

修士論文

低温重力波レーザー干渉計用ヒートリンク材の特性評価

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

宇宙線研究所重力波グループ

笠原邦彦 (16055)

2003年1月

目次

第1章	はじめに	3
第2章	LCGT 計画	4
2.1	重力波	4
2.2	Target とする重力波源	4
2.3	レーザー干渉計による重力波検出	4
2.4	レーザー干渉計の原理的な雑音	5
2.5	LCGT の概要	6
第3章	本研究の概要	10
3.1	本研究の主題	10
3.2	用いた heat link の候補材	10
3.3	低温実験について	11
第4章	Al 及び Cu の伝熱特性の評価	12
4.1	実験の目的	12
4.2	実験の原理と方法	12
4.2.1	熱伝導率測定	12
4.2.2	RRR 測定	14
4.3	実験結果	14
4.3.1	熱伝導率と RRR の対応	14
4.3.2	Size effect	18
4.3.3	曲げによる影響	19
第5章	Al 及び Cu の機械的特性の評価	20
5.1	実験の目的	20
5.2	実験の原理と方法	20
5.3	実験結果	21
第6章	Heat link の構成	25
6.1	Heat link の材質及び形状	25
6.2	伝熱面からの要請	26
6.3	Heat link から導入される雑音	26
6.3.1	光軸方向の振動	26
6.3.2	縦振動の光軸方向への coupling の影響	28
6.3.3	LCGT の default の感度曲線との比較	29

第7章	まとめ	31
7.1	本研究の成果のまとめ	31
7.2	今後の課題	31
付録A	金属の熱伝導	33
A.1	熱伝導率と平均自由行程	33
A.2	Wiedemann-Franz 則	33
A.3	RRR の定義	34
A.4	低温における熱伝導率の予測値	34
A.5	原理的に実現可能な RRR の上限値	35
付録B	fiber の弾性	36
B.1	弾性体 fiber を用いた振り子	36
B.2	半円形状ばねのばね定数	37
付録C	散逸と熱雑音	39
C.1	散逸のある調和振動子	39
C.2	fiber の Q-value と pendulum mode の Q-value	39
C.3	調和振動子の熱雑音	40
付録D	補足実験	42

第1章 はじめに

一般相対論は美しい形式を持った重力理論であり，時空の力学を記述する壮大な理論である．しかしながら，重力相互作用は他の相互作用と比べ非常に弱く，一般相対論による記述を必要とする現象は主に高エネルギーの天体現象に限られる．そのため，検証実験もそう多くない．

我々のグループはその一般相対論の予言する重力波の直接検出を目指している．重力波の存在は A.Einstein が一般相対論の構築後すぐに示したが，その存在は R.Hulse と J.Taylor の中性子星連星の観測によって間接的に支持されたのみであり，他の例は間接的，直接的問わず未だない．

現在の重力波検出計画の主流はレーザー干渉計による自由質点の微小変位の検出であり，日本の TAMA300 や米国の LIGO が稼働しているが重力波の痕跡は見つからないままである．そこで日本の TAMA300 に続く次期計画と位置付けられているのが LCGT(Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope) 計画である [1]．この計画の最大の特徴と言える点が”Cryogenic”の部分である．即ち，鏡を低温に冷却することにより干渉計の主要な雑音の 1 つである熱雑音を低減しようというものである．

鏡を冷却するためにはなんらかの伝熱経路が必要である．この伝熱経路が heat link である．しかし，さまざまな雑音対策がとられている鏡に heat link から大きい雑音が導入されてしまったならば身も蓋もない．従って，heat link は慎重に設計されなければならない．

本研究はその heat link を requirement を満たすように構築するためのものである．

第2章 LCGT 計画

2.1 重力波

真空中の Einsetein 方程式から座標変換やゲージ変換の自由度差し引いていくと、取り除くことのできない自由度が残る。この自由度により真空中を伝わる「時空のさざなみ」重力波が存在できる。

平面重力波が z 方向から入射してきたときの 4 次元線素は Minkowski 時空からの摂動として、

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h(t))dx^2 + (1 - h(t))dy^2 + dz^2 \quad (2.1)$$

と書くことができ、これにより重力波がやってくると自由質点間の距離が変化する [2]。地球上にやってくる重力波の振幅は $h \sim 10^{-20}$ より小さいと考えられているので、重力波を検出することは自由質点間の超精密測長に帰着されると言える。

2.2 Target とする重力波源

重力波の源となる天体現象にはさまざまなものが考えられるが、Einsetein 方程式が数学的に複雑な形をしていることや天体現象には model の不定性が多いことなどから、理論的に波形を予測することは非常に難しい。その中であって、理論的な研究が進んでいて、かつ大きい振幅の重力波を出す現象と考えられているのが中性子星連星の合体である。そこで、LCGT ではこの中性子星連星の合体を主要な target とする。

中性子星連星の放出する重力波は合体の約 3 分前に 20Hz 程度になり、その後周波数を増しながら振幅も増していき、合体直前の周波数はおよそ 1kHz になる [2]。従って、この周波数領域を観測帯域として特に感度を上げておくように LCGT は設計される。ちなみに、地球から 200Mpc 離れた場所で中性子星連星の合体が起こったときにやって来る重力波の振幅は、 $h \sim 10^{-23}$ 程度になると考えられている。

2.3 レーザー干渉計による重力波検出

現在の重力波検出器の主流はレーザー干渉計である。レーザー干渉計を用いると 2 本の腕の相対変位を検出できる。ところで式 (2.1) から分かるように、重力波がやってくると空間距離が伸びる方向に垂直な方向が縮むから、レーザー干渉計は重力波検出に適していることが分かる。

最も簡単な例として、 x, y 方向に基線長 L の腕を持つ Michelson 干渉計に式 (2.1) で表される重

力波が入射したとき¹を考えてみよう．このとき重力波によって生じる2つの経路の光の位相差は，

$$\Delta\Phi_{\text{GW}}(t) = \int h(\omega)e^{i\omega t}H_{\text{M}}(\omega)d\omega, \quad (2.2)$$

$$H_{\text{M}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right)e^{-iL\omega/c} \quad (2.3)$$

と表せる [2]．ここで， Ω は用いる光の角周波数であり， $H_{\text{M}}(\omega)$ は角周波数 ω の重力波に対する干渉計の応答関数と考えることができる．Michelson 干渉計の感度は target とする角周波数 ω_0 を決めると $\omega_0/2\pi = c/4L$ の基線長で最大になり，このとき ω_0 以下の角周波数では平坦な応答を示し， ω_0 以上の角周波数では重力波の影響が積分されて感度が急速に低下する．

ここで，例えば 1kHz に最大感度を示すような基線長を計算してみると， $L = 75\text{km}$ となってしまふ．しかし，この基線長を地球上で実現するのは不可能である．そこで，Michelson 干渉計の両腕を Fabry-Perot cavity にし，光を干渉によって実効的に往復させることにより距離を稼ぐ方式が用いられる．このような干渉計は Fabry-Perot-Michelson 干渉計と呼ばれ，LIGO においてもこの方式が取られる．Fabry-Perot-Michelson 干渉計の概念図を図 2.1 に示しておく．

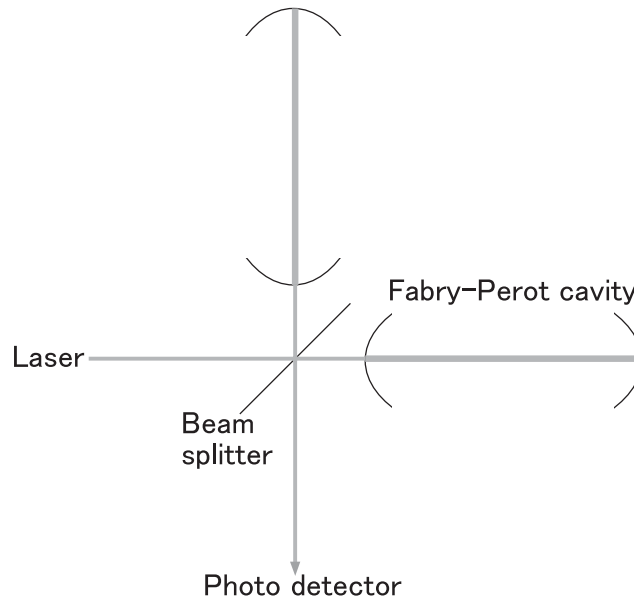


図 2.1: Fabry-Perot-Michelson 干渉計の概念図

2.4 レーザー干渉計の原理的な雑音

具体的な雑音について述べる前に再び x, y 方向に基線長 L の腕を持つ干渉計に式 (2.1) で表される重力波が入射したときを考えてみよう．このとき x 方向の距離変化は $Lh/2$ ， y 方向の距離変化は $-Lh/2$ であるから，2つの腕に経路差 Lh が生じる．このことから，鏡に変位 Δx をもたらず雑音があった場合，これを基線長で規格化した $h_{\text{noise}} = \Delta x/L$ を用いて重力波の振幅と直接比較しうる量に直して議論するのが普通である．

以下にレーザー干渉計に存在する原理的な雑音を簡単に紹介する．

¹即ち，干渉計が最も大きく応答するように入射したとき．

- Shot noise : 光の位相の量子力学的な揺らぎによる雑音 .
- Radiation pressure noise : 光子数の揺らぎに起因する鏡が受ける輻射圧の揺らぎによる雑音 .
- Thermal noise : 懸架系や鏡の機械的振動が熱的に励起されることによる雑音 .
- Seismic noise : 地面振動による雑音 .

