

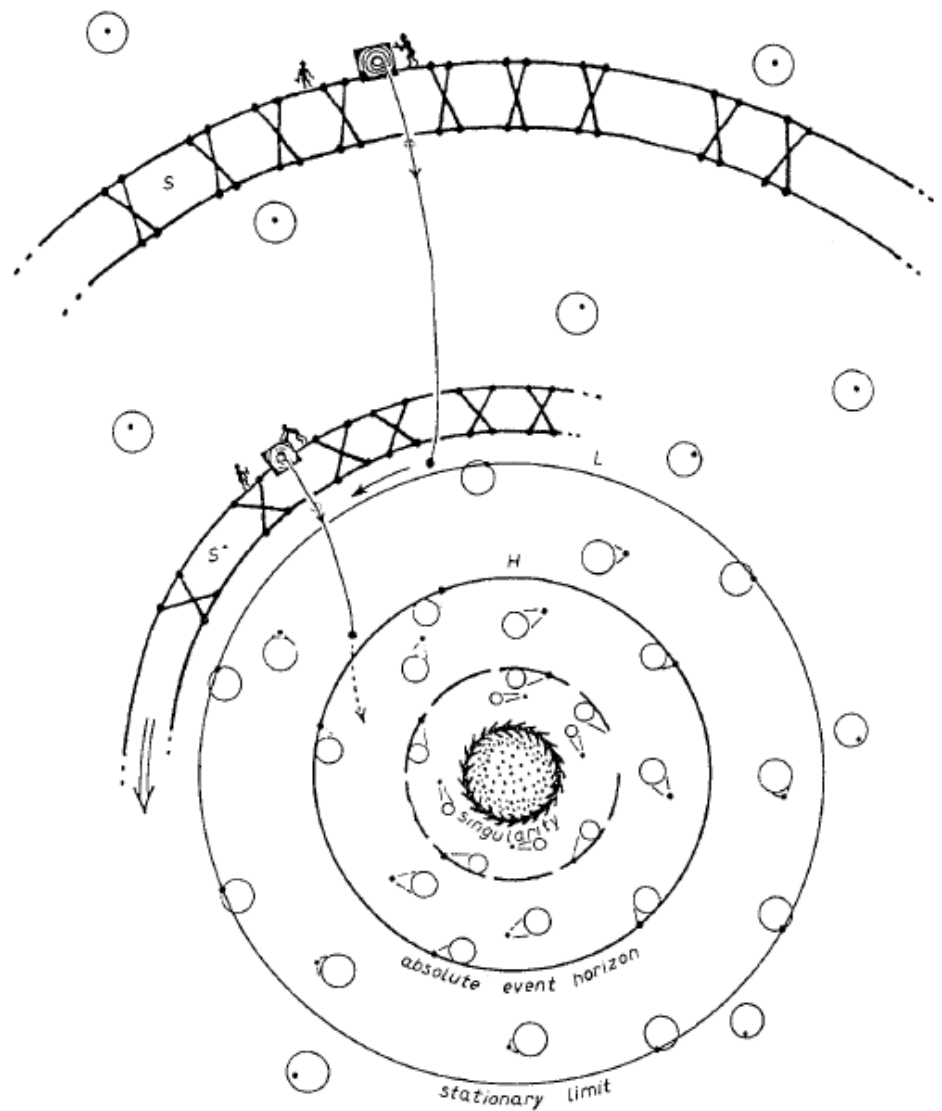
特異点定理

ー背景とインパクトー

京都大学基礎物理学研究所
小玉英雄

日本物理学会2021年春季大会
2021/3/15 @Zoom

時空特異点

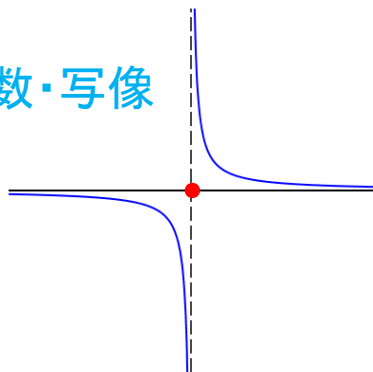


Penrose R: Riv. Nuovo Cimento 1, 252 (1969)

