一般相対性理論と宇宙論

時空の物理学としての宇宙論

早稲田大学
理工学術院
前田恵一

- 時空物理学の誕生
- 静的 vs 動的
- 宇宙の始まり
  - 特異点
  - カオス vs アトラクター
- 宇宙の加速膨張と重力理論

◆ 時空物理学の誕生

ニュートン重力理論

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho(\boldsymbol{r})$$

特殊相対性理論と矛盾

重力理論の相対論化の必要性

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \Delta\Phi = 4\pi G\rho.$$

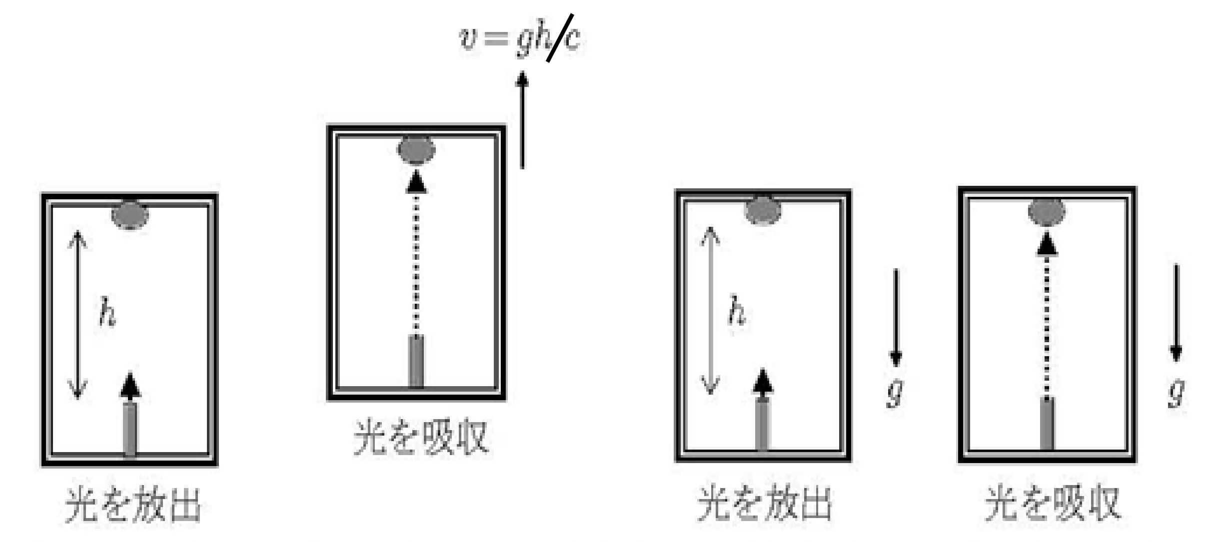
Einstein の等価原理（1907）

「一様重力場が存在する系」と
「等加速度で運動する系」の間の
すべての物理現象の等価性

等加速度系

ドップラー効果

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{gh}{c^2} \right)$$



重力的赤方偏移

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{\phi_2 - \phi_1}{c^2} \right) \qquad (\phi_1 < \phi_2 \leq 0)$$

重力場中の時間の遅れ

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \frac{\phi_1}{c^2}\right) < \nu_1$$

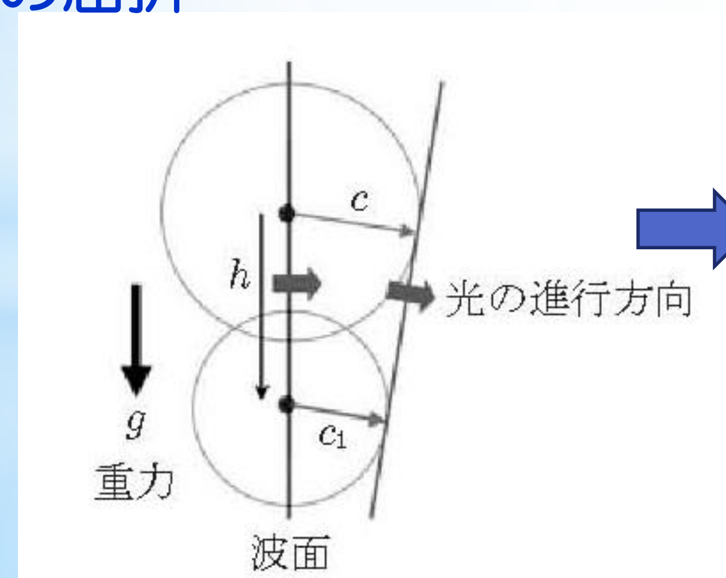
$$\left(1 + \frac{\phi_1}{c^2}\right) \text{秒} \quad < \quad 1\ \text{秒}$$

ν_2 回

≠ ?