2.5 LCGT の概要

LCGT は基本的には TAMA300 の 10 倍のスケールの干渉計ということになるが、最大の差異は低温鏡を用いることである . これによって 100Hz 付近における感度が鏡の熱雑音で limit されずに済むのである . 他にも high power laser や高性能な防振系を導入すること、地面振動の静かな神岡鉱山内に作ることなどが特徴的である .

LCGT の default のデザインにおける基本的なパラメータを以下に列挙する .

- 干渉計の方式
 - Power recycled Fabry-Perot-Michelson interferometer with RSE ²
- Laser
 - 波長 : $\lambda = 1.064 \times 10^{-6} \text{m}$
 - 干渉計への入射光強度 : $P_0 = 100 \text{W}$
- Main cavity
 - 基線長 : $L = 3 \text{km}$
 - finesse : $\mathcal{F} = 1250$
 - storage time : $\tau = 2L\mathcal{F}/\pi c = 7.96 \times 10^{-3} \text{s}$
 - cut-off 周波数 : $f_{\text{cavity}} = 1/2\pi\tau = 20 \text{Hz}$
 - 鏡におけるビーム径³ : $w_0 = 3 \text{cm}$
- Power recycling 及び RSE
 - power recycling gain : $G_{\text{power}} = 10$
 - signal bandwidth gain : $G_{\text{width}} = 10$
 - storage power in cavities : $P_{\text{cavity}} = (2\mathcal{F}/\pi)G_{\text{power}}P_0 = 0.796 \text{MW}$
 - 干渉計の cut off 周波数 : $f_{\text{cut}} = G_{\text{width}}f_{\text{cavity}} = 200 \text{Hz}$
- 中段マスから鏡までの suspension
 - 材質 : sapphire fiber

²Power recycling は入射光を実質的に増幅させる手法で、既に TAMA300 で実用化されている . RSE については [3] 参照 .

³振幅の 2 乗が e^{-2} 倍になるところで定義してある .

- wire の直径 : $d_{\text{wire}} = 1.8\text{mm}$
- wire の本数 : $n=4$
- 中段マスの温度 : $T_I = 10\text{K}$
- wire の loss angle : $\phi_{\text{wire}} = 2 \times 10^{-7}$
- suspension system の Q-value : $Q_{\text{pen}} = 1.2 \times 10^8$

• 鏡

- 材質 : sapphire
- 半径 : $r = 15\text{cm}$
- 厚さ : $H = 18\text{cm}$
- 質量 : $m = 50.9\text{kg}$
- 温度 : $T_M = 20\text{K}$
- 基材の Q-value : $Q_{\text{mirror}} = 10^8$
- coating の厚さ : $d_{\text{coat}} = 5\mu\text{m}$
- coating の loss angle : $\phi_{\text{coat}} = 4 \times 10^{-4}$

LCGT における鏡の懸架系の概略は図 2.2 のようになっている．レーザー干渉計型重力波検出器の基本的な特徴として，鏡は吊るされなければならない．これは水平面内の運動に関して鏡を自由質点と扱えるようにするためである．また，同時に防振の役割も果たす．

LCGT では 2 段振り子によって鏡は吊るされる．中段マスは室温の低周波防振装置から懸架されており，熱流入を防ぐためにここに用いる wire は伝熱特性の非常に悪い素材が用いられる．逆に中段マスから鏡を吊るす wire は伝熱特性の非常に良い sapphire が用いられる．これは鏡の光吸収により発熱した熱量を効率良く逃がすためである．また，中段マス以下の部分は輻射による熱流入を防ぐため radiation shield で覆われる．Radiation shield は 4K 冷凍機と接続されていて，外部からの熱流入と平衡になる温度 (8K 程度と考えられている) になっている．以上のことに加え，装置全体は高真空中に置かれることから，鏡を冷やすための伝熱経路，即ち heat link が中段マスと radiation shield の間に作られなければならない．

ここで，上述のパラメータの下での LCGT の各雑音の power spectrum を図 2.3 に示しておく [4]．LCGT の感度はこれらの雑音の 2 乗和の平方根で limit され，その曲線が LCGT の感度曲線となる．

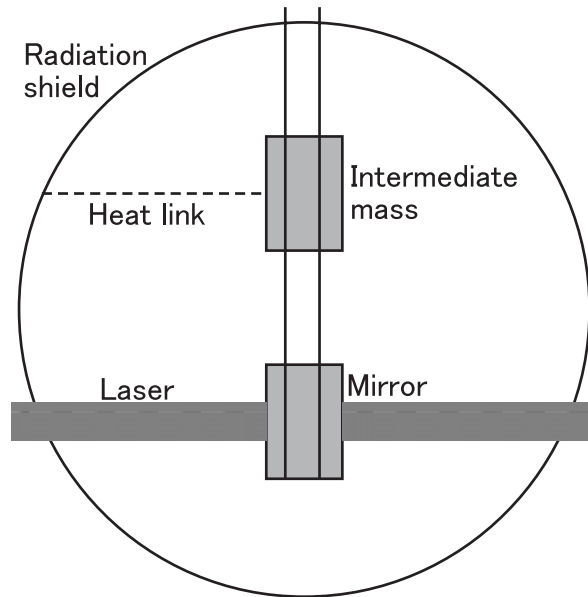


図 2.2: LCGT における鏡の懸架系 (鏡が吊るされるのは水平面内の運動に関して自由にするこ
とと防振の 2 つの目的からである。また防振の観点から 2 段振り子になっていて、これらは輻射に
よる熱流入を防ぐために radiation shield 内に入れられる。Radiation shield は冷凍機に接続され
ていて温度は 8K 程度である。鏡は中段マスから伝熱特性の良い sapphire fiber で懸架され、中段
マスとさらに上段のステージの間は熱的に絶縁される。懸架系全体は高真空中に置かれ、heat link
は中段マスと radiation shield の間の伝熱経路になる。)

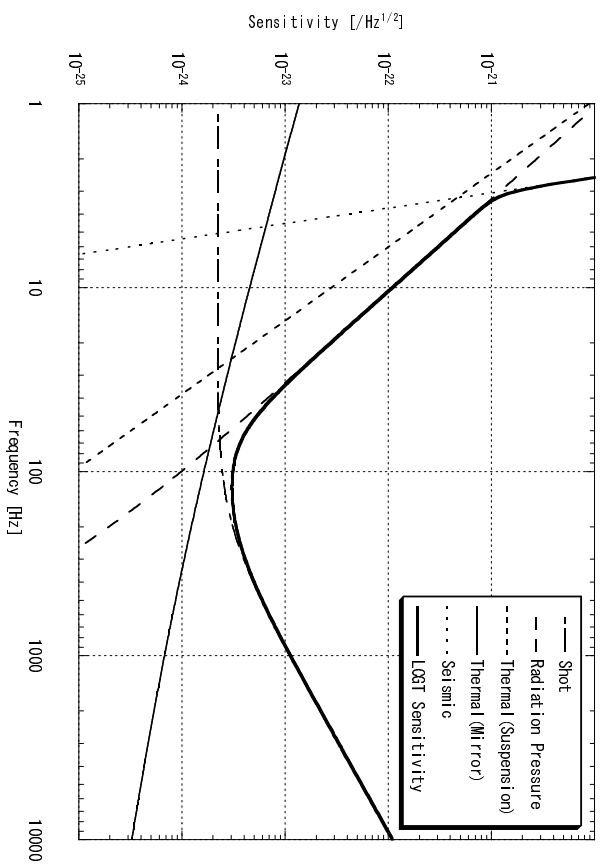


図 2.3: LCGT の各雑音と感度曲線

第3章 本研究の概要

3.1 本研究の主題

LCGT では低温鏡を用いることにより、鏡の熱雑音を低減する。

鏡を冷却するためには heat link が必要であるが、当然その経路から振動も伝達されることになるし、heat link 自体の熱雑音も存在する。そのため、heat link は慎重に設計される必要がある。

Heat link に要求される性能は次の3点に集約される。

- 鏡の温度を低く保つために、十分な熱流を確保できる。
- 機械的に充分柔らかく、地面振動の導入が小さい。
- 散逸が小さく、heat link 自体の熱雑音が小さい。

これらの観点から良い伝熱体として知られ、そして比較的柔らかい (i.e. Young 率の小さい) 高純度の Al 及び Cu の fiber の低温における特性を調べる。調べるべき特性は3点の要請に応じて、以下のようになる。

- 熱伝導率
- Young 率
- Q-value

熱伝導率に関しては、その値を測るだけでなく、size effect¹の有無も調べなければならない。同じ熱流を確保するためには、熱伝導率が直径に依存しなければ細くて本数の多い fiber を用いることにより全体として機械的に柔らかくできてよいのであるが、size effect が存在するとあまり細かい fiber を用いることができない可能性があるからである。また、純金属はクオリティが下がりやすく、繊細な取り扱いが必要とされているため、heat link として用いる上で問題にならないかどうか調べておく。

以上より、第4章で熱伝導率の測定を行うとともに size effect の影響とクオリティの悪化について調べ、第5章で Young 率と Q-value を測定する。それらの結果を踏まえた上で第6章において、requirement を全て満足する heat link が構成できるかどうか議論する。

3.2 用いた heat link の候補材

今回の測定に用いられた heat link 材の候補となる純金属 fiber のスペックについて以下に示す。

- 5N Aluminum(Al) fiber

¹ fiber を細くしていくと直径に比例して熱伝導率が減少してしまう効果。鏡の懸架に用いる sapphire fiber における size effect は実際に見出されている [5]。