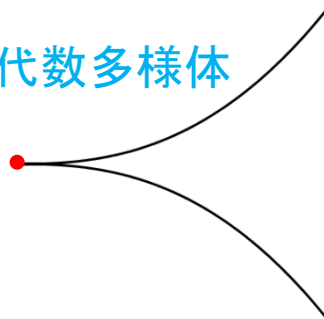
時空特異点とは？

数学では、通常、「特異点」は、様々な空間の特殊な点を指す

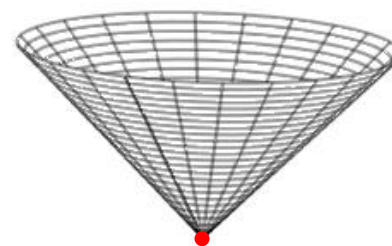
関数・写像



代数多様体



conifolds/orbifolds



これに対し、一般に、時空特異点は、「時空の点」ではない！

時空特異点

=

「到達可能な」時空の境界

一様宇宙の特異点

一様等方宇宙モデル

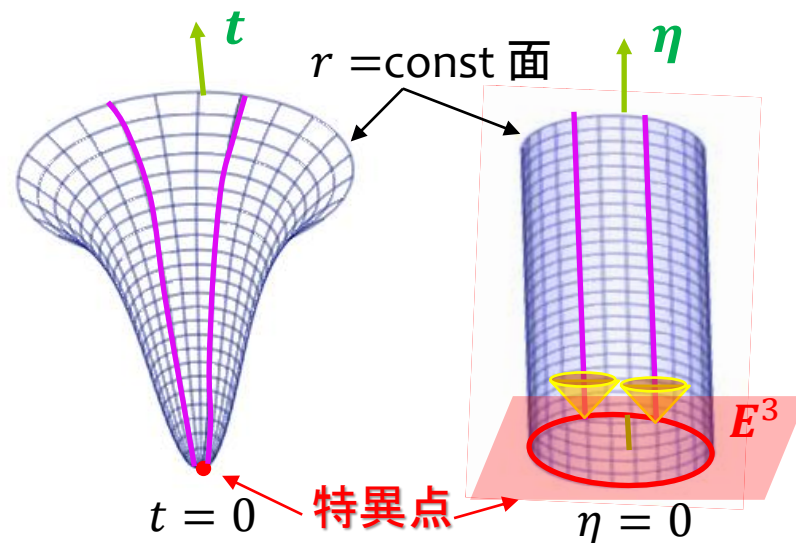
[Friedmann AA 1922, 1924; Robertson HP 1929]

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a(t)^2(dr^2 + r^2 d\sigma^2(S^2)) \\ &= a(t)^2(-d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\sigma^2(S^2)) \\ &\underset{\text{conf}}{\simeq} -d\eta^2 + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (d\eta = dt/a(t)) \end{aligned}$$

- 一様等方宇宙モデルでは、宇宙初期においてエネルギー密度 ρ と圧力 P が次の条件を満たせば、初期特異点が必ず存在:

$$\rho + 3P \geq 0 \Leftrightarrow \ddot{a} \leq 0$$

- 物質が存在すると、一様等方宇宙の初期特異点では、一般に、時空のRicci曲率・物質密度が発散



局在した特異点

Schwarzschild解

[Schwarzschild K 1916]

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad f(r) = 1 - \frac{r_h}{r}; \quad r_h = \frac{2GM}{c^2}$$

無限遠で重力がゼロとなるEinstein方程式の球対称真空解は一意的
[Birkhoff's theorem (1923)]



Schwarzschild解は、球対称な天体の外部の重力場を表す

Schwarzschild計量は、原点 $r = 0$ と球面 $r = r_h$ で特異.

しかし、Kretschmann不変量は $r = 0$ でのみ発散:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma} = 12 r_h^2 / r^6$$

Kruskal-Szekeres座標系

[Kruskal MD 1960; Szekeres G 1960]

