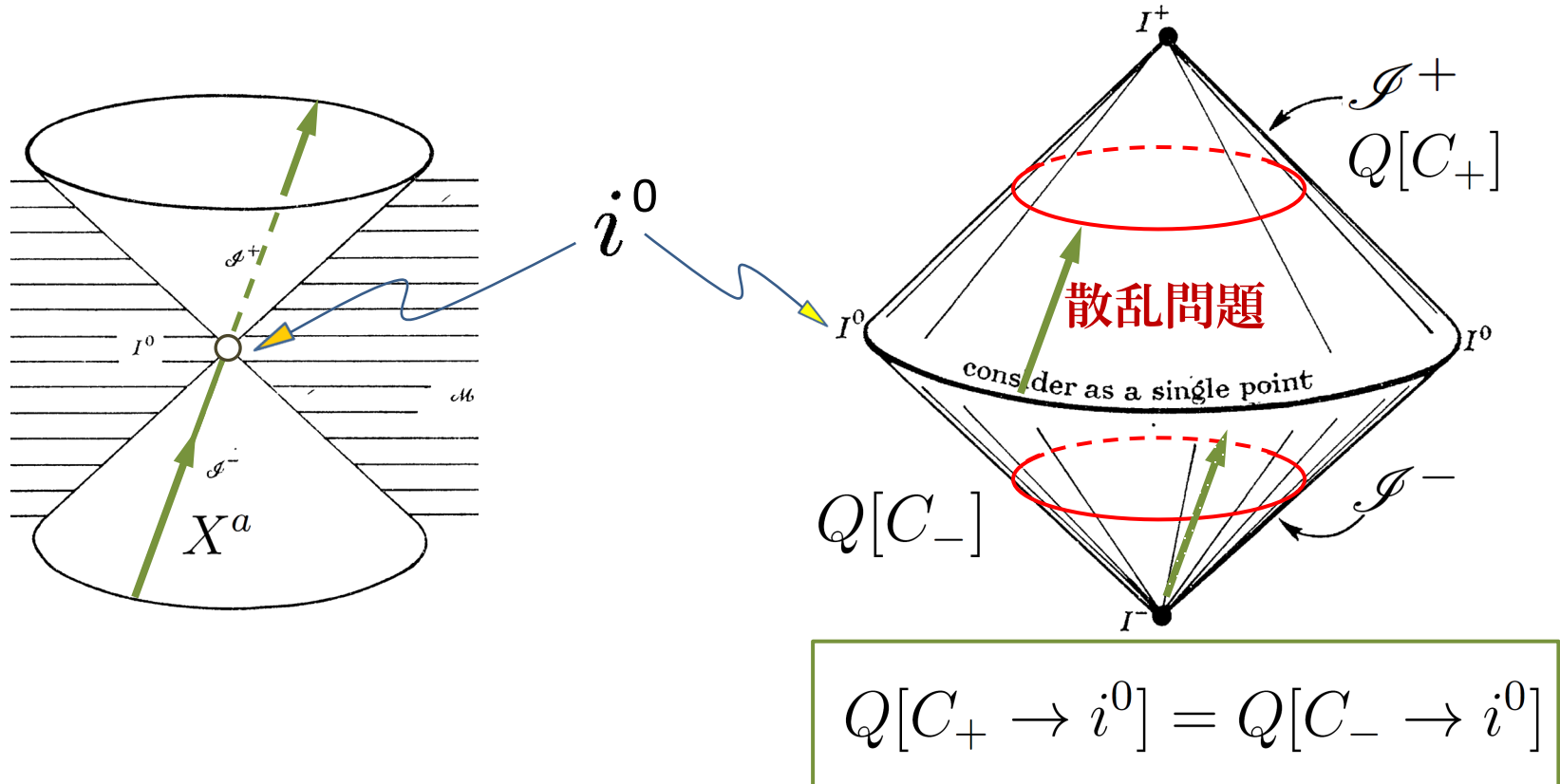
Strominger 14

(1) $\mathcal{I}^+$ の断面でのエネルギー



BMS漸近対称性に対する保存電荷Qと保存則

(2) $\mathcal{I}^-$ と $\mathcal{I}^+$ でのエネルギー保存



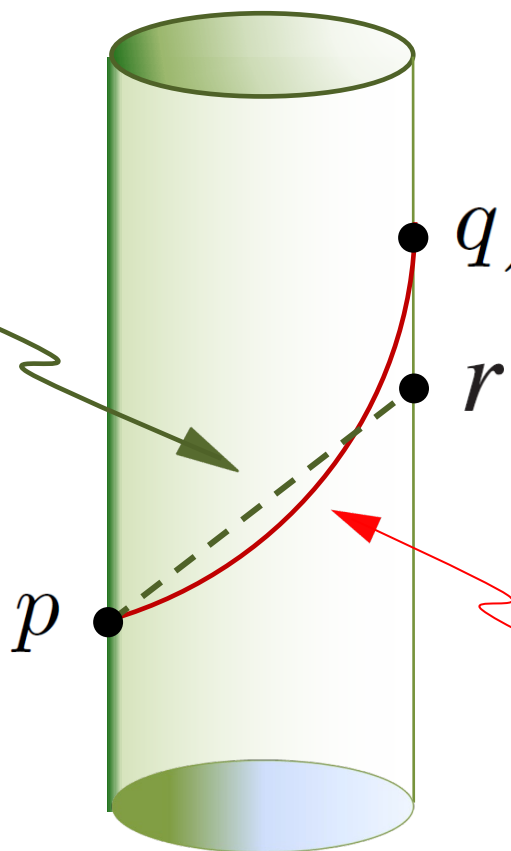
Ashtekar-
Magnon-Ashtekar 79
Strominger 14

Well-posed AdS/CFT の基本要請

AdSバルク内部
の因果的曲線

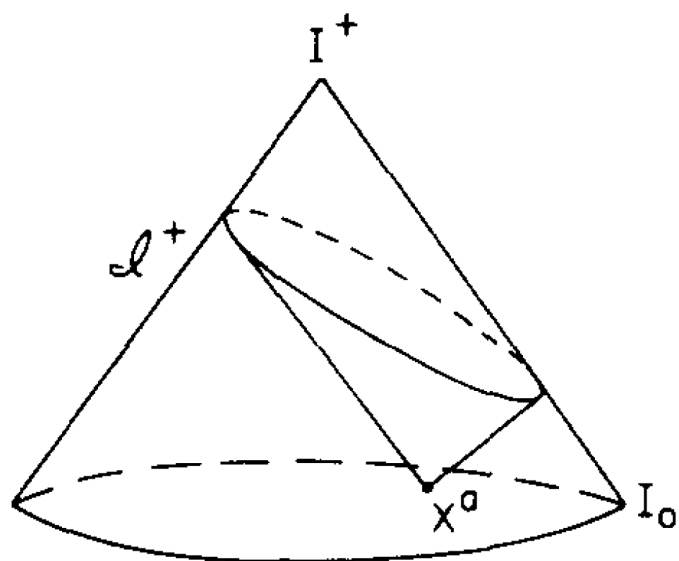


Gao-Wald 00

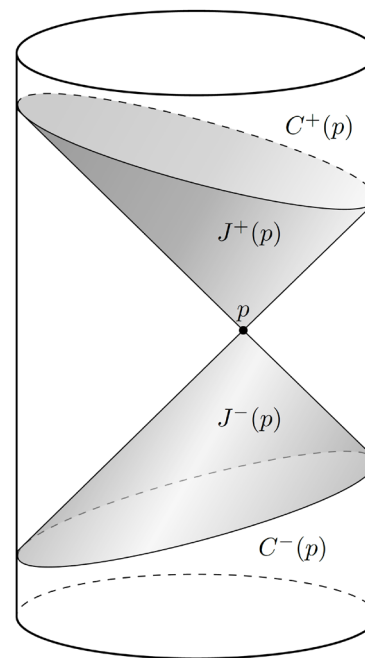


共形境界上の
非時間的光的測地線
(Achronal null geodesic)

共形無限遠(境界)から時空内部(バルク)の記述 双対性の試み



Kozameh-Newman 83



Engelhardt-Horowitz 16

特異点定理と時空のトポロジー

Penrose 1965

- 非コンパクトなCauchy面が存在.
- 閉じた捕捉面が存在.
- 光的エネルギー(収束)条件: $R_{ab}k^ak^b \geq 0$

➡ 完備でない光的測地線が存在.

Cauchy面が存在しない(Cauchy地平面が存在する)時空

- Reissner-Nordstromブラックホール
- Kerrブラックホール
- Bardeen型正則ブラックホール
- Hawking蒸発するブラックホール時空
- AdS時空
- ...

特異点定理の改良の多くは、Cauchy面の存在(大域的双曲性)の仮定を緩める方向への修正.