- 線径： $\phi 1.99, \phi 1.00, \phi 0.50, \phi 0.20$
- 加工履歴： $\phi 10$ の中間品を伸線加工後に真空度 10^{-3}Pa 以下， 500°C で1時間アニール．
- 7N Copper(Cu) fiber
 - 線径： $\phi 1.00, \phi 0.20$
 - 加工履歴： $\phi 10$ の中間品を伸線加工後に真空度 10^{-3}Pa 以下， 500°C で1時間アニール．

3.3 低温実験について

本研究で行われる実験の目的は低温における純金属 fiber の特性評価であるから，全ての実験は極低温における真空中で行われた．用いた寒剤は液体ヘリウム及び液体窒素である．図 3.1 に本実験で用いたクライオスタット及びそれにインストールされる真空容器の概略図を示す．各実験のセットアップはここに示されている真空容器の蓋の部分にとりつけられる．また，温度計としては CGR(Carbon-Glass Resistance) 温度計を用いた．CGR 温度計は抵抗値が大きい温度依存性を持つことから，抵抗値を測定することにより温度が分かる原理になっている²．また低温において非常に高い感度を持つ．この抵抗値の測定の際には4端子法³を用い，かつ電流の向きを変えて電圧を測定し平均値をとることにより，接触抵抗や熱起電力の影響を排除する．

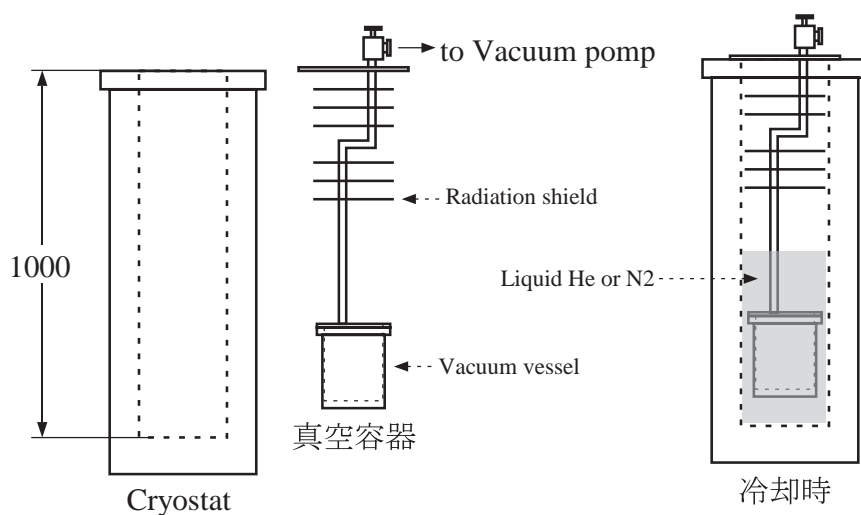


図 3.1: 実験に用いたクライオスタット及び真空容器

²今回用いた CGR 温度計は 10K において抵抗値 $R \sim 10^2\Omega$ ，微係数 $dR/dT \sim -10\Omega/\text{K}$ のような特性を持っていた．流した電流は $10 - 10^2\mu\text{A}$ 程度である．

³4端子法については 4.2.2 において再び紹介する．

第4章 Al及びCuの伝熱特性の評価

4.1 実験の目的

Heat link の材料に要求される特性として、十分な熱流が確保できなければならない。即ち、熱伝導率が高くなければならない。

本研究では、heat link の候補材として高純度の Al 及び Cu fiber を用意したのであるが、同じ純度であっても熱伝導率の値が大きく異なってしまうことが報告されているため [6]、熱伝導率の今回の測定値が実際に heat link で用いられる材料にそのまま適用できない恐れがある。しかしながら、金属の熱伝導の基礎理論によれば、常温 (300K) と液体ヘリウム温度 (4.2K) における電気抵抗率の比である RRR をクオリティの指標として用いることにより熱伝導率の値を説明することができる¹。そこで、まず実際に熱伝導率を測定するとともに RRR も測定し、それらに対応関係が見出せるかどうか議論する。

次に、細い fiber が使用可能かどうか調べるために、size effect について議論する。

加えて、変形によるクオリティの悪化が大きく、現実の使用に適さない可能性がないかどうか調べておくことにする。

4.2 実験の原理と方法

4.2.1 熱伝導率測定

断面積 S の fiber に沿って (x 軸にとる)1 次元的な温度分布 $T(x)$ が存在し、熱流 J が流れて定常状態に達しているとき、熱伝導率 $\kappa(T)$ は、

$$J = -\kappa(T)S \frac{dT}{dx} \quad (4.1)$$

即ち、

$$\kappa = -\frac{J}{S} \left(\frac{dT}{dx} \right)^{-1} \quad (4.2)$$

で定義される。

図 4.1 のようなセットアップにおいて、ヒーターによって既知の熱流 J を流し、距離 L 隔たった 2 点の定常状態における温度 $T_H, T_L (T_H > T_L)$ を測定すれば、

$$\kappa \left(\frac{T_H + T_L}{2} \right) = \frac{J}{S} \frac{L}{T_H - T_L} \quad (4.3)$$

により熱伝導率が求まる²。ただし、この式は熱伝導率の温度変化に対して温度差 $T_H - T_L$ が小さいときのみ成り立つ。実際の測定においては、4-10K 付近までは 100mK の order、それ以上で

¹金属の熱伝導に関する基礎的な議論は付録 A 参照。

²このような熱伝導率の測定方法は longitudinal heat flow method と呼ばれている。

は数 K 程度の温度差を付けた。また、 $L = 100\text{mm}$ と設計し、流した熱量は $1\text{-}10\text{mW}$ の order である。

以下にこの測定において注意した事項を挙げる。

- Heater や CGR 温度計の電線からの熱流出を防ぐために、熱抵抗の大きいマンガニン線を経路の途中に挟む。これにより熱流出は数 % 以下に防いだ。
- マンガニン線は電気抵抗も大きいのでそこでの発熱も問題となる。CGR 温度計に流す電流は充分小さくとったので問題なかったが、ヒーターの発熱量には 10% 程度の不定性が残った。(これが本測定における主要な誤差の要因となった。)
- 純金属 fiber は非常に柔らかいので、装置を支持する棒が必要になったが、これにも熱抵抗の大きい glass fiber を用いた。これにより熱流出を数 % 以下に防いだ。
- Clamp 部分に 7N の Al 板を挟み、接触抵抗の影響と測定サンプルをとりつける block 内で温度勾配ができることを防いだ。
- 定常状態に達していることを温度の時間変化をチャートレコーダーで記録することによりよく確認してから測定を行った。(熱流を流しはじめてから定常状態に達するまで 10K 付近の測定で数時間、80K 付近の測定で 1 日程度かかった。)

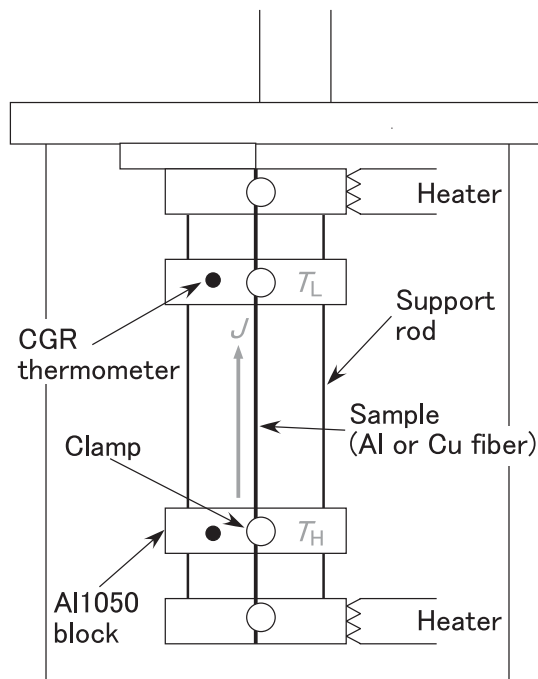


図 4.1: 熱伝導率測定のセットアップ (外側の容器は低温実験系の図 3.1 で示した真空容器であり、真空度は常に $2 \times 10^{-3}\text{Pa}$ 以下で測定した。上部のヒーターで装置全体の温度を調節し、下部のヒーターから熱流 J を流す。これによって生じる温度差は CGR 温度計により 2 点の温度 T_H, T_L を測定することにより分かる。Clamp 部分には 7N の Al 板を挟むことにより接触抵抗の影響と Al1050 block 内で温度勾配ができることを防ぎ、支持棒には熱抵抗の大きい glass fiber を用いている。)

4.2.2 RRR 測定

抵抗値の測定は，fiber を絶縁体の板に絶縁テープで固定した後に銅線をハンダ付けし，4 端子法を用いて行った．4 端子法では図 4.2 のように fiber に 4 つの端子をとりつけ外側の 2 端子から既知の電流 I を流し，内側の 2 端子間の電圧 V を測定することにより，この部分の抵抗値 $R = V/I$ が求まる．4 端子法は端子の取り付け部分における接触抵抗の影響を受けないため，純金属のような非常に電気抵抗の小さいものの抵抗値の測定に適している．また，電流の向きを変えて測定して平均をとることにより，熱起電力の影響も排除した．

この方法により常温における抵抗値 R_{300K} をまず測定し，次に fiber を取り付けた板を液体 He デュワーに挿入して 4.2K における抵抗値 $R_{4.2K}$ を測定する³．この測定の間端子は取り付けたまなので抵抗値の比がそのまま抵抗率の比になり，fiber の RRR は，

$$\text{RRR} = \frac{R_{300K}}{R_{4.2K}} \quad (4.4)$$

によって求まる．

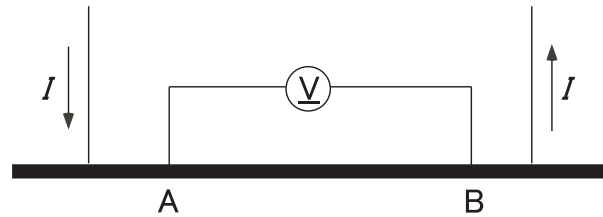


図 4.2: 4 端子法概念図 (AB 間の電気抵抗が接触抵抗の影響を受けずに測定できる.)

