

Black Holes in Modified Gravity

Takahiro Tanaka (YITP)

Inspiring-coalescing binaries

連星系からの重力波からは様々な情報を引き出せる

- **Inspiral phase** (large separation) (Cutler et al, PRL **70** 2984(1993))

クリーンな系、質点近似がよい

星の内部構造はほとんど無視できる

正確な波形の予測が可能

- for detection
- for parameter extraction
- for precision test of general relativity



- **Merging phase**

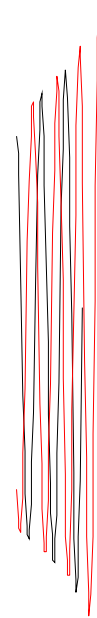
近年の数値相対論の目覚ましい発展

- EOS of nuclear matter
- Electromagnetic counterpart

- **Ringdown tail** - quasi-normal oscillation of BH

強い重力場で一般相対論は本当に正しいのか？

Inspiring binary は合体までに何周期もの重力波



およそ、1周期程度
のphaseのずれがあ
ると区別できる。

- 高精度な軌道パラメータの決定
- ブラックホール時空の強重力場領域をマップ

Modified Gravity theory

- ダークマター/ダークエネルギーに対する alternative
⇒ 重力理論の修正
- どのような重力理論の修正が重力波で検出可能か？
- 重力波はどのような重力理論の修正に新たな制限を加えることができるのか？

Contents

- Randall-Sundrum braneworld

これはUV 側での modification という意味で他のものと毛色が違う

- Einstein dilaton Gauss-Bonnet,
Dynamical Chern-Simons gravity

- Massive gravity

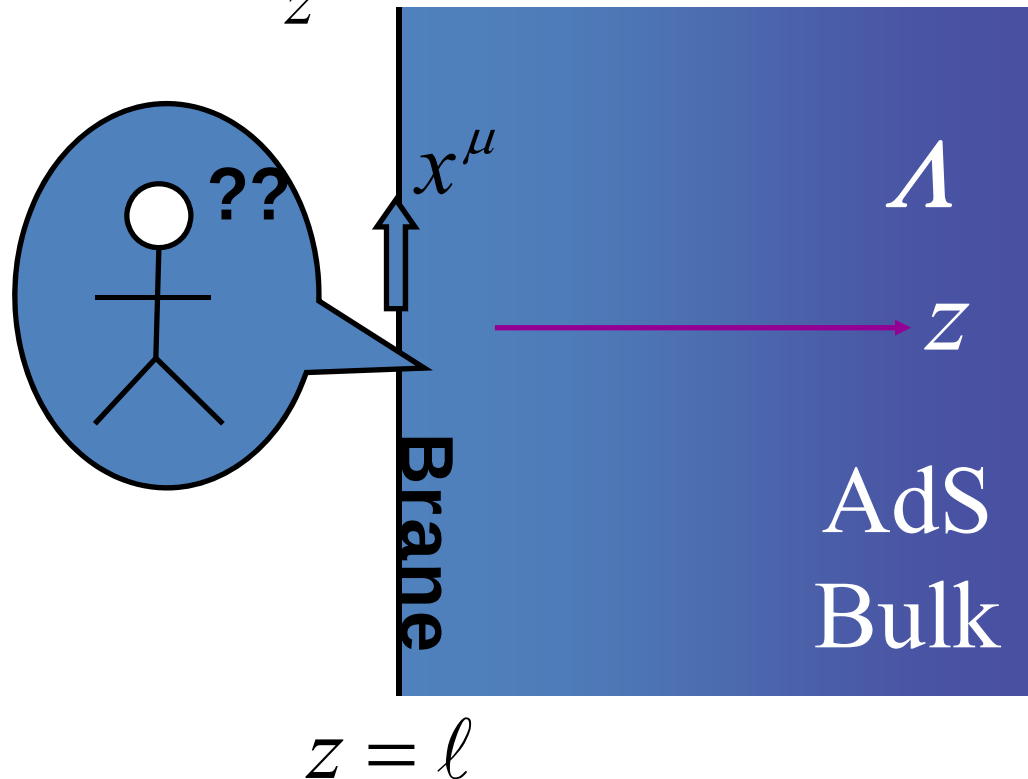
Black holes in
modified gravity

Propagation of
gravitational waves

Infinite extra-dimension: Randall-Sundrum II model

Volume of the bulk is finite due to warped geometry although its extension is infinite.