$$|V/U| = e^{t/r_h}$$

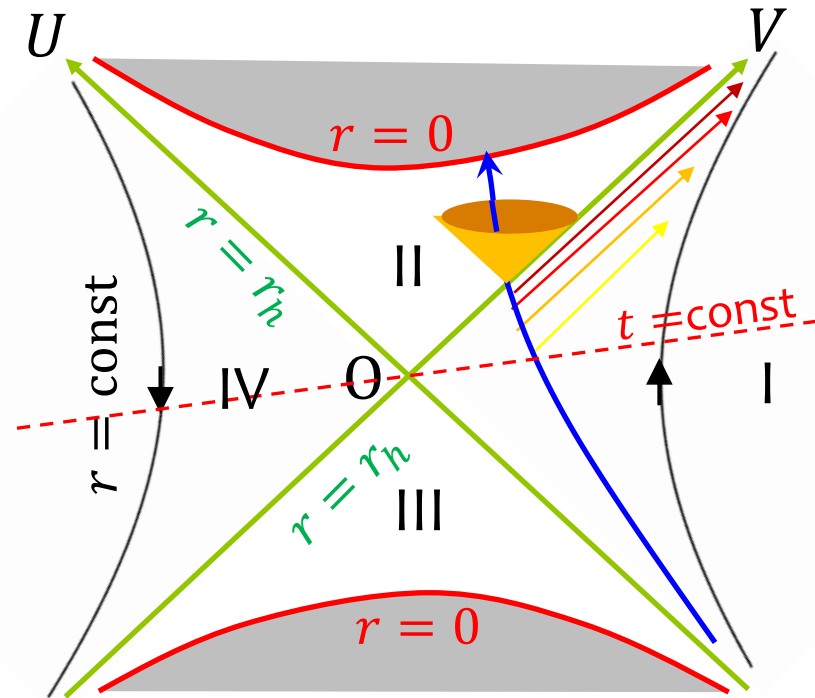
$$UV = r_h(r_h - r)e^{r/r_h}$$



$$ds^2 = -\frac{r_h}{r}e^{-r/r_h}dUdV + r^2d\Omega^2$$

曲率特異点 $r = 0$ は、「空間的な」
2本の曲線で表される。

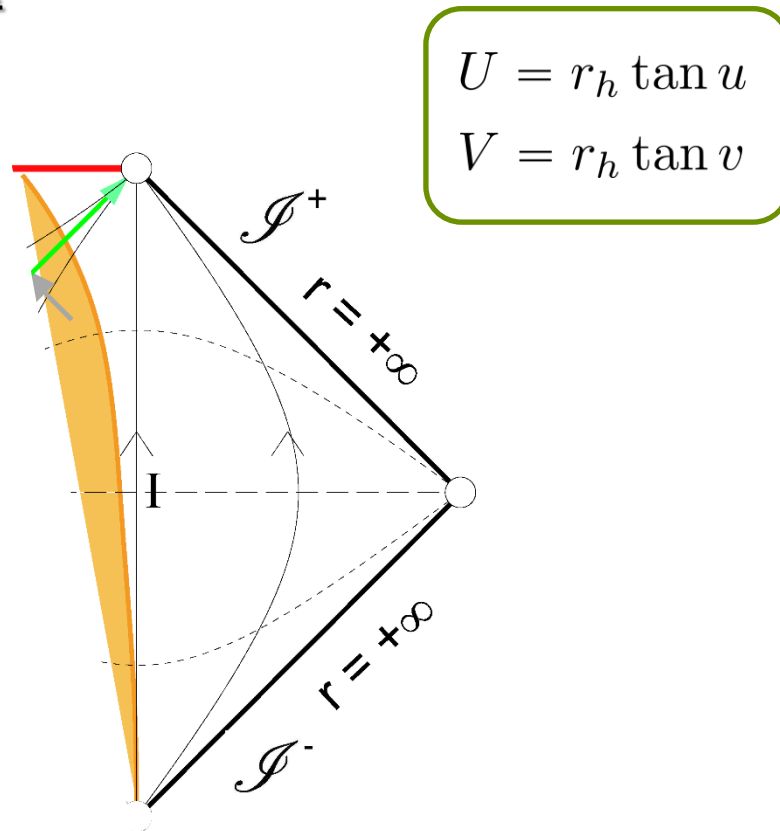
$r = r_h$ 面は、交叉する2つの光的超
曲面に対応し、「未来のホライズン」お
よび「過去のホライズン」と呼ばれる。



- I. 外部領域(観測領域)
- II. ブラックホール領域
- III. ホワイトホール領域
- IV. もう一つの外部領域

球対称な天体の重力崩壊

特異点: $r = 0$



球対称な天体が限りない重力収縮(=重力崩壊)を起こすと、ブラックホールが形成され、その内部に未来型の時空特異点が生じる。

特異点発生的一般性

一様膨張宇宙モデルや球対称重力崩壊で発生する時空特異点は、時空の特殊な対称性に起因するのか？

Lichnerowicz A (1955)

漸近的に平坦な定常真空解は、Minkowski時空を除いて、必ず特異点をもつ

Raychaudhuri AK (1955), Komar A (1956)

物質が強エネルギー条件を満たす時、同期座標系において有限な時間で空間体積がゼロとなる.