4.3 実験結果

4.3.1 熱伝導率と RRR の対応

熱伝導率の測定値と RRR の測定値に対応して予測される熱伝導率の値とを plot にしたのが図 4.3~4.8 である．予測値の計算式は Al については，

$$\kappa^{(\text{Al})}(T) = \frac{1}{1.83 \times 10^{-7} T^2 + 1.09/\text{RRR}/T} \text{W/m/K}, \quad (4.5)$$

Cu については，

$$\kappa^{(\text{Cu})}(T) = \frac{1}{6.41 \times 10^{-8} T^{2.4} + 0.685/\text{RRR}/T} \text{W/m/K} \quad (4.6)$$

である⁴．

この結果から，熱伝導率と RRR の測定値から両者の関係を factor 程度まで説明できると言える．また，今回用いた fiber の熱伝導率は 10K 付近で 10^4W/m/K を超えることが分かった．

³4.2K における抵抗値は非常に小さく，10mm 程度の長さの fiber で $\mu\Omega$ 以下になってしまうので，ナノボルトメーターを用いて測定した．

⁴この式の詳細については A.4 を参照．

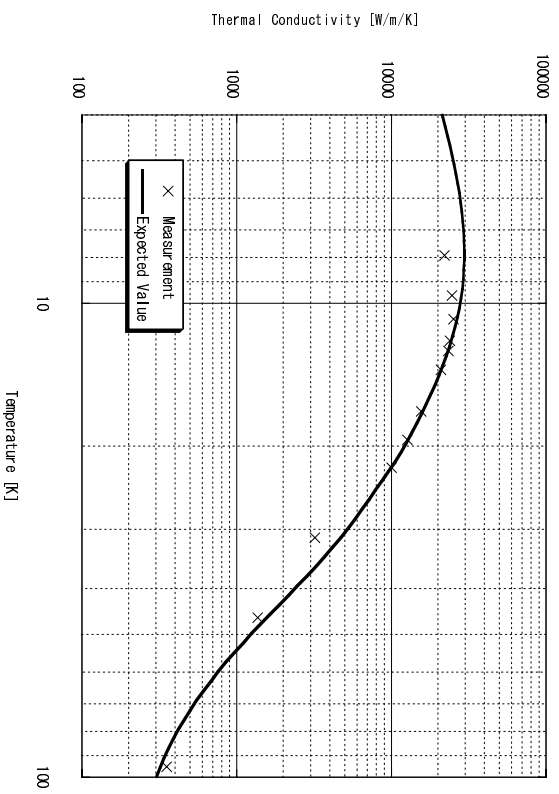


図 4.3: Alφ1.99 fiber の熱伝導率の測定値と予測値 (RRR の測定値は 6200)

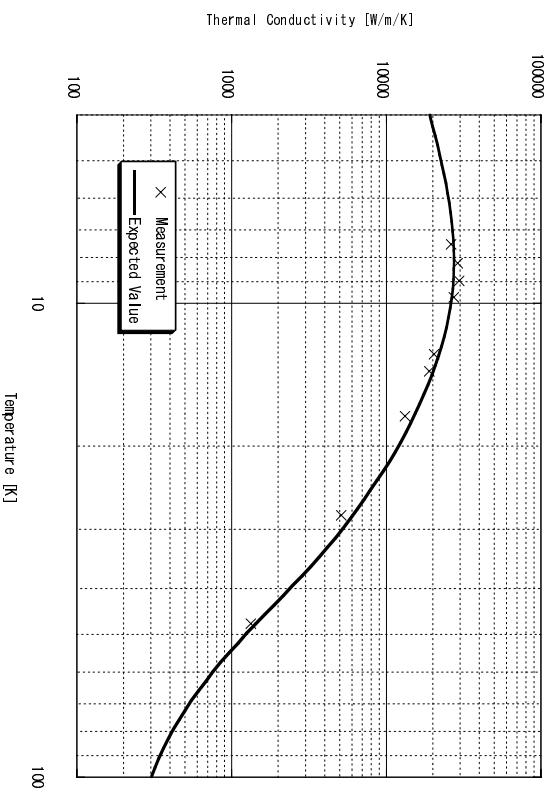


図 4.4: Alφ1.00 fiber の熱伝導率の測定値と予測値 (RRR の測定値は 5500)

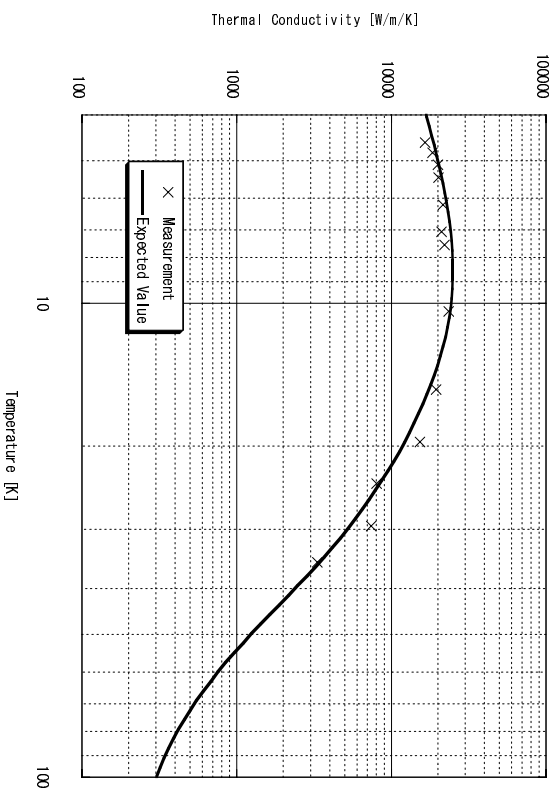


図 4.5: Alφ0.50 fiber の熱伝導率の測定値と予測値 (RRR の測定値は 4800)

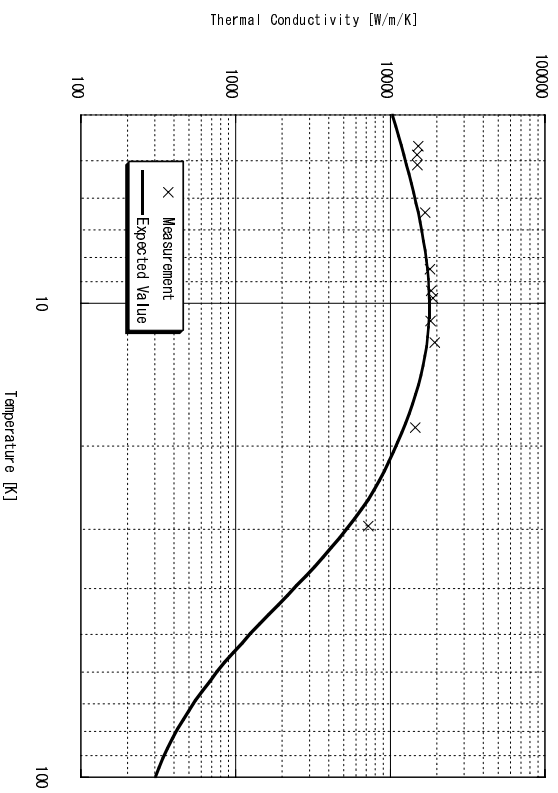


図 4.6: Alφ0.20 fiber の熱伝導率の測定値と予測値 (RRR の測定値は 2900)

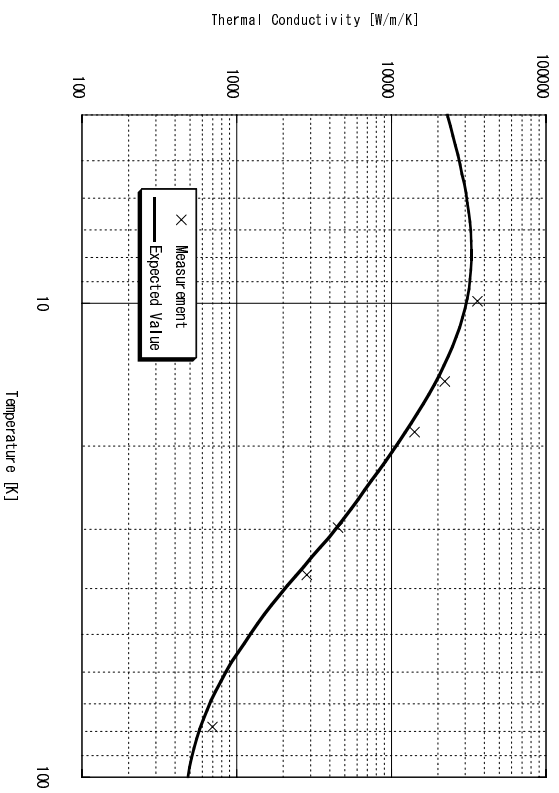


図 4.7: Cuφ1.00 fiber の熱伝導率の測定値と予測値 (RRR の測定値は 4100)