ν_1 回

光の屈折



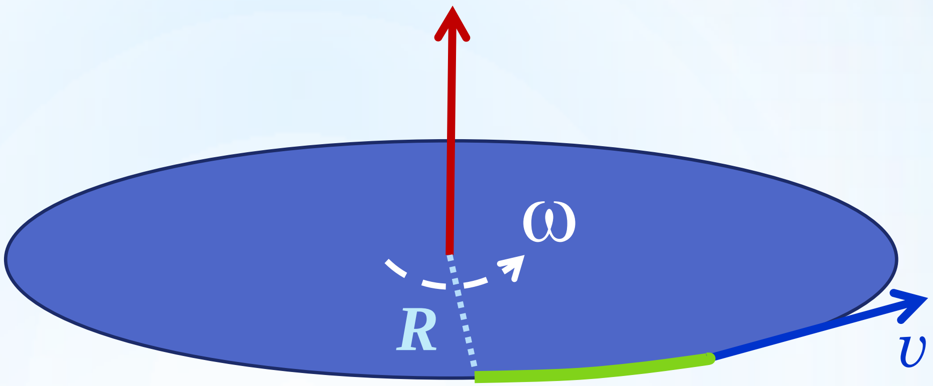
$$\alpha = \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \approx 0.87''$$

Von Soldner (1801)

光:粒子　　同じ結果

時空のゆがみ

一様回転系



Lorentz 収縮

慣性系での円周 $L = 2\pi R$ （平坦）

円盤上で測った円周 $L_0 = L/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

⇩

$L_0 > 2\pi R$ （負曲率空間）

加速系 ≈ 重力の存在 ➡ 空間の歪み

重力場中の粒子の運動方程式

相対論的自由粒子

$$\delta \int c d\tau = 0$$

光速は重力ポテンシャルに依存

$$c_1 = c\left(1 + \frac{\phi_1}{c^2}\right) < c$$

$$ds^2 = -c^2(\boldsymbol{r})dt^2 + d\boldsymbol{r}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right) = -\frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}} \cdot \nabla c$$

重力場中の粒子（ニュートン極限）

曲がった時空 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ 計量

Riemann 幾何学

$$\delta \int ds = 0$$

測地線 ⟷ 重力場中の粒子の運動

ニュートン重力理論

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho(r)$$

→ 相対論化 $\phi \rightarrow g_{\mu\nu}$

$g_{\mu\nu}$ をどう決定？ → アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

→ **時空物理学の誕生（1915）**

時空物理学の対象

宇宙論

宇宙全体の時空構造

ブラックホール

極限的強重力状態

重力波

時空のさざ波

◈ 静的 vs 動的

Einstein (1917)

宇宙　　永遠不滅の存在　　　　静的

一様·等方 &　有限　　空間：3次元球面　S^3

⇨ 解なし

宇宙定数の導入

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

ニュートン近似

$$\Delta\phi = 4\pi G\,(\rho + \rho_\Lambda)$$

$$\rho_\Lambda \equiv \Lambda c^2/8\pi G$$

半径 1AU に含まれる質量

$$\frac{M_\Lambda(r)}{M_\odot} \sim 10^{-36}\left(\frac{r}{\mathrm{AU}}\right)^3$$