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$$



ℓ : AdS curvature radius

$\Lambda = -\frac{6}{\ell^2}$ Negative cosmological constant

$\sigma = \frac{3}{4\pi G_5 \ell}$ Brane tension

- Extension is infinite, but 4-D GR seems to be recovered!

Gravity on the brane looks like 4D GR approximately,
BUT for many years Schwarzschild-like BH solution
had been unknown.

Black string solution

(Chamblin, Hawking, Reall ('00))

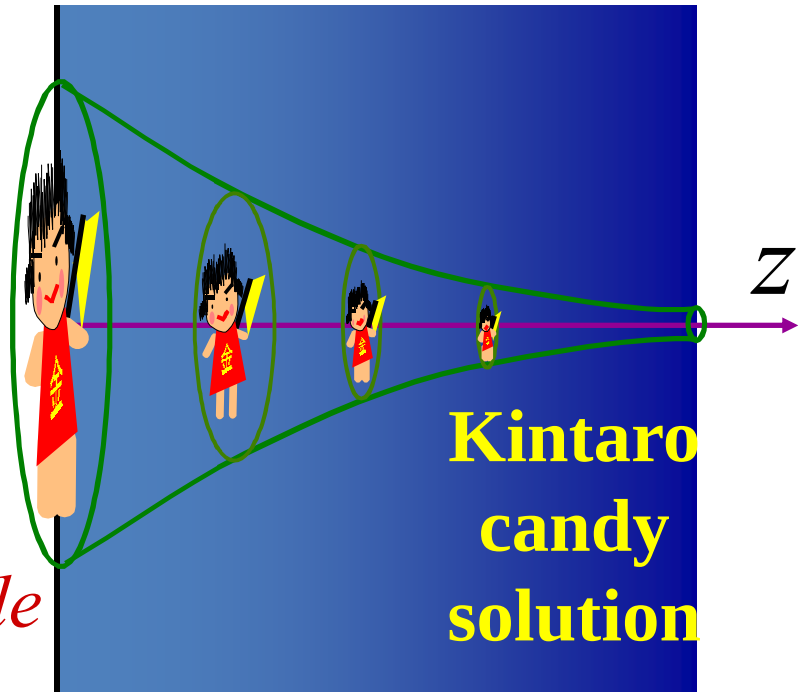
$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2} \left(dz^2 + \bar{g}_{\mu\nu}^{(Sch)} dx^\mu dx^\nu \right)$$

Metric induced on the brane $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ is exactly Schwarzschild solution.

However, this solution is singular.

- $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \propto z^{-4}$

behavior of zero mode



Moreover, this solution is unstable.

- *Gregory Laflamme instability*

AdS/CFT correspondence

(Maldacena ('98))

(Gubser ('01))

(Hawking, Hertog, Reall ('00))

$$\# \underbrace{Z[q]}_{\text{Boundary metric}} = \int d[\phi] \exp(-S_{CFT}[\phi, q])$$

$$\text{Boundary metric} = \int d[g] \exp(-S_{EH} - S_{GH} + S_1 + S_2 + S_3) \equiv \exp(-W_{CFT}[q])$$

$$S_{EH} = -\frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{-g} \left({}^{(5)}R + \frac{12}{\ell^2} \right)$$

$$S_{GH} = -\frac{1}{\kappa_5^2} \int d^4x \sqrt{-q} K$$

Counter terms

$$S_1 = -\frac{3}{\kappa_5^2 \ell} \int d^4x \sqrt{-q}$$

$$S_2 = -\frac{\ell}{4\kappa_5^2} \int d^4x \sqrt{-q} {}^{(4)}R$$

$$S_3 = \dots$$

$$\# \underbrace{z_0}_{\text{Brane position}} \rightarrow 0 \text{ limit is well defined with the counter terms}$$