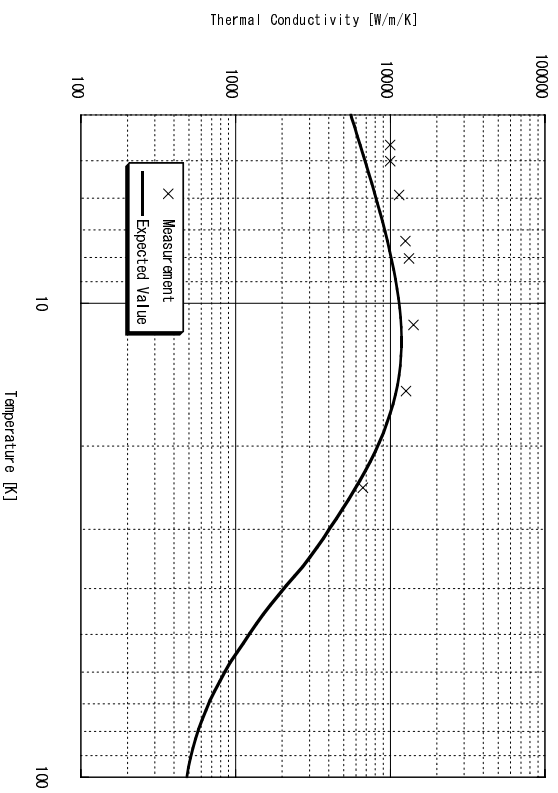


図 4.8: Cuφ0.20 fiber の熱伝導率の測定値と予測値 (RRR の測定値は 960)

4.3.2 Size effect

前節において熱伝導率と RRR の対応関係を見出せたので，size effect について RRR を用いて議論することにする．

図 4.9 は各直径の fiber の RRR の測定値と直径により limit される RRR の上限値を示したものである．RRR の原理的な上限値は Al については，

$$\text{RRR}_{\text{limit}}^{(\text{Al})} = 1.98 \times 10^4 \left(\frac{d}{0.2\text{mm}} \right), \quad (4.7)$$

Cu については，

$$\text{RRR}_{\text{limit}}^{(\text{Cu})} = 7.03 \times 10^3 \left(\frac{d}{0.2\text{mm}} \right) \quad (4.8)$$

となっている⁵．

Size effect があれば直径が細くなると，RRR の直径に比例した低下が見られるはずであるが，今回用いた $\phi 0.2$ 程度までの細さであれば，直径に比例した RRR の低下は顕わになっていない．このことは，使用した fiber の RRR が直径で limit される限界値に全く達していないことが明らかに見て取れることから当然の結果であると言える．

しかし，直径が細くなるにつれ RRR のいくらかの低下が見られる．この原因としては，直径が細いものの方が伸線加工時の線引き回数が増えることやその後のアニール時に表面積に対する体積比率が小さいことにより不純分子濃度が大きくなってしまふことにあると推測している．

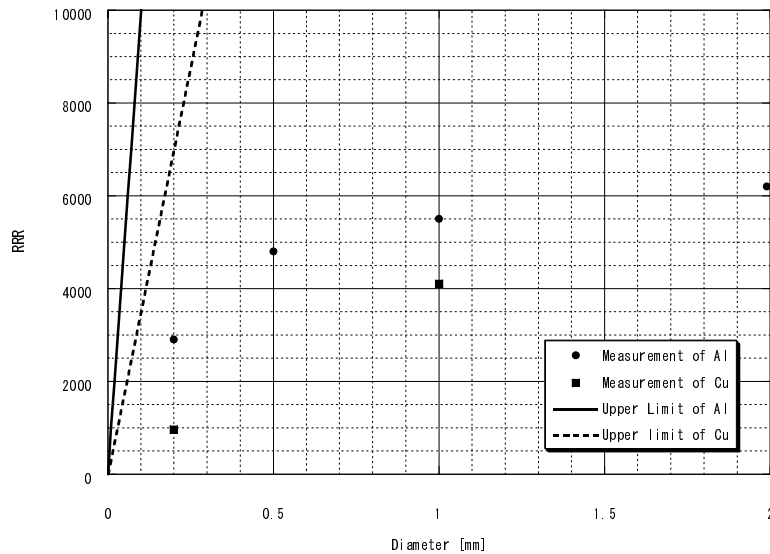


図 4.9: 各径の fiber の RRR の測定値と直径で limit される限界値

⁵この式の詳細については A.5 を参照．

4.3.3 曲げによる影響

図 4.10 のように Al ϕ 0.50 及び Cu ϕ 0.20 fiber を 50 回湾曲させ、その前後で電気抵抗値がどの程度変化するか調べた。その結果を表 4.1 及び 4.2 に示す。RRR の変化は fiber のクオリティの低下による熱伝導率の変化に対応し、電気抵抗値の変化は fiber の幾何学的変形による熱抵抗の変化に対応する。

この結果は定量的なものとは言えないが、fiber を heat link として利用する際に変形させることや人間の手で取り扱う際に入る歪みによる熱抵抗の上昇はせいぜい 10% 程度であることを示しており、通常の使用には充分耐え得ると結論できる。

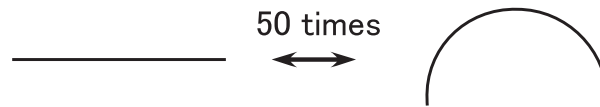


図 4.10: 曲げによる影響を見たときの変形の仕方

表 4.1: Al ϕ 0.50 fiber の変形による電気抵抗の変化

	変形前	変形後	変化の割合
RRR	4650	4160	10%
$R_{293K}[m\Omega]$	14.13	14.18	0.4%

表 4.2: Cu ϕ 0.20 fiber の変形による電気抵抗の変化

	変形前	変形後	変化の割合
RRR	1310	1260	4%
$R_{293K}[m\Omega]$	77.12	77.30	0.2%

第5章 Al及びCuの機械的特性の評価

5.1 実験の目的

Heat link の材料に要求される機械的特性として、振動の伝達が小さく、また熱雑音が小さくなければならない。即ち、Young 率は小さく、Q-value は大きくなければならない。

ここでは、用意した Al 及び Cu fiber の Young 率と Q-value を測定する。

5.2 実験の原理と方法

図 5.1 のように fiber に小さい質量を吊るした振り子にして、振動を励起しその自由減衰を測定する。用いたのは Al ϕ 0.20 及び Cu ϕ 0.20 fiber であり、振り子のパラメータは Al が、

$$l^{(Al)} = 125\text{mm}, m^{(Al)} = 457\text{mg} \quad (5.1)$$

Cu が、

$$l^{(Cu)} = 125\text{mm}, m^{(Cu)} = 585\text{mg} \quad (5.2)$$

である。

図 5.1 の A 点付近には振動方向と垂直に LED と photo detector を fiber を挟むように設置しており、LED から出た光の一部は fiber によって遮られ、残りが phot detector に入射する¹。このとき微小振動であれば入射光の強度は振り子の変位に比例するから、photo detector の出力信号から変位の相対変化が分かる。

測定する値は振り子の共振周波数 f_R と pendulum mode の自由減衰の Q-value Q_P であるが、まず比較的大きく揺らし spectrum analyzer で f_R を測定する。次に、lock-in-amplifier で周波数 f_R の成分の amplitude の時間変化を測定し、式

$$\text{Amplitude} \propto \exp\left(-\frac{\pi f_R}{Q_P} t\right) \quad (5.3)$$

で fitting して Q_P を求める²。

f_R, Q_P の測定値から fiber 自体の Q-value Q 及び Young 率 E を計算する方法は以下の通りである。

重力と弾性力の復元力のばね定数を $k_{\text{grav}}, k_{\text{elas}}$ とし、

$$f_{\text{grav}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{grav}}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, f_{\text{elas}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{elas}}}{m}} \quad (5.4)$$

¹即ち、shadow sensor の原理である。

²スタイキャストによるクランプ部分で Q-value が limit される可能性があるが、付録 D に示す補足実験によりその可能性は排除した。

とおけば，

$$f_R^2 = f_{\text{grav}}^2 + f_{\text{elas}}^2 \quad (5.5)$$

であり，

$$Q = \frac{k_{\text{elas}}}{k_{\text{grav}} + k_{\text{elas}}} Q_P = \frac{f_{\text{elas}}^2}{f_R^2} Q_P \quad (5.6)$$

より³，

$$Q = \left[1 - \left(\frac{f_{\text{grav}}}{f_R} \right)^2 \right] Q_P \quad (5.7)$$

によって Q が計算できる．次に， $\alpha = \sqrt{mg/EI}$ (I は fiber 断面の慣性モーメント) とおけば，

$$k_{\text{elas}} = \frac{mg}{l} \frac{\tanh \alpha l}{\alpha l - \tanh \alpha l} = m(2\pi f_{\text{elas}})^2 \quad (5.8)$$

より⁴，

$$\frac{\tanh \alpha l}{\alpha l - \tanh \alpha l} = \left(\frac{f_R}{f_{\text{grav}}} \right)^2 - 1 \quad (5.9)$$