静的宇宙モデル

$$\Lambda = \frac{1}{a^2} = \frac{2\pi G}{c^2}\rho$$

：解の存在

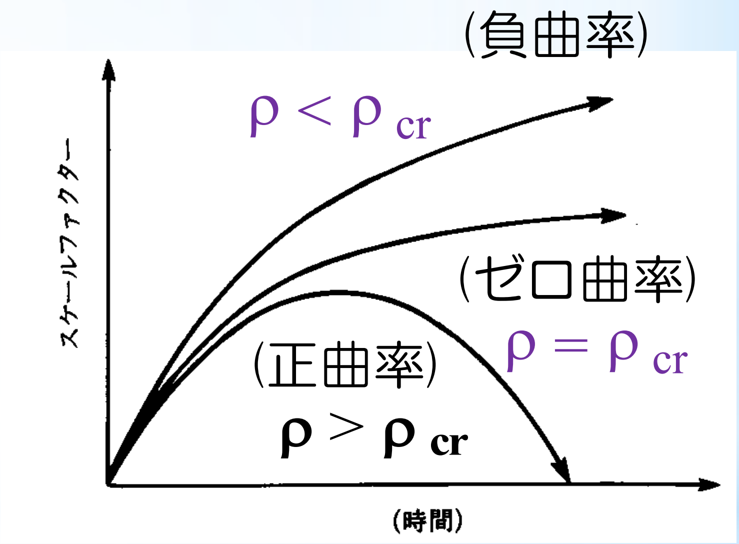
Friedmann(1922)　時間変化する宇宙

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

アインシュタイン方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho c^2,$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4}P$$



重力（万有引力）

膨張を減速

$\rho_{cr} = 10^{-29}\ \mathrm{g/cm^3}$　**臨界密度**

⇨ 膨張宇宙論

ビッグバン膨張宇宙論

Alpha, Bethe, Gamow（1948）, Hayashi (1950)

物質の進化

宇宙

火の玉

熱い素粒子のスープ
（クォーク、レプトン,・・・）

高温

クォーク　->　ハドロン

元素合成
p, n -> He, D, Be, Li,（軽元素）

^{4}He : 25 %

宇宙の中性化 (光は他の物質から分離)

3K CMB

Penzias-Wilson (1965)

低温

物質優勢　構造形成（銀河・銀河団）

宇宙膨張

Hubble (1929)

ビッグバンは正しい！

◈ 宇宙の始まり

特異点

膨張宇宙 ⟹ 始まり $a = 0$ **特異点**

対称性が高いから？

(非)一様・非等方な宇宙 ⟹ **特異点は解消されない**

特異点定理

Penrose-Hawking

Bianchi 宇宙モデル

Bianchi I (Kasner model)

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

$$p_1 = -\frac{u}{1+u+u^2}, p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}$$

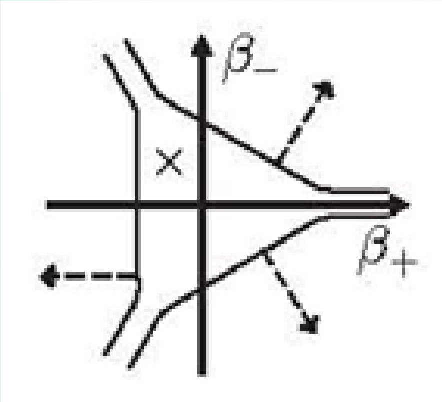
$$ds^2 = -dt^2 + R_0^2 e^{-2\Omega(t)} e^{2\beta_{ij}(t)} \omega^i \omega^j \qquad d\omega^i = \frac{1}{2} C^k{}_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$$

構造定数

$$\beta_{ij} = \mathrm{diag}(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-\,, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-\,, -2\beta_+)$$

2次元ポテンシャル中の粒子の運動

Bianchi IX



$t \to 0$ 特異点

Kasner 宇宙の繰り返し

$$u_1 \to u_2 \to u_3 \to u_4 \to \cdots$$

カオス的

⇨ Mixmaster universe (Misner 1969)

宇宙の等方化

cf　Particle creation in expanding universe [Zel'dovich (1972)]

◆ カオス vs アトラクター

Inflation

Starobinsky　R^2 Inflation (1980)

Sato, Guth　old inflation (1981)

Linde, Albrecht-Steinhardt　new inflation (1982)