Brane position

$$\begin{aligned} \# \int d[g] \exp(-S_{RS}) &= \int d[g] \exp(-2(S_{EH} + S_{GH}) + 2S_1 - S_{matter}) \\ &= \exp(-2S_2 - S_{matter} - 2(W_{CFT} + S_3)) \end{aligned}$$

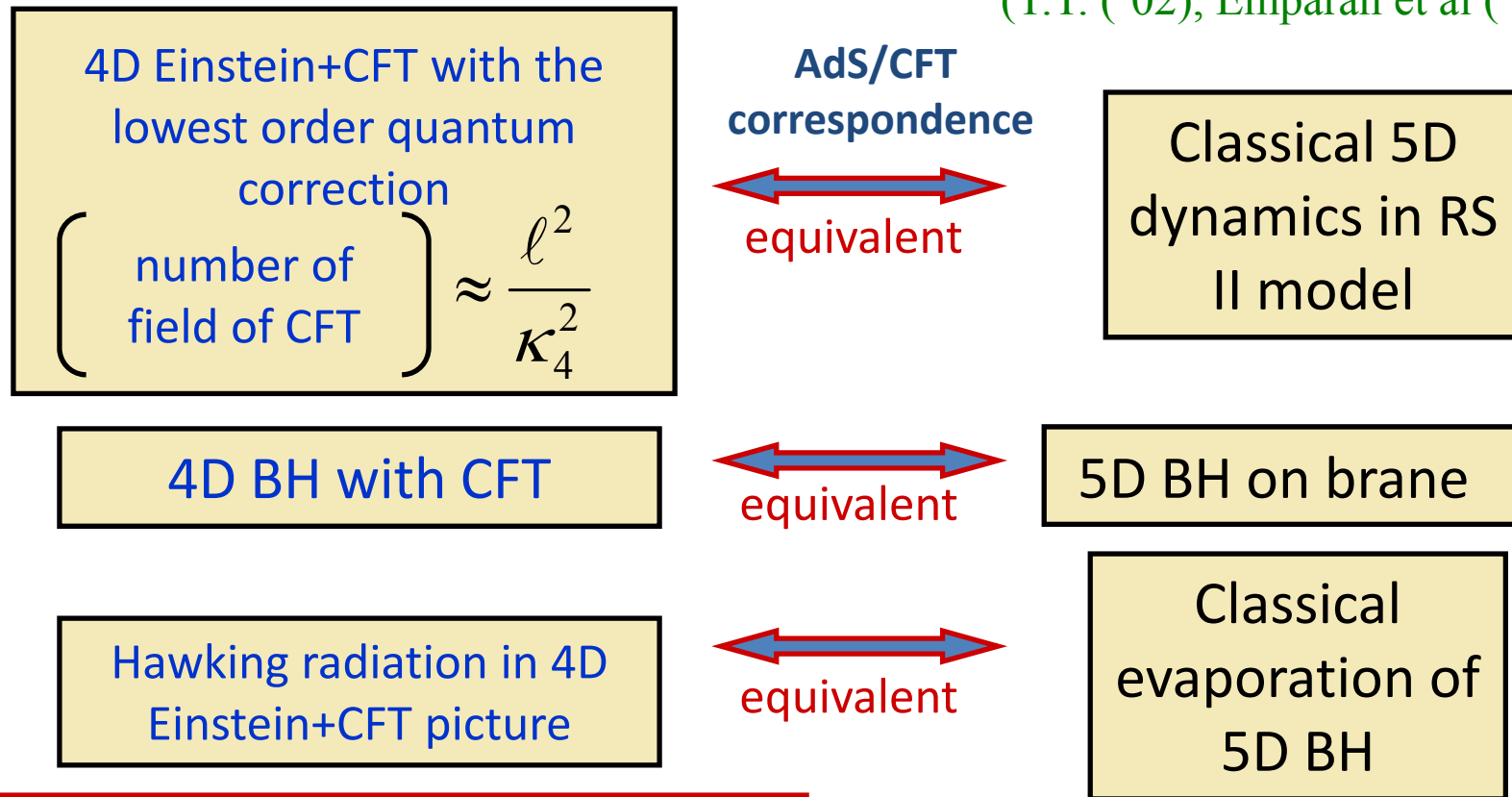
brane tension

$z_0 \Leftrightarrow$ cutoff scale parameter

4D Einstein-Hilbert action

Classical black hole evaporation conjecture

(T.T. ('02), Emparan et al ('02))