となるから，これを αl を変数として数値的に解き，その解を γ とすれば，

$$E = \frac{mgl^2}{\gamma^2 I} \quad (5.10)$$

により Young 率 E が計算できる．

5.3 実験結果

測定結果を表 5.1，5.2 に示す．また，振動の自由減衰の測定例を図 5.2，5.3 に示す．

8K における Q-value は，Al が 300，Cu が 1600 程度であることが分かった⁵．

Young 率に関しては，文献値は大体 Al が 7×10^{10} Pa，Cu が 12×10^{10} Pa とされているが，測定値は Al が 8K で 4×10^{10} Pa と文献値より factor 0.6 程度小さく，Cu は 13×10^{10} Pa と差はほとんどなかった．ただし，文献値に用いられているものの純度は今回用いたものほど高くはないと思われるので，その差が Al においては顕著であった可能性がある．

³C.2 参照．

⁴B.1 参照．

⁵Al の Q-value の測定例としては [7] があり，本実験の測定値より 10^2 程度大きい報告もある．ただし，本実験とは形状や振動の mode が全く異なっている．

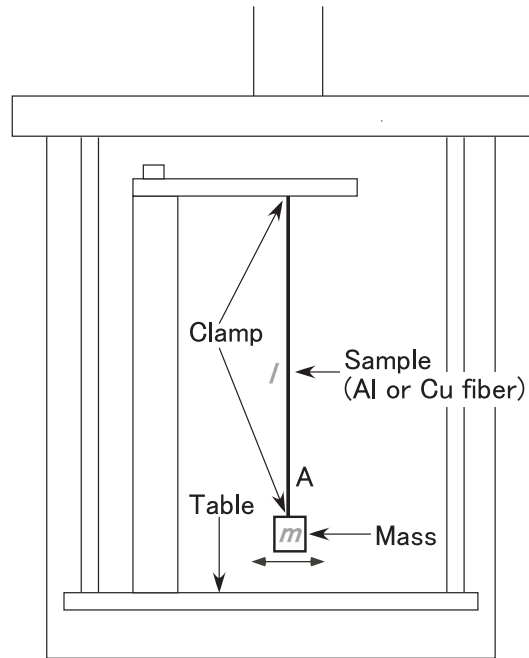


図 5.1: Young 率及び Q-value 測定のセットアップ (外側の容器は低温実験系の図 3.1 で示した真空容器であり, 真空度は常に 2×10^{-3} Pa 以下で測定した. Table 部分は熱伝導率の良い銅で作られているので, 装置内の温度分布は生じないものと考え, とりつけられた CGR 温度計の読みを装置全体の温度とみなした. 振り子のおもりは小さな Al ブロックであり, 磁石で加振するための小さい鉄棒をとりつけてある. Clamp 部分はスタイキャストを用いて固めた. 振動の励起は, おもりの横にとりつけた電磁石によって行った. また, A 点付近に振動方向と垂直に fiber を挟むように LED と photo detector を設置して変位の測定に用いた.)

表 5.1: Al ϕ 0.20 fiber の Q-value 及び Young 率の測定

T [K]	f_R [Hz]	Q_P	Q	$E \times 10^{-10}$ [Pa]
293	1.567	792.3	151.6	3.265
78	1.594	1193	260.7	4.258
8	1.596	1567	345.6	4.337

表 5.2: Cu ϕ 0.20 fiber の Q-value 及び Young 率の測定

T [K]	f_R [Hz]	Q_P	Q	$E \times 10^{-10}$ [Pa]
293	1.683	1603	479.4	10.24
78	1.764	1606	581.2	15.19
8	1.727	4856	1623	12.88

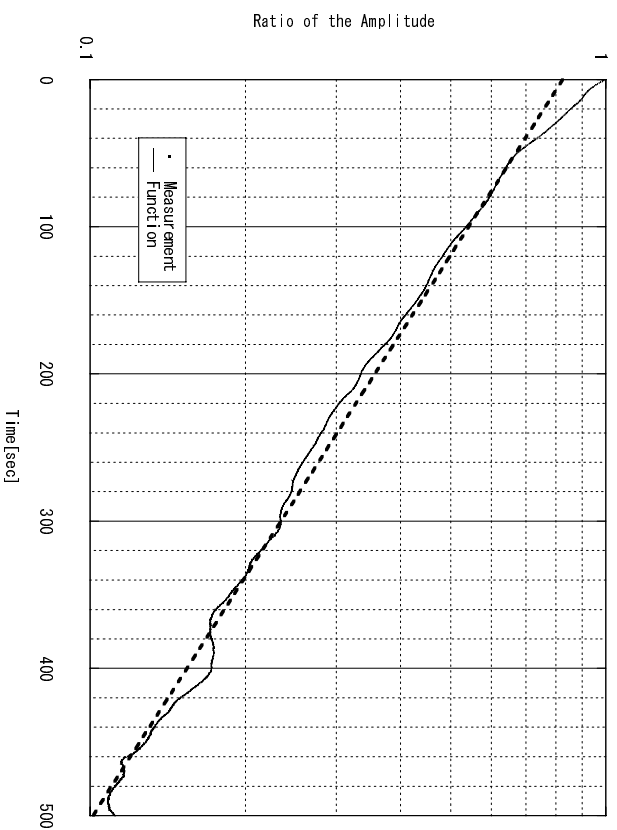


図 5.2: Alφ0.20 fiber の振幅の時間変化測定例 (@78K)

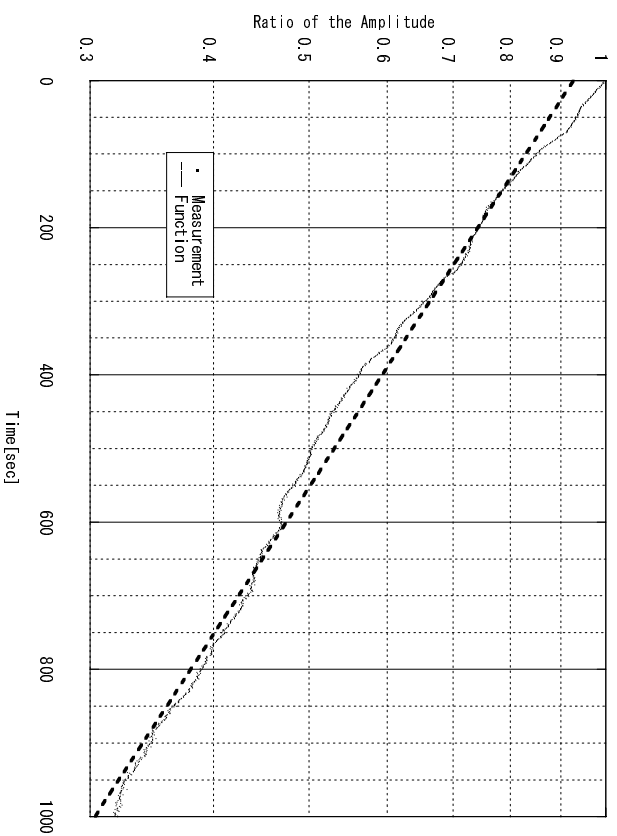


図 5.3: $\Delta\phi 0.20$ fiber の振幅の時間変化測定例 (@8K)

第6章 Heat linkの構成

ここでは今までの結果を踏まえて、requirement を全て満足する heat link が構成できるかどうか議論する。議論の流れとしては、まず材質を選定し、形状を決める。次に伝熱面からの要請を考慮して、fiber の直径と本数を決めてしまう。そして、その設定で導入される雑音の問題ないかどうか調べる。

6.1 Heat link の材質及び形状

まず、Heat link に用いる材質を決めよう。5N の Al と 7N の Cu について特性評価を行ったわけであるが、以下に材質選定のための要点を列挙する。

- 熱伝導率はほとんど変わらない。
- Al の方が柔らかい (i.e. Young 率が小さい)。
- Cu の方が低温における Q-value が高いが、Young 率まで含めて考えると熱雑音の大きさはどちらも大差ない。

以上のことを考えれば Al を選ぶのが妥当であろう¹。Heat link の基本的なスペックは次のようにする。

- 5N 程度の高純度 Al fiber で RRR は 5000 程度のものを用いる。
- $r = 20\text{cm}$ の半円形状にする。

半円形状にすることは、振動の伝達を考えると直線的に繋ぐのは明らかに良くないことと計算のしやすさから決めた²。また、曲率半径はクライオスタットの大きさから概算した。

fiber の直径 d 及び本数 n は未定のパラメータとなるが、既に size effect が効かないことを確認しているので流せる熱量は nd^2 に比例すると言え、ばね定数が nd^4 に比例することを考えると、確保する熱流が決まっている場合には細い fiber をたくさん取り付けた方が防振の観点から見て得である。詳細な議論は次節以降に行う。

また、今回の実験における測定値から、10K 付近における Al fiber の物性値として以下を採用する。

- Young 率: $E = 4 \times 10^{10}\text{Pa}$
- loss angle: $\phi = 3 \times 10^{-3}$

加えて、structure damping³を仮定する。

¹これに加え 5N の Al と 7N の Cu では手に入りやすさも、費用も比べ物にならない。

²宇宙線研究所地下にある CLIK でもこの形状が採用されている。

³C.1 参照。

6.2 伝熱面からの要請

必要な熱流量は鏡における光吸収と外部からの熱流入で決まるが、現在の LCGT のデザインから $J = 1\text{W}$ あれば充分であり、中段マスの温度⁴は $T_1 = 14\text{K}$ 、 4K 冷凍機と接続されている radiation shield の温度は $T_S = 8\text{K}$ とする [8]。また、 $\Delta T = T_1 - T_S$ とおく。