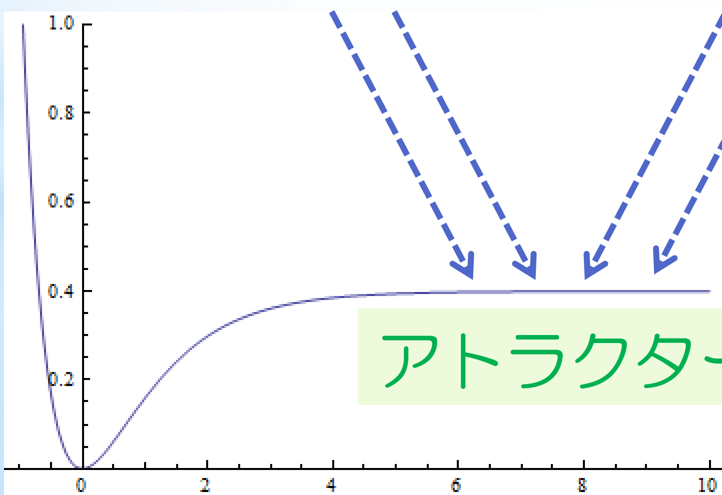
Linde　chaotic inflation (1982)

・・・

共形変換

Inflaton

potential dominant ⇨ 指数膨張



アトラクター

⇨ flat potential

Starobinsky inflation

KM PRD 37 (1988) 858

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R+\alpha R^2\right]$$

$$\bar{g}_{\mu\nu} = [1+2\alpha R]g_{\mu\nu}$$

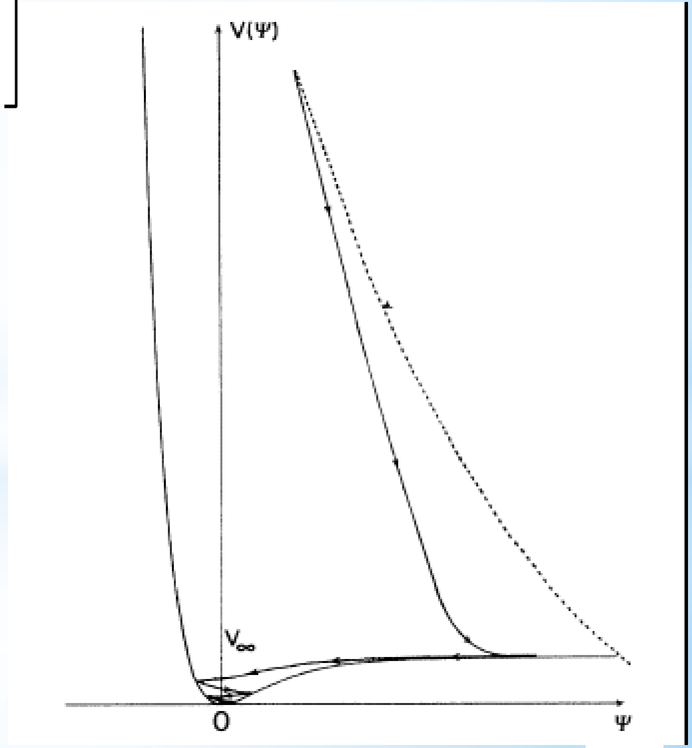
共形変換

$$\kappa\phi = \sqrt{\frac{3}{2}}\ln\left[1+2\alpha R\right]$$

$$S = \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left[\frac{1}{2\kappa^2}\bar{R} - \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\phi)^2 - V(\phi)\right]$$

GR + a scalar field with a potential V

$$V(\phi) = \frac{1}{8\alpha}\left(1-e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\kappa\phi}\right)^2$$



一様・等方化

Cosmic No-hair Conjecture

Λ(>0)を持つ時空は漸近的にde Sitter に近づく

Bianchi 非等方宇宙

Cosmic No-hair Theorem (Wald (1983))

dominant & strong

Bianchi 宇宙モデル＋ Λ(>0)＋物質(with energy condition)

(+ 初期値 ${}^{(3)}R_{\max} \leq 2\Lambda$ for type IX)