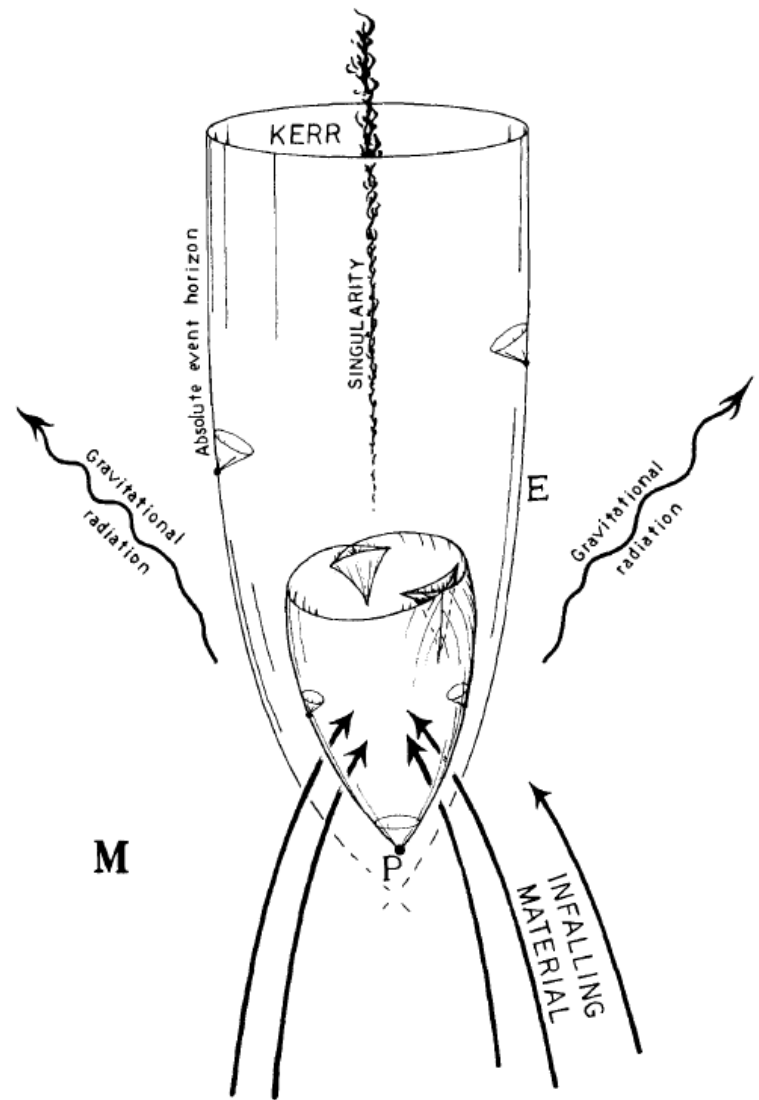
強エネルギー条件: $R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0$, U^μ :任意の時間的ベクトル

同期座標系: $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t, x)dx^i dx^j$

Lifshitz EM & Khalatnikov IM (1963)

宇宙モデルにおける初期特異点の発生は、一般的な解では起こらないと主張

特異点定理



Penrose R: Ann. NY Acad. Sci. 224, 125 (1973)

Penroseの特異点定理

次の条件が満たされるとき，有限なアフィンパラメータで時空境界に達する未来向きの光線が存在する：

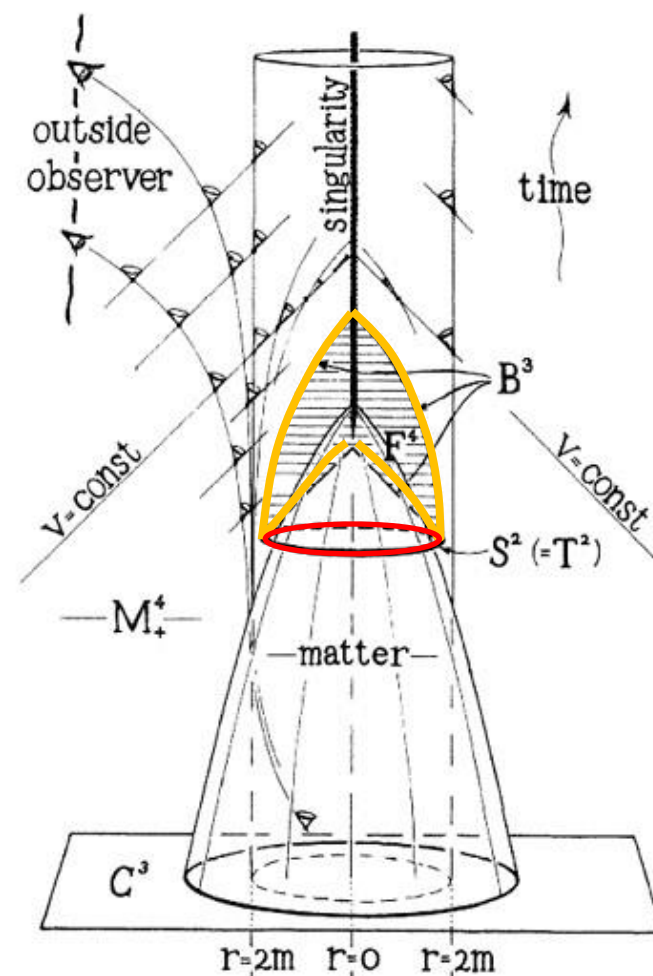
1. コンパクトでない連結なCauchy面の存在
2. 光的収束条件
3. 閉捕捉面の存在

光的収束条件(強エネルギー条件)

$$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \quad \forall k : \text{null}$$

閉捕捉面 [Penrose 1965]

閉曲面 $\mathcal{I}$ から広がる2つの光波面の面積が、
いずれも(局所的に)減少するとき、 $\mathcal{I}$ を**閉
捕捉面**と呼ぶ.