熱伝導率の実効値を

$$\kappa_{\text{eff}} = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_S}^{T_1} \kappa(T) dT \quad (6.1)$$

と定義すれば、これは図 4.5 に示した結果から $2 \times 10^4 \text{W/m/K}$ を期待できるから、熱流を確保する要請より、

$$J < n \kappa_{\text{eff}} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{\Delta T}{\pi r}, \quad (6.2)$$

即ち、

$$\left(\frac{n}{30}\right) d^2 > (0.47\text{mm})^2 \left(\frac{J}{1\text{W}}\right) \left(\frac{2 \times 10^4 \text{W/m/K}}{\kappa_{\text{eff}}}\right) \left(\frac{6\text{K}}{\Delta T}\right) \left(\frac{r}{20\text{cm}}\right) \quad (6.3)$$

を得る。ここで、 d をなるべく小さくしたいが、現実的な数値として $n = 30$ を選び、それに対応して d を決めることにする。従って、

$$d = 0.5\text{mm}, \quad n = 30 \quad (6.4)$$

を採用する。次節以降において heat link から導入される雑音がこの設定で問題ないか議論する。

6.3 Heat link から導入される雑音

図 6.1 のような model を用いて heat link から導入される雑音を推定しよう。LCGT の default のパラメータに合わせて、中段マスと鏡の質量は $M_1 = M_M = M = 50\text{kg}$ 、上段のステージから中段マスを吊るす wire と中段マスから鏡を吊るす wire の長さを $l_1 = l_M = l = 50\text{cm}$ として計算することとする。また、中段マスを鏡として作られる補助干渉計による効果もとりにいれて議論をする。補助干渉計は実効的に各鏡の間の中段マスが非常によく防振された剛体で繋がれているように見なせる効果をもたらし、光軸方向の振動を $1/100$ 程度に抑えられると期待されている⁵。

ここで、先に heat link の 1 本当たりの光軸方向のばね定数を計算しておくとして、

$$\begin{aligned} k_{\text{H.L.}} &= \frac{1}{25} \frac{E d^4}{r^3} \\ &= 9.7 \times 10^{-3} \text{N/m} \times \left(\frac{E}{4 \times 10^{10} \text{Pa}}\right) \left(\frac{d}{0.5\text{mm}}\right)^4 \left(\frac{20\text{cm}}{r}\right)^3 \end{aligned} \quad (6.5)$$

であり、縦方向のばね定数はこの $1/3$ である⁶。

6.3.1 光軸方向の振動

まず、

$$\frac{n k_{\text{H.L.}}}{Mg/l} = 3 \times 10^{-4} \quad (6.6)$$

⁴2.5 では 10K としてあるが、その後の議論で変更になった。

⁵補助干渉計に関する最近の研究では [9] がある。詳細はそちらを参照。

⁶B.2 参照。

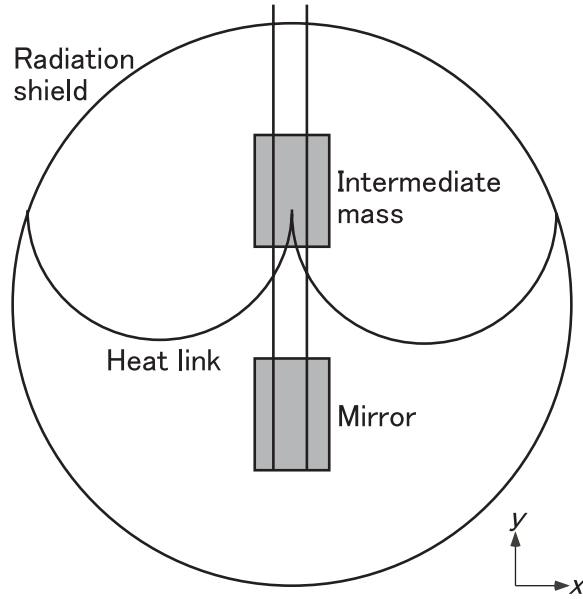


図 6.1: Heat link から導入される雑音の計算ための model(振り子に余計な非対称性を持ち込まないように heat link は中段マスの両側に $n/2$ 本ずつとりつけられる予定である．Clamp に関する詳細は決まっていない．座標軸は， x 軸が光軸方向， y 軸が縦方向を示している．)

であるから，伝達関数を求めるときには heat link の復元力は無視することになると，鏡の運動方程式

$$-M\omega^2 \tilde{x}_M + \frac{Mg}{l}(\tilde{x}_M - \tilde{x}_I) = 0, \quad (6.7)$$

及び中段マスの運動方程式

$$-M\omega^2 \tilde{x}_I + \frac{2Mg}{l}\tilde{x}_I + \frac{Mg}{l}(\tilde{x}_I - \tilde{x}_M) = \tilde{F} \quad (6.8)$$

より，鏡の伝達関数は，

$$H(\omega) = \frac{\tilde{x}_M}{\tilde{F}} = \frac{g}{Ml\omega^4 - 4\omega_l^2\omega^2 + 2\omega_l^4} \quad (6.9)$$

となる．ここで， $\omega_l = \sqrt{g/l}$ とした．

では，まず地面振動の導入を考えよう．Radiation shield は防振されていないため⁷地面振動がそのまま伝わっているので，神岡の地面振動の power spectrum として

$$\sqrt{G_{\text{seismic}}(f)} = \frac{10^{-9}}{f^2} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (6.10)$$

を用いれば，これに対応して生じる heat link の復元力の power spectrum は，

$$\sqrt{G_{F,\text{seismic}}(f)} = nk_{\text{H.L.}} \sqrt{G_{\text{seismic}}(f)} \quad (6.11)$$

となり，補助干渉計のゲインを G_{SPI} とすれば鏡の変位雑音の power spectrum は，

$$\sqrt{G_{x_M,\text{seismic}}(f)} = G_{\text{SPI}} |H| \sqrt{G_{F,\text{seismic}}(f)} \quad (6.12)$$

⁷冷凍機の振動は途中の伝熱経路でカットされるように設計される．

となる．これを鏡が4枚あることから $\sqrt{4} = 2$ 倍し⁸，基線長 $L = 3\text{km}$ で規格化して，heat link から導入される地面振動による雑音の power spectrum

$$h_{\text{seismic(H.L.)}} = \frac{4.8 \times 10^{-19}}{f^2 |f^4 - 4f_l^2 f^2 + 2f_l^4|} / \sqrt{\text{Hz}} \\ \times \left(\frac{G_{\text{SPI}}}{10^{-2}} \right) \left(\frac{n}{30} \right) \left(\frac{k_{\text{H.L.}}}{9.7 \times 10^{-3} \text{N/m}} \right) \left(\frac{50\text{kg}}{M} \right) \left(\frac{50\text{cm}}{l} \right) \left(\frac{3\text{km}}{L} \right) \quad (6.13)$$

を得る．ここで， $G_{\text{SPI}} = 10^{-2}$ を仮定した．

次に heat link の熱雑音を考えよう．揺動散逸定理より heat link 1 本あたりに生じる揺動力の power spectrum は，

$$G_{F,\text{thermal}}(f) = 4k_{\text{B}}T \frac{k_{\text{H.L.}}\phi}{\omega} \quad (6.14)$$

となり⁹，heat link 全体ではこの n 倍になる．従って，鏡の変位雑音の power spectrum は，

$$\sqrt{G_{x_{\text{M}},\text{thermal}}(f)} = G_{\text{SPI}}|H| \sqrt{nG_{F,\text{thermal}}(f)} \quad (6.15)$$

となり，heat link の熱雑音の power spectrum

$$h_{\text{thermal(H.L.)}} = \frac{4.8 \times 10^{-22}}{f^{1/2} |f^4 - 4f_l^2 f^2 + 2f_l^4|} / \sqrt{\text{Hz}} \\ \times \left(\frac{n}{30} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_{\text{H.L.}}}{9.7 \times 10^{-3} \text{N/m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{11\text{K}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\phi}{3 \times 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(\frac{G_{\text{SPI}}}{10^{-2}} \right) \left(\frac{50\text{kg}}{M} \right) \left(\frac{50\text{cm}}{l} \right) \left(\frac{3\text{km}}{L} \right) \quad (6.16)$$

を得る¹⁰．

6.3.2 縦振動の光軸方向への coupling の影響

縦方向の振動を考え，それが鏡において光軸方向へ couple したときの影響を調べる，懸架系の共振周波数は非常に高いので，鏡の中段マスに対する防振比は1とし，また初段の張力は近似的に一定とする．すると，鏡と中段マスを併せた運動方程式

$$-2M\omega^2 \tilde{y} + \frac{nk_{\text{H.L.}}}{3} \tilde{y} = \tilde{F} \quad (6.17)$$

より，伝達関数は，

$$H(\omega) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{F}} = \frac{1}{2M} \frac{1}{-\omega^2} \quad (6.18)$$

となる．ただし，

$$\sqrt{\frac{nk_{\text{H.L.}}}{6M}} = 3 \times 10^{-2} \text{rad/s} \quad (6.19)$$

より，この項は無視した．

では，地面振動の導入を考えよう．神岡の地面振動の power spectrum として，

$$\sqrt{G_{\text{seismic}}(f)} = \frac{10^{-9}}{f^2} \text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (6.20)$$

⁸振幅の2乗平均が4倍になることに注意．

⁹C.3 参照．

¹⁰この計算においては，heat link の温度は $T = (T_1 + T_2)/2 = 11\text{K}$ で同様と近似した．

を用いれば、鏡の縦振動の power spectrum は、

$$\sqrt{G_{y,\text{seismic}}(f)} = |H| \frac{nk_{\text{H.L.}}}{3} \sqrt{G_{\text{seismic}}(f)} \quad (6.21)$$