→ de Sitter 時空 within one expansion time

非一様宇宙

Starobinsky (1983) de Sitter : attractor

Shiromizu et al (1993) BH in de Sitter universe graceful exit → Big Bang

end of inflation

reheating

density perturbations

de Sitter (exponential) expansion　不安定

難しさ

transient de Sitter expansion

アトラクター　且つ　不安定

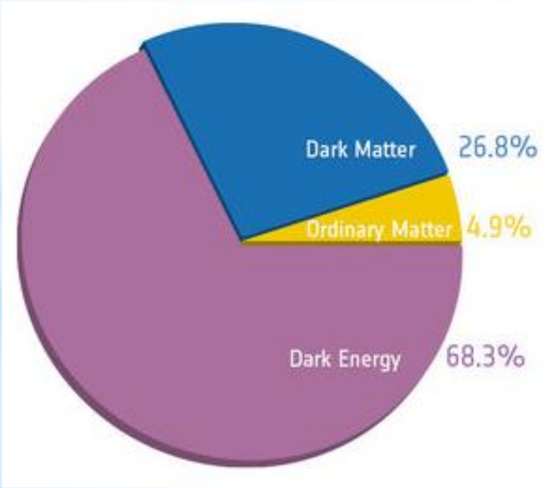
◈ 宇宙の加速膨張と重力理論

Ia型超新星　　　Perlmutter, Riess, Schmidt (1998)

⇨　加速膨張

+ CMB ＆ Large Scale Structures

Dark Energy の存在



Planck (2013)

重力＝万有引力

通常の物質 ⇒ 減速膨張

⇓

Dark Energy

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left[T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\mathrm{DE})}\right]$$

修正重力 (宇宙論的スケール)

$$M_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

google scholar

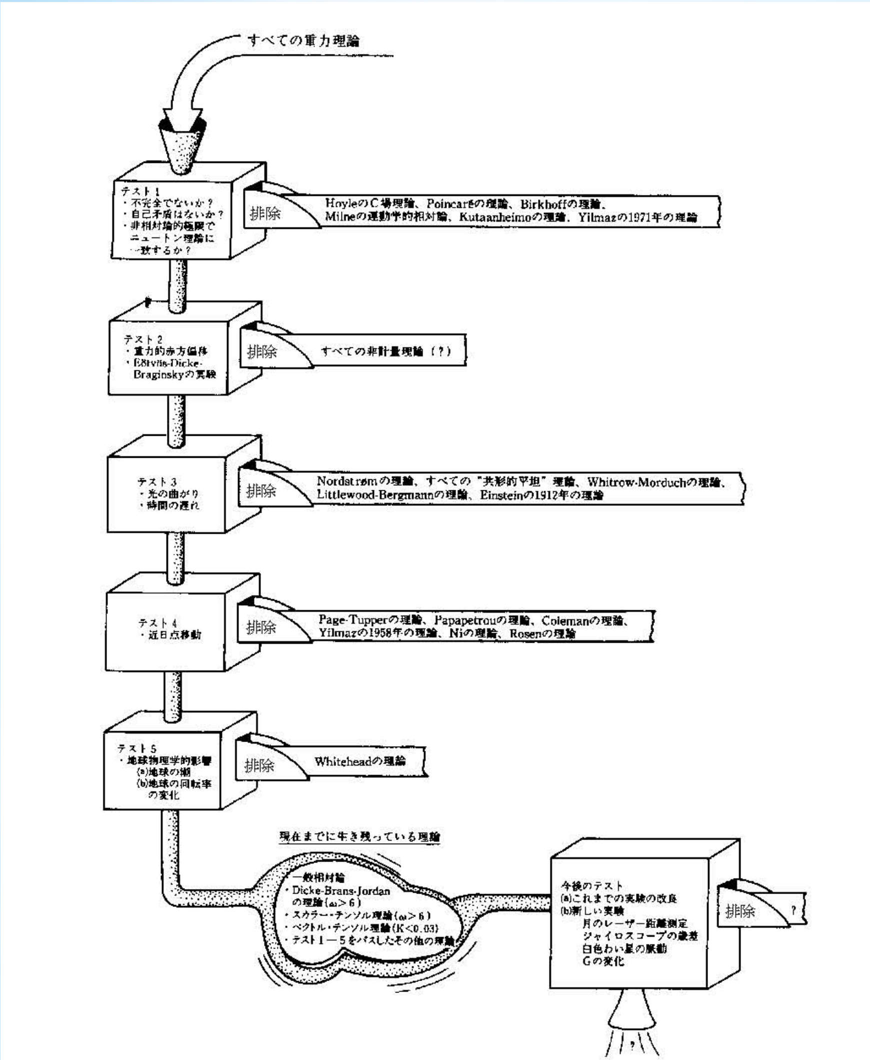
"modified gravity" & "accelerating universe"