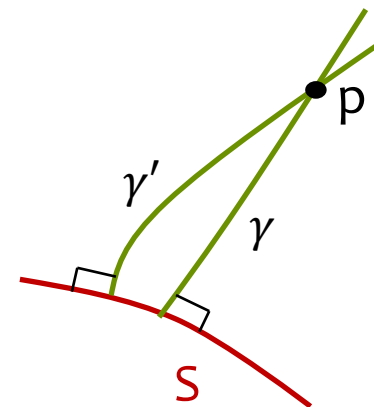


[Penrose R:PRL14, 57 (1965)]

証明の概要

共役点

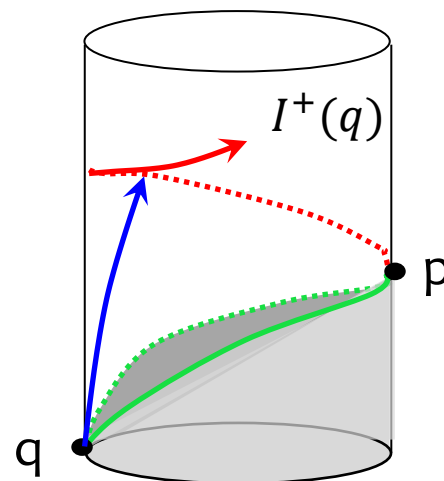
時空点 p を通過する隣接する2本の測地線 γ, γ' が共に空間的曲面 S と直交(点 q を通過)するとき, p は曲面 S (点 q)と γ に沿って**共役**であるという.



光的共役点定理

[Penrose 1965; Hawking, Ellis 1973]

時空点 p が曲面 S (点 q)と光的測地線 γ に沿って共役とする. このとき, γ 上の p を超えた点は, 常に S (点 q)と時間的曲線で結ばれる.



静的Einstein宇宙 $\mathbb{R} \times S^3$
における光錐と共役点

$$\partial J^+(q) \cong S^3$$

捕捉面の光錐 [Penrose 1965; Hawking-Ellis 1973]

光的収束条件が満たされるとき、**光的測地線が常に無限に延長可能なら**，捕捉面 $\mathcal{S}$ と直交するすべての光的測地線上に $\mathcal{S}$ の共役点が存在する。



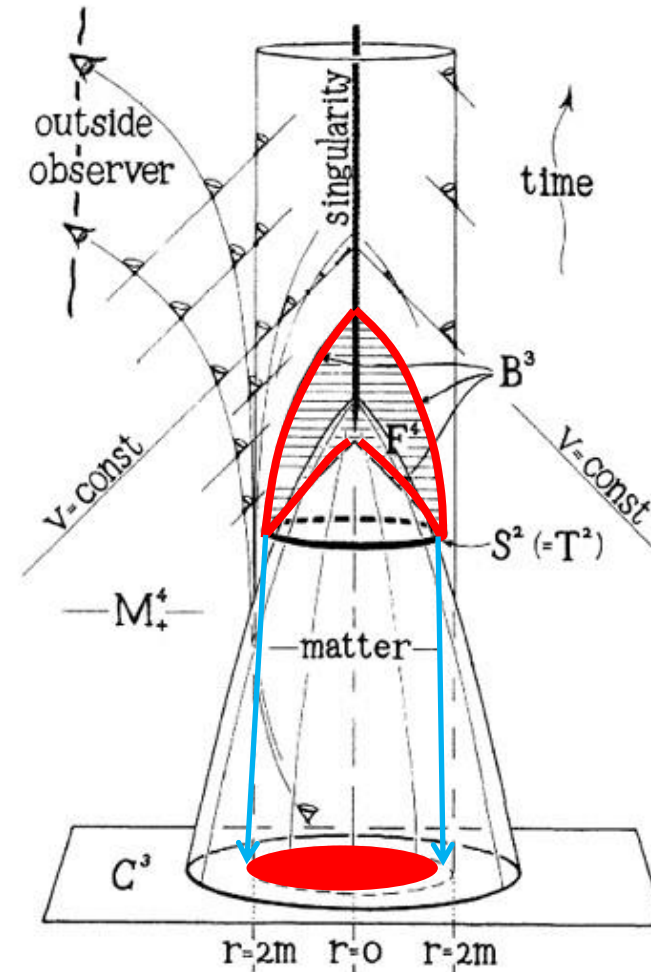
光的収束条件のもとで、**すべての光線が未来方向に無限に延長可能なら**，閉捕捉面 $\mathcal{S}$ の未来の光錐 B^3 は，コンパクトな閉3次元多様体となる。