Borde 97

- 捕捉集合
- 光的エネルギー(収束)条件
- 光的測地線の完備性



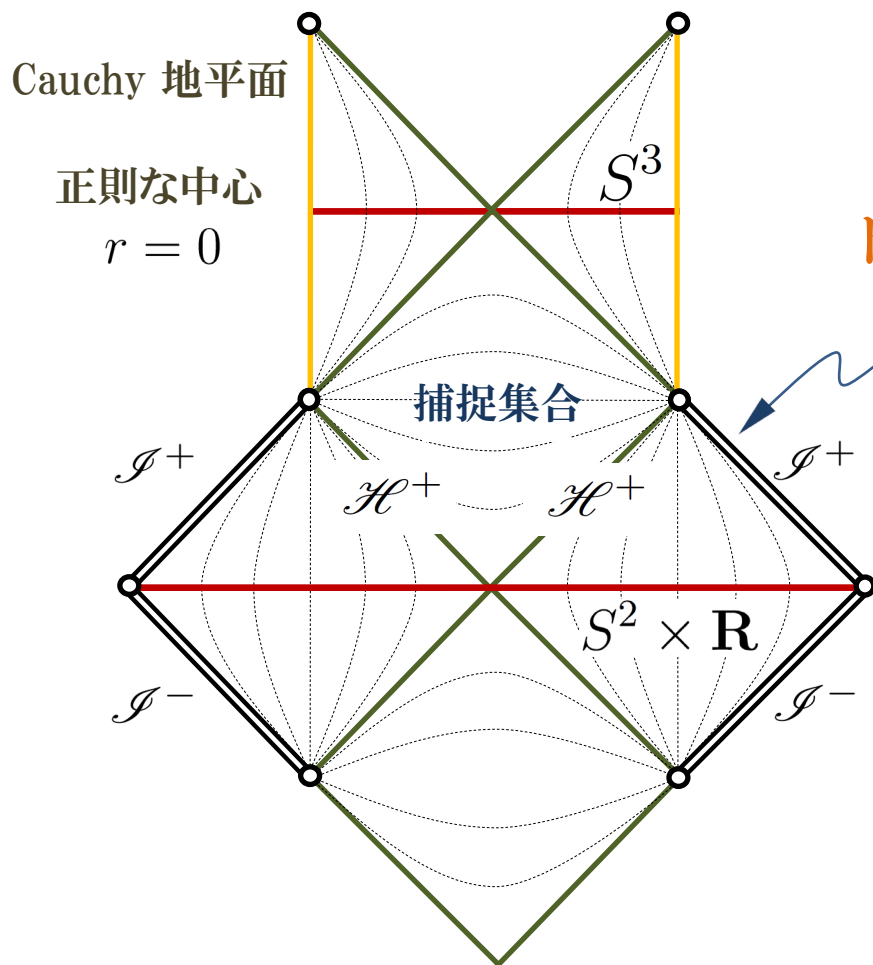
コンパクトな時間一定面の存在

Minguzzi 20

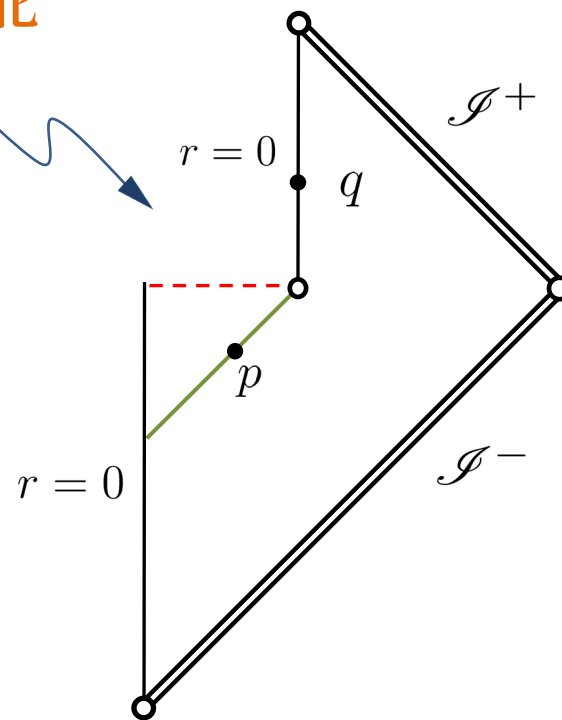
- 過去向きの因果対称
- 非コンパクト準Cauchy面
- 捕捉集合 $\cap$ 因果律の破れ $\neq \emptyset$
- 光的エネルギー(収束)条件



不完備な光的測地線、または
コンパクトな未来向き光円錐の存在



トポロジー変化



Penrose 1965

- 非コンパクトなCauchy面が存在.
- 閉じた捕捉面が存在.
- 光的エネルギー(収束)条件: $R_{ab}k^ak^b \geq 0$

➡ 完備でない光的測地線が存在.

Cauchy面が存在しない(Cauchy地平面が存在する)時空

- Reissner-Nordstromブラックホール
- Kerrブラックホール
- Bardeen型正則ブラックホール
- Hawking蒸発するブラックホール時空
- AdS時空
- ...