Time scale of BH evaporation

$$\tau = \left(\frac{M}{M_{\text{Solar}}} \right)^3 \left(\frac{1\text{mm}}{\ell} \right)^2 \times 120\text{year}$$

$$\frac{\dot{M}}{M} \approx \left(\text{Number of species} \right) \times \frac{1}{G_N^2 M^3} \approx \frac{\ell^2}{(G_N M)^3}$$

DECIGO/BBOで $\ell < 1.5\mu\text{m}$ まで制限がつけられる (Yagi, Tanahashi, Tanaka(2011))

However, static brane-localized black hole was finally obtained numerically

Pau Figueras, Toby Wiseman (2011)

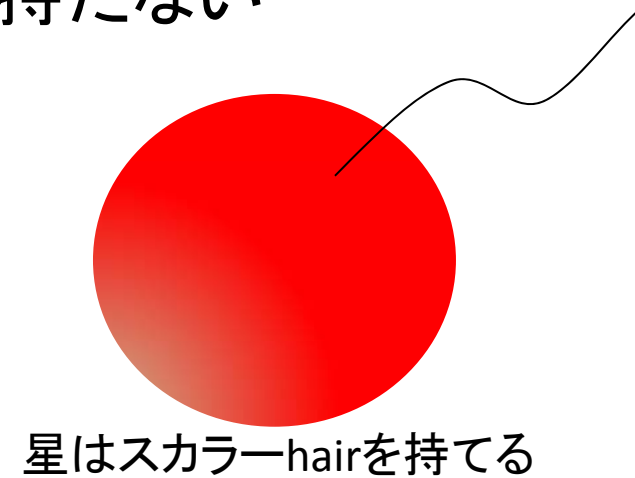
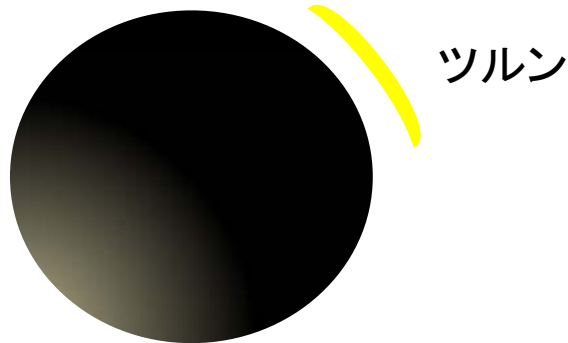
Abdolrahimi, Cattoen, Page, Yaghoobpour-Tari (2012)

得られた解はブレーン上でみるとSchwarzschild解に非常に近い

- この解が安定な物理的な解であるのか？
- 物理的な解であるなら、CFT的解釈はどうなるのか？
- なぜ、ホーキング輻射が抑制されるのか？

- Scalar-tensor 理論

BH no hair: BHはスカラーhairを持たない



Einstein dilaton Gauss-Bonnet, Dynamical Chern-Simons gravity

$$S \supset \frac{\alpha}{G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \theta \left(\frac{R_{GB}}{R R} \right) - \frac{1}{2G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(\partial\theta)^2 + 2V(\theta) \right]$$

$$R_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$$

$${}^*R R = \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\sigma\chi} R^{\sigma\chi}{}_{\mu\nu} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$$