閉補足面 $\mathcal{S}$ の未来の光錐 B^3 は，時間的曲線に沿った射影により，初期面 C に3次元コンパクト閉多様体として埋め込まれる。



矛盾：3次元連結非コンパクト多様体は，コンパクトな3次元閉部分多様体を持たない！



[Penrose R:PRL14, 57 (1965)]

Hawkingの特異点定理 [1967] 宇宙初期特異点の一般性

- 強エネルギー条件, コンパクト閉な空間, 宇宙の膨張/収縮

 延長不可能な有限長の時間的測地線が存在

- 強エネルギー条件, 強い因果条件, 過去向きの捕捉点の存在

 延長不可能な有限長の過去向きの因果的測地線が存在

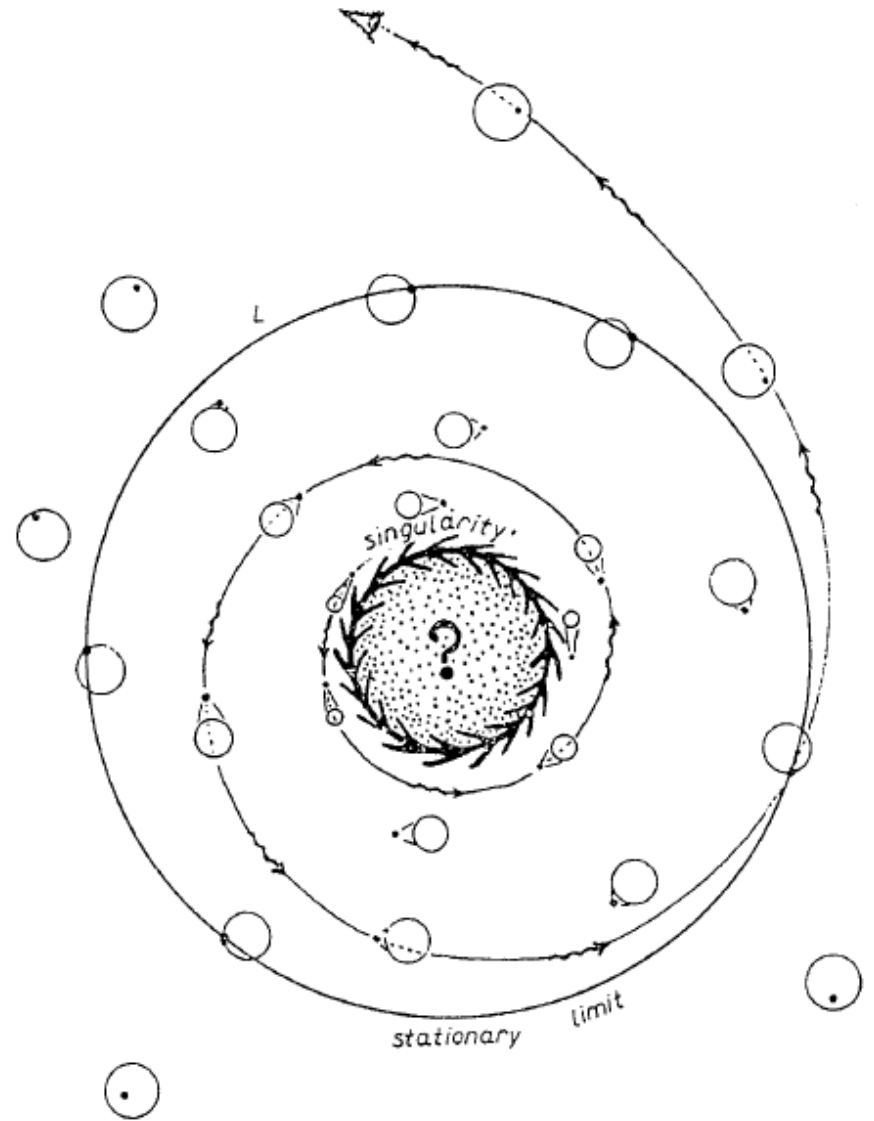
Hawking-Penroseの特異点定理 [1970]

- 強エネルギー条件 (+ 一般性条件)
- 因果的閉曲線が存在しない
- コンパクトで端のない非因果的集合, 閉捕捉面, 捕捉点のいずれかが存在

 延長不可能な有限長の因果的測地線が存在

特異点定理は, 計量やEinstein方程式の具体的な表式を用いた従来のアプローチと異なり, 当時発展を始めた大域微分幾何学の手法をローレンツ時空に適用することにより得られた数学的成果である.