- Cauchy面 $\Rightarrow$ 非コンパクトな時間一定面
- 因果律の破れを含める(捕捉面上以外)

➡ トポロジーの変化(コンパクトな時間一定面)

時空構造の理論研究

1915年

Einstein方程式

局所的手法

1963年

Kerr 解

Penrose図

大域的手法

1965年

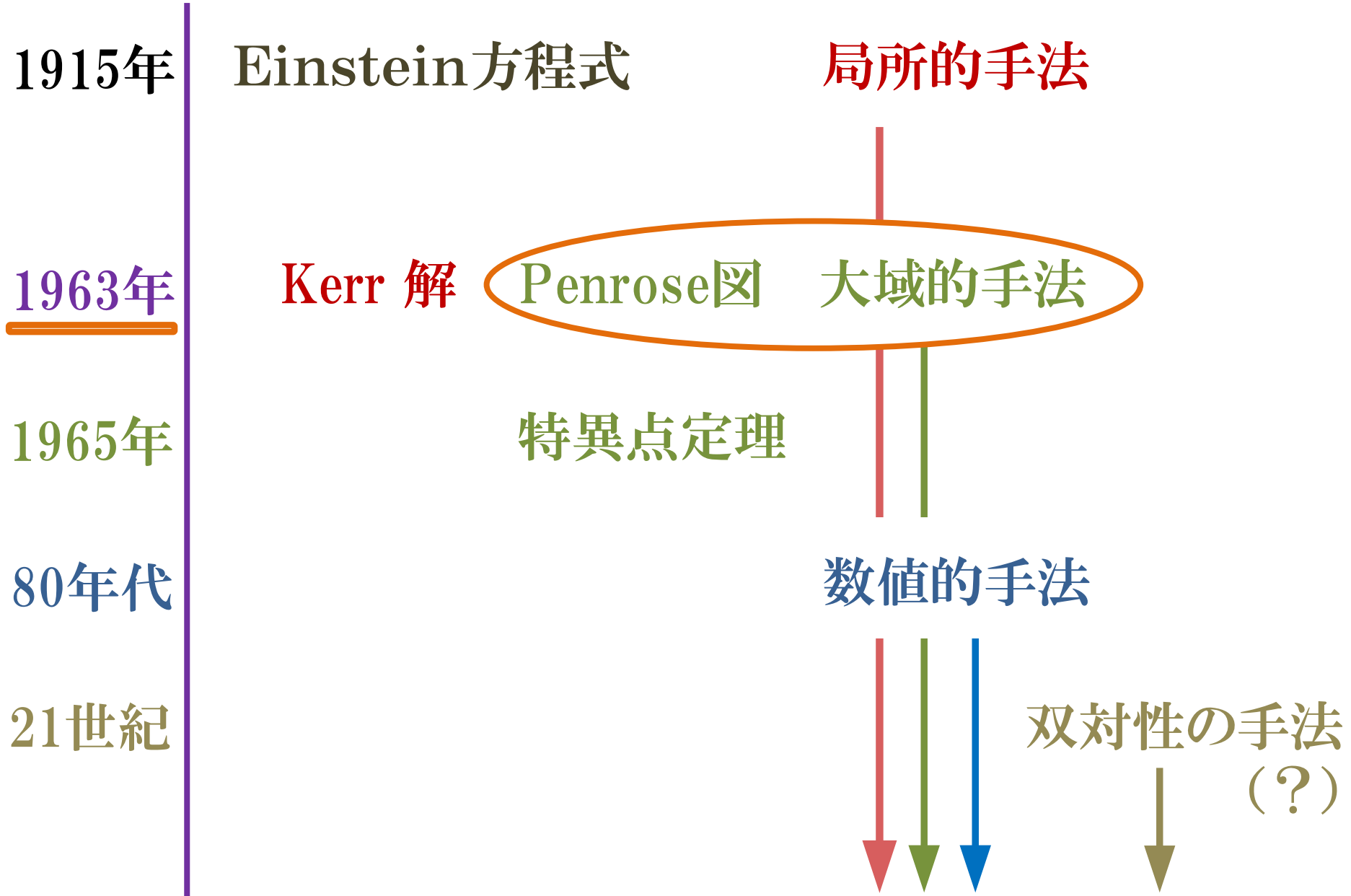
特異点定理

80年代

数値的手法

21世紀

双対性
の手法
(?)



まとめ: Penrose の視点

光的粒子、および電磁波・重力波の振舞い
因果境界 (ホライズン)・共形境界 (無限遠・特異点)

- 漸近平坦性の幾何学的定義
- 重力波の振舞いの共変的記述
- 曲率テンソルの漸近的振る舞い
- 重力孤立系の全エネルギー
- 光的超曲面と初期値問題
- 特異点定理
- ...

大域的構造

$\mathcal{I}^+$ $\mathcal{H}^+$...

局所的解析

測地線の振舞い 捕捉面 特異点 ...

大域的構造と局所的解析を結びつける。