1991-1995	2件
1996-2000	1件
2001-2005	73件
2006-2010	469件
2011-2015	933件

Brans-Dicke理論
Scalar-tensor 理論
Einstein-aether理論
TeVeS理論
f(R)重力理論
Galileon, Horndeski 理論
massive gravity, bigravity

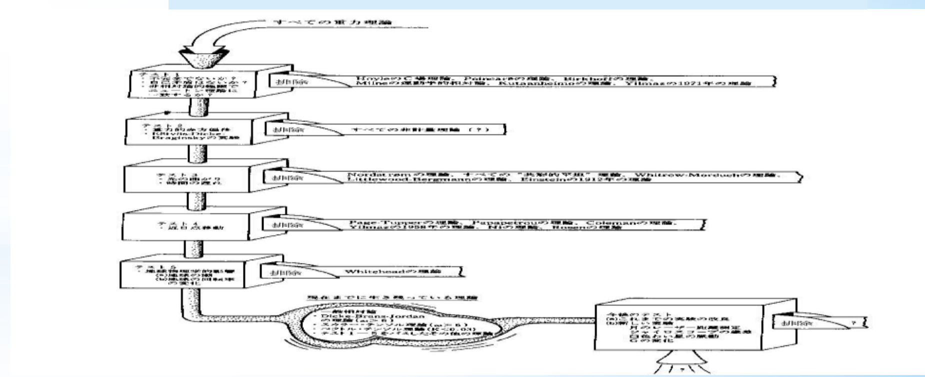
General Relativity

いろいろな重力理論



Will (1972)

Brans-Dicke理論
Scalar-tensor 理論
Einstein-aether理論
TeVeS理論
f(R)重力理論
Galileon, **Horndeski** 理論
massive gravity, bigravity
.
.
.



どうするか？

- 基礎理論的アプローチ

  素粒子統一理論・量子補正・自然な拡張

- 有効理論的アプローチ

  背景時空: given ＋可能な理論の拡張

- 一般相対論的アプローチ

  一般相対論＋``exotic matter”

``Einstein frame”　による記述

KKLT
massive gravity

PPN approach
effective theory

Starobinsky

Higgs Inflation

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa^2}\left(R + \alpha G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right) - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi)\right]$$

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

disformal transformation

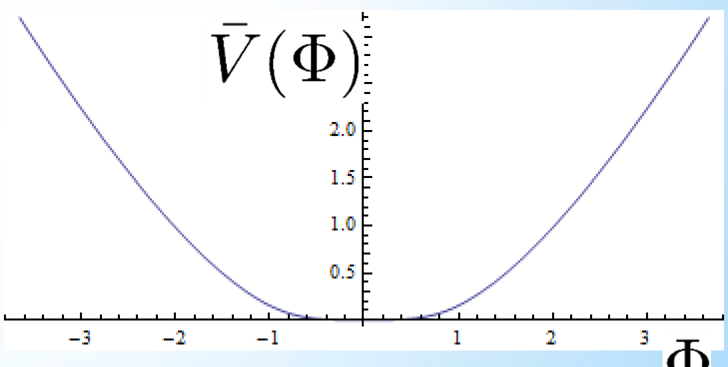
$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

時間方向と空間方向のスケールを変える

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}}\left[\frac{1}{2\kappa^2}\bar{R} - \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\Phi)^2 - \bar{V}(\Phi) + (\text{higher derivative})\right]$$

$$\bar{V}(\Phi) = \frac{\lambda}{4}\Phi^4 \quad (\Phi \ll \Phi_{\rm cr})$$

$$\propto \Phi^{4/3} \quad (\Phi \gg \Phi_{\rm cr})$$



まとめ

一般相対性理論＝時空の物理学

時空の物理学としての宇宙論

- 動的(ビッグバン膨張宇宙論)
- 宇宙の始まり
  - 特異点
  - カオス vs アトラクター
- 宇宙の加速膨張と重力理論
  - 一般相対論的アプローチ