特異点定理の インパクト



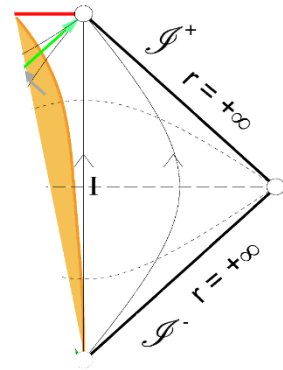
Penrose R: Riv. Nuovo Cimento 1, 252 (1969)

ブラックホール形成に有害な特異点

裸の特異点

極大時空において, $\mathcal{I}^+$ に因果的影響
を与える無限遠以外の時空境界

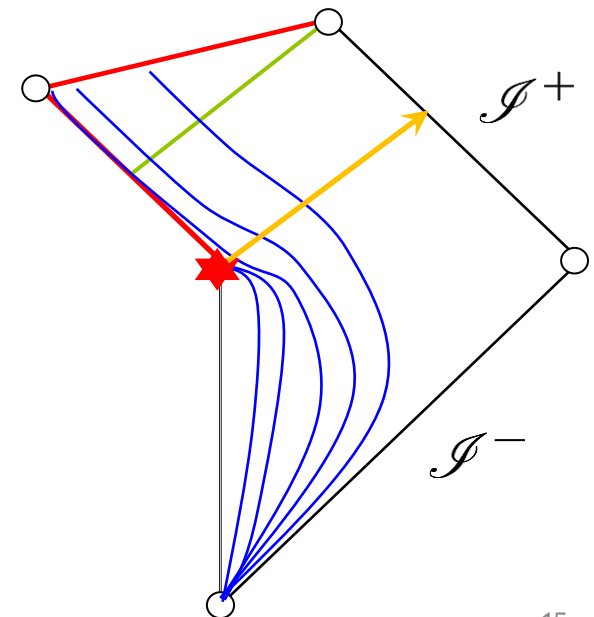
特異点: $r = 0$



球対称重力崩壊

球対称な天体の重力崩壊では, Schwarzschild時
空のホワイトホール内の裸の特異点に相当する
特異点は取り除かれる.

しかし, ソフトな状態方程式をもつ物質からな
る天体では, 一般的に, 天体の中心で裸の特
異点が現れる(中心曲率特異点).



物理的影響は？

ブラックホールについての一般定理

定常ブラックホール解の一意性定理

宇宙項がゼロのEinstein-Maxwell系において、漸近的に平坦で**非特異な**定常ブラックホール解は、次のものに限られる:

- 非回転ならReissner-Nordstrom解 [Israel 1967; Bunting, Masood-ul-alam 1987]
- 回転的ならKerr-Newman解 [Carter, Hawking 1972; Mazur 1982; Chrusciel 1996]

ブラックホールの面積増大定理 [Hawking, Ellis 1973]

光的収束条件が成り立つ**漸近的に予測可能な**時空において、ブラックホールの表面積は決して減少しない。

ブラックホール不分岐定理 [Hawking, Ellis 1973]

漸近的に予測可能な時空において、ブラックホールは合体することがあっても分裂することはない。

捕捉面定理 [Hawking, Ellis 1973]

光的収束条件が成り立つ**漸近的に予測可能な**時空において、閉捕捉面は必ずホライズンに含まれる。

宇宙検閲仮説

特異点定理は、特異点発生的一般性を結論するが、それが裸であるかどうかについての情報は与えない。



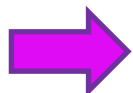
閉捕捉面の発生が必ずしもホライズンの存在を意味しないので、重力崩壊が一般にブラックホールを生み出すとは結論できない。



弱い宇宙検閲仮説 [Penrose 1969]

現実の系では、一般的な初期条件に対して、裸の特異点は発生しない。すなわち、特異点はホライズンに隠される。

現時点では、この仮説は証明されておらず、球対称系では多くの反例がある。このため、重力崩壊により常にブラックホールが形成されるのか、また、ブラックホールが最終的にKerrブラックホールに落ち着くのかは、理論的には不明。



Event Horizon Telescope, GW天文学

関連研究

関連する諸研究

理論

- 共形無限遠・共形技法[Penrose 1963 -]
- 時空c-境界[Penrose et al 1972 -]
- 時空b-境界[Schmidt 1971 -]
- 特異点の分類(1977 -)
- 特異点定理における条件の緩和(1978 -)
 - 平均強エネルギー条件[Tipler; Borde]
 - 因果性条件[Tipler; Maeda & Ishibashi]
 - タイムマシン
- 球対称系における宇宙検閲仮説(1984 -)
- 強い宇宙検閲仮説 [Penrose 1979]
 - Cauchyホライズンの安定性(1977 -)
 - Chronology protection conjecture [Hawking 1992]
 - Mass inflation/通過可能な特異面 (1990 -)
- 重力崩壊における臨界現象 (1993 -)

- 特異点を持つ時空での場の量子論 (1978 -)
- BH蒸発の生み出す特異点(1980 -)
- 量子重力理論－量子宇宙論(1982 -)
- 高次元理論での特異点 (1986 -)
- 横断可能なワームホール橋(1988 -)
- AdS-CFT対応 (1997 -)
- 修正重力理論 (2011 -)