相互作用が、 $\theta \times$ 曲率の高次項

- θ が定数だとtopological invariantで寄与しない
- 曲率の高次なので弱重力ではなかなか検出できない

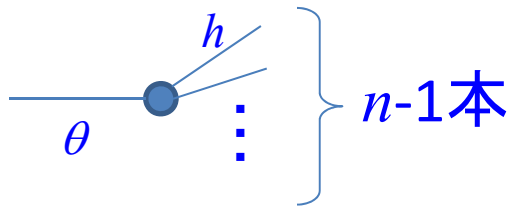
Effective theoryとしての限界

- 古典的には微小パラメータは $\alpha / r_{\text{curvature}}^2$
- 量子論的には $\alpha / r_{\text{curvature}}^2 \ll 1$ が要求される

$$\frac{\left[\text{Diagram: } x \xrightarrow{h} \text{circle}(h, \theta) \xrightarrow{h} x \right]}{\left[\text{Diagram: } x \xrightarrow{h} x \right]} \ll 1$$

のような条件が必要

n -点の相互作用頂点を v 個挿入する



スカラーのpropagatorの数の増加: $P_\theta = v/2$

Graviton propagatorの数の増加: $P_h = (n-1)v/2$

Suppression: $\left(\alpha M_{pl}^2 \right)^v M_{pl}^{2(P_\theta + P_h)} \Lambda^{-2v - 2(P_\theta + P_h)}$

➡ Strong coupling energy scale: $\Lambda_c = M_{pl}^{1-2/n} \alpha^{-1/n}$

一番厳しい制限は $n=3$ のとき

$$\Lambda_c > (10 \mu\text{m})^{-1} \Rightarrow \sqrt{\alpha} < 10^{13} \text{ cm}$$

重力の精密測定

現時点での制限

- EDGB

Cassini衛星 $\alpha_{EDGB}^{1/2} < 1.3 \times 10^{12} \text{ cm}$ (Amendola, Charmousis, Davis (2007))

$$\delta\Phi_{Newton} \propto 1/r^7 \quad \begin{matrix} \square \\ 1/r^2 \end{matrix} \theta \approx "R^2" \quad \begin{matrix} \square \\ 1/r^6 \end{matrix} \Rightarrow \theta \approx 1/r^4$$
$$\Rightarrow \square \delta\Phi_{Newton} \approx " \nabla^2 \theta R "$$

BHの存在(4Msol) $\alpha_{EDGB}^{1/2} < 3 \times 10^5 \text{ cm}$

しかし、EDGBにおいて、小質量BH解が存在しないという statementはeffective th.の適用外

- CS

Gravity Probe B, LAGEOS (Ali-Haimoud, Chen (2011))

$$\alpha_{CS}^{1/2} < 10^{13} \text{ cm}$$

BHには毛があってもNSにはない

- EDGB, CS(slow rotation)のいずれもBH解が知られており、それぞれscalar monopole, dipoleをもつ。
- EDGB, CSのいずれの場合もNSはmonopole chargeを持てない

$$\square \theta \approx R^2 \Rightarrow Q = \int d^3x R^2 = \frac{1}{T} \int d^4x R^2$$

Topological invariantなので自明なtopologyをもつ時空では0

$$\theta_{\text{far zone}} \approx \frac{1}{r} \int d^3x \left(1 + \partial_t (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \partial_t^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2 + \dots \right) \times (\text{source})$$

EDGB: monopole source $\propto \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z}(t))$

⇒ dipole radiation (-1PN order)

CS: dipole charge $\propto \nabla \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{z}(t))$

⇒ 2PN order

(Yagi, Stein, Yunes, Tanaka (2012))