実験・観測

- Event Horizon Telescope プロジェクト (2017 -)
- 重力波天文学 (2015 -)

まとめ

Penroseの最大の業績は、一般相対性理論における物理の問題を、抽象化により数学的問題に置き換えることにより、最新の数学を用いた厳密な研究を可能としたことにある。

この抽象化のおかげで、得られた結果の多くは物理サイドの理論の詳細に依存せずに成立する。特に、一連の特異点定理は、修正重力理論や高次元重力理論でもそのまま成立する。

ただし、物理の問題として、「現実が発生する」時空特異点の構造と影響は未だに不明である。現実の宇宙で、特異点が原因と思われる特異現象がいまだ見つかっていない状況では、(量子論の枠組みで)宇宙検閲予想が何らかの意味で成立しているのかもしれない。

Penroseの主な業績

1931/8/8, 英国Essex 生まれ

ペンローズ三角形 [1950年代]

GRのスピンノールによる記述 [1959, 1960]

共形プログラム [1963]
共形無限遠 [1964]
因果境界 [1972]

Newman-Penrose形式 [1962]

特異点定理 [1965, 1970]

スピンネットワーク [1969]

宇宙検閲仮説 [1969, 1979]

Twister理論 [1967]
Twister理論に基づく量子重力 [1972]

Penrose過程 [1971]

Penrose tiling [1974]

非線形重力子 [1976]
重力による波束の収縮 [1996]

心と量子力学 [1989]
サイクリック宇宙 [2010, 2018]

Penroseの主な業績

1931/8/8, 英国Essex 生まれ

- ペンローズ三角形 [1950年代]
- 一般相対性理論のスピンオールによる記述 [1959, 1960]
- Newman-Penrose形式 [1962]
- 共形変換による大域的構造の研究プログラム [1963]
- 共形無限遠 [1964]
- Penroseの特異点定理 [1965]
- BMS群 [1966]
- Twister理論 [1967]
- 弱い宇宙検閲説 [1969]
- スピンネットワーク理論 [1969]
- Hawking-Penroseの特異点定理 [1970]
- 回転ブラックホールでのPenrose過程 [1971]
- 時空の因果境界 [1972]
- Twister理論に基づく量子重力 [1972]
- Penrose tiling [1974]
- 非線形重力子 [1976]
- 強い宇宙検閲仮説 [1979]
- 重力による波束の収縮 [1996]

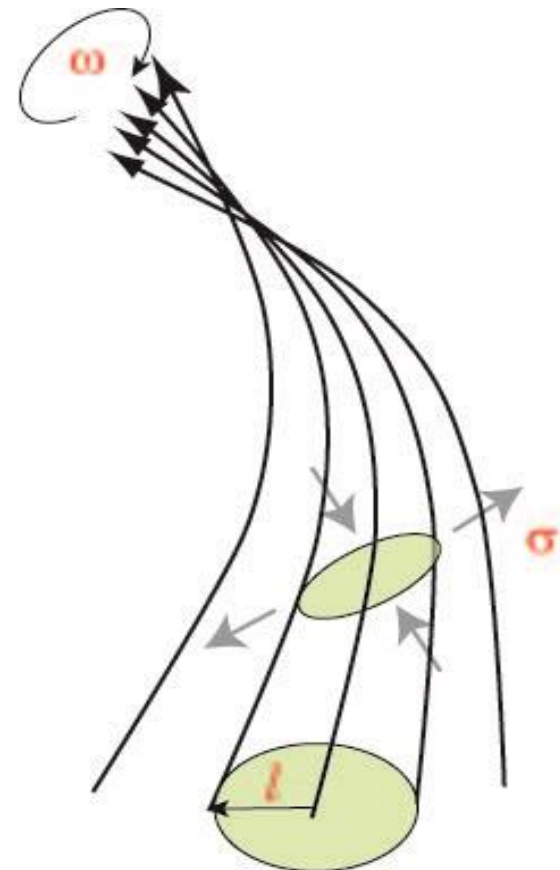
Raychaudhuri 方程式

時間的(光的)測地線束の空間的断面の体積 $dV = \ell^3$
(面積 $dS = \ell^2$) は, 測地線に沿って, 次の方程式に従う
[Raychaudhuri AK 1955]

$$n \frac{\ddot{\ell}}{\ell} = -\sigma^2 + \omega^2 - R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$$

測地線が非回転的 $\omega = 0$ (=超曲面に直交) のとき, 強エネルギー条件が満たされれば,

$$n \frac{\ddot{\ell}}{\ell} = -\sigma^2 - R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \leq 0$$



- 強エネルギー条件は, 重力が引力となるための条件
- $dV < 0$ ($dS < 0$) なら, 有限な時間で $dV = 0$ ($dS = 0$) となる.