- Dipole radiationによるEDGBへの制限

Low mass X-ray binary, A0620-00

$$\alpha_{EDGB}^{1/2} < 1.9 \times 10^5 \text{ cm} \quad (\text{Yagi (2012)})$$

将来の地上重力波観測SNR=20, 6Msol+12Msol

$$\alpha_{EDGB}^{1/2} < 4 \times 10^5 \text{ cm}$$

- 2PN correctionによるCSへの制限

dipole-dipoleが作る $T_{\mu\nu}$  metricのquadrupole成分
 運動方程式への2PN correction

将来の地上重力波観測: 距離=100Mpc, $a \sim 0.4M$

$$\alpha_{CS}^{1/2} < 10^{6-7} \text{ cm}$$

低いPN次数の補正に対しては合体直前でない連星でも制限がつけられる

重力波の伝播

重力波の伝播が普通ではないモデルで、観測的に矛盾のないものはあるだろうか？

✚Chern-Simons Modified Gravity

背景の θ の宇宙論的な時間変化があるとしてもなかなか見えない

$$|\alpha\dot{\theta}| < 3 \times 10^{-6} \text{ cm} : \text{J0737-3039(double pulsar)} \\ (\text{Yunes \& Spergel, arXiv:0810.5541})$$

右巻きと左巻きの重力波で振動数に依存して振幅が異なる。 $\mathbf{h}^{(L,R)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{h}^{(+)} + i\mathbf{h}^{(\times)})$

$$\mathbf{h}^{(L,R)} = \mathbf{h}_{GR}^{(L,R)} \exp \left(\pm 64 \pi^2 \alpha f H_0 \int_0^z dz (1+z)^{5/2} \left[\frac{7}{2} \frac{d\theta}{dz} + (1+z) \frac{d^2\theta}{dz^2} \right] \right) \\ \approx \mathbf{h}_{GR}^{(L,R)} \exp(\pm f O(10^3 \alpha \dot{\theta}))$$

✚Massive bi-gravity

massive と massless の graviton が両方存在
 ν 振動のようなことが期待できる

問題のない宇宙モデルがつくれるのか？

Ghost free massive bi-gravity

$$L = \frac{\sqrt{-g}R}{16\pi G_N} + \frac{\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R}}{16\pi G_N \kappa} + \sqrt{-g} \sum_{n=0}^4 c_n V_n + L_{matter}$$

$$V_0 = 1 \quad V_1 = \tau_1 \quad V_2 = \tau_1^2 - \tau_2 \quad \dots$$

$$\tau_n \equiv \text{Tr}[\gamma^n] \quad \gamma_j^i \equiv \sqrt{g^{ik} \tilde{g}_{kj}}$$

- $\tilde{g}$ を固定した場合が de Rham-Gabadadze-Tolley massive gravity

- Metric 10成分 - constraints 4成分 = 6成分

massive spin 2は5成分なので、1成分余っている

scalar singlet でghost(運動項が逆符号)になる

constraintがLagrange multiplierであるlapseやshiftを完全に決めない場合、constraintが閉じず、余分のconsistency 条件が現れ、余分の1成分が消える

このmodelで $\tilde{g}$ もdynamicalにしてもやはりghost freeであることが示された。 (Hassan, Rosen (2012))

FLRW background

(Comelli, Crisostomi, Nesti, Pilo (2012))

$$ds^2 = a^2(t)(-dt^2 + dx^2)$$

$$d\tilde{s}^2 = b^2(t)(-c^2(t)dt^2 + dx^2) \quad T_{\mu\nu}^{(mass)} = 2 \frac{\delta S^{(mass)}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(mass)} = 0 \Rightarrow (6c_3\xi^2 + 4c_2\xi + c_1)(\underbrace{cba' - ab'}_{\text{branch 2}}) = 0 \quad \xi \equiv b/a$$

branch 1 branch 2

branch 1:

線形摂動を考えると期待されるスカラーやベクトルタイプの重力のモードが現れない。Strong coupling?

branch 2:

線形摂動で期待される全てのモードが現れるbranch

まとめ

重力の修正を重力波で捉えるということを考えると、奥が深い。

- Randall-Sundrum braneworld

静的解の発見で、BHの古典的蒸発仮説は間違っているように思われるが、どのように解釈すべきかは依然謎である。

- Einstein dilaton Gauss-Bonnet,
Dynamical Chern-Simons gravity

4次元の簡単なモデルであるが、最近まで調べられておらず、モデルに対する現状の制限が弱く、重力波で飛躍的に強い制限が得られる例を与えている

- Massive gravity

観測可能なgraviton振動を与える可能性のあるモデル

Black holes in
modified gravity

Propagation of
gravitational waves