となる．従って、縦振動の光軸方向への coupling constant を $C_{xy} = 10^{-2}$ と仮定すれば¹¹，地面振動の導入による縦振動が光軸方向へ couple することによる雑音の power spectrum

$$\begin{aligned} h_{\text{seismic(H.L.)}}^{\text{vertical}} &= \frac{1.6 \times 10^{-19}}{f^4} / \sqrt{\text{Hz}} \\ &\times \left(\frac{C_{xy}}{10^{-2}} \right) \left(\frac{n}{30} \right) \left(\frac{k_{\text{H.L.}}}{9.7 \times 10^{-3} \text{N/m}} \right) \left(\frac{50\text{kg}}{M} \right) \left(\frac{3\text{km}}{L} \right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

を得る．

次に heat link の熱雑音を考えよう．1 本当たりに生じる揺動力は、

$$G_{F,\text{thermal}}(f) = 4k_{\text{B}}T \frac{k_{\text{H.L.}}\phi}{3\omega} \quad (6.23)$$

となるから、鏡の縦振動の power spectrum は、

$$\sqrt{G_{y,\text{thermal}}(f)} = |H| \sqrt{nG_{F,\text{thermal}}(f)} \quad (6.24)$$

となる．従って、heat link の熱雑音による鏡の縦振動の光軸方向への couple によって生じる雑音の power spectrum

$$\begin{aligned} h_{\text{thermal(H.L.)}}^{\text{vertical}} &= \frac{2.8 \times 10^{-22}}{f^{5/2}} / \sqrt{\text{Hz}} \\ &\times \left(\frac{n}{30} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_{\text{H.L.}}}{9.7 \times 10^{-3} \text{N/m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{11\text{K}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\phi}{3 \times 10^{-3}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\frac{C_{xy}}{10^{-2}} \right) \left(\frac{50\text{kg}}{M} \right) \left(\frac{3\text{km}}{L} \right) \end{aligned} \quad (6.25)$$

を得る．

6.3.3 LCGT の default の感度曲線との比較

ここまで、水平面内で光軸と垂直な方向の振動が鏡で couple する影響については言及してこなかったが heat link のばね定数が光軸方向とほとんど変わらないこと [8]，補助干渉計による制御はできないが coupling constant は 10^{-2} 程度であることを考えれば、光軸方向の振動による雑音と同じ程度になると言える．

Heat link から導入される雑音 $h_{\text{seismic(H.L.)}}$, $h_{\text{thermal(H.L.)}}$, $h_{\text{seismic(H.L.)}}^{\text{vertical}}$, $h_{\text{thermal(H.L.)}}^{\text{vertical}}$ を plot し、LCGT の default の感度曲線と比較したのが図 6.2 である．これを見ると、heat link の熱雑音が全く問題にならないことは明らかである．ところが地面振動による雑音は大きく、特に縦振動が鏡で couple する影響により 3Hz 付近の感度が limit されてしまう可能性がある．また、神岡の地面振動が 10Hz において約 3 倍、100Hz において約 200 倍大きい測定例がある [2]．しかし、それを考えても感度に影響するのはせいぜい 10Hz 以下までと考えられるから、中性子星連星の合体を target とする、即ち観測帯域の下限を 20Hz 程度と考える限りにおいては問題ないと結論できる．

¹¹この値の妥当性は [10] を参照．

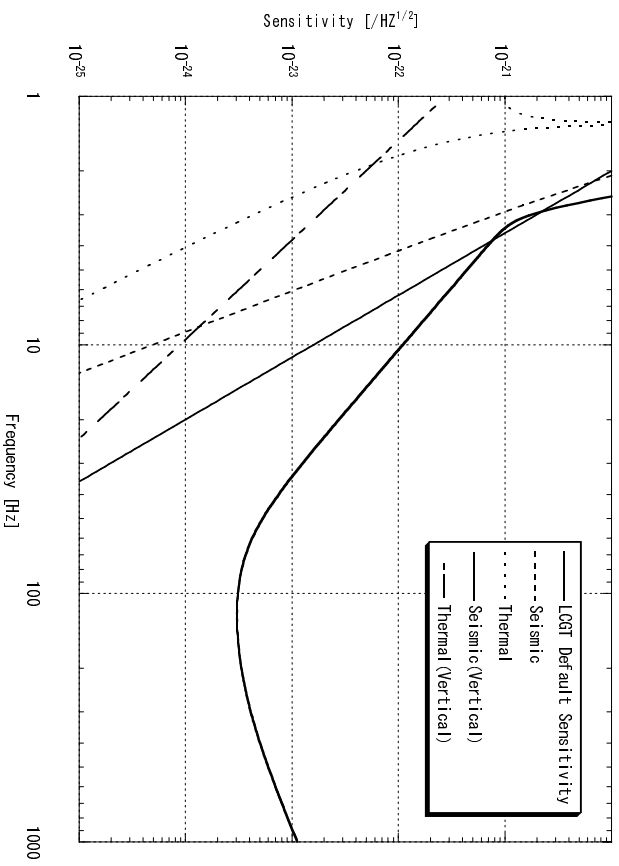


図 6.2: heat link から導入される雑音と LCGT の default の感度曲線

第7章 まとめ

7.1 本研究の成果のまとめ

本研究において heat link を構成する上で重要なことで明らかになったことからをまとめる．高純度の Al 及び Cu の低温における伝熱特性について

- 熱伝導率は純度では評価できないが RRR との間に対応関係を見出すことができる．
- RRR が 5000 程度あれば 10K 付近で熱伝導率は $2 \times 10^4 \text{W/m/K}$ 以上を期待できる．
- 直径 0.2mm 程度までの細さであれば size effect は認められない．
- 曲げによる熱抵抗の増加はせいぜい 10% 程度である．

高純度の Al 及び Cu の低温における機械的特性について

- 8K における Young 率は，Al が $4 \times 10^{10} \text{Pa}$ ，Cu が $13 \times 10^{10} \text{Pa}$ 程度であり，Al の方が柔らかい．
- 8K における loss angle は，Al が $3 \times 10^{-3} @ 1.6 \text{Hz}$ ，Cu が $6 \times 10^{-4} @ 1.7 \text{Hz}$ と大きい．Cu の方が散逸は小さいが熱雑音的にはどちらも大差ない．

以上の結果から RRR が 5000 程度の Al fiber を heat link の材料として選び構成した heat link の model について

- $\phi 0.50$ の fiber を 30 本用いれば十分な熱流を確保することができる．
- 上記の設定において導入される雑音について
 - Heat link の熱雑音が LCGT の感度を制限するようなことはない．
 - 地面振動の導入については，縦方向の振動が鏡で結合することにより 2-10Hz の感度を制限してしまう可能性がある．しかし，観測帯域 (20Hz-1kHz) に影響する可能性は少ない．

7.2 今後の課題

本研究により LCGT に heat link を導入する際に考えられていた困難の多くは解決されたと言える．しかし，次のようないくつかの残された課題がある．

- loss angle の周波数依存性が未知である．
- fiber の振動の高次 mode を考えていない．

熱雑音に関しては神経質になるほどの問題ではなかろうが、あといくつかの周波数で loss angle を測定しておけばより万全を期することができる。また、振動の高次 mode が中段マスを縦に揺らすような現象があるとこれは問題になる可能性がある。従って、これらのことをこの研究に続く課題としたい。

付録 A 金属の熱伝導

A.1 熱伝導率と平均自由行程

熱伝導のキャリアの比熱 C ，平均速度 v ，平均自由行程 l と熱伝導率 κ の間には，

$$\kappa = \frac{1}{3} C v l \quad (\text{A.1})$$

なる関係が成り立つ．

金属ではほとんどの温度領域において電子が熱伝導の主なキャリアになる．自由電子気体モデルによれば電子比熱は，電子質量 m ，Fermi 速度 v_F ，電子密度 n ，温度 T を用いて，

$$C_{\text{el}} = \frac{\pi^2 n k_B^2 T}{m v_F^2} \quad (\text{A.2})$$

となるから，

$$\kappa = \frac{\pi^2 n k_B^2 T}{3 m} \tau \quad (\text{A.3})$$

を得る．ただし，平均衝突時間 $\tau = l/v_F$ とした．

A.2 Wiedemann-Franz 則

金属の電気抵抗率は電気素量を e として，

$$\rho = \frac{m}{n e^2 \tau} \quad (\text{A.4})$$

で与えられるから，熱伝導率と電気抵抗率の間に

$$\kappa \rho = L T \quad (\text{A.5})$$

なる関係が成り立つ．これが Wiedemann-Franz 則である．ここに， L は Lorentz 数と呼ばれ，

$$L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 2.443 \times 10^{-8} \text{W}\Omega/\text{K} \quad (\text{A.6})$$

である．

ただし，Wiedemann-Franz 則は熱的な平均衝突時間と電氣的な平均衝突時間を等しいと仮定した上で成り立つ法則であるから，電子の平均自由行程が不純物濃度や格子欠陥のみで決まってしまう絶対零度付近，または格子の運動が十分に乱雑になる常温付近以上の温度領域でのみ成り立つ．逆に，この中間領域では成り立たない．

A.3 RRRの定義

絶対零度付近においてはフォノンはほとんど励起されていないから，電子の平均自由行程は不純物濃度や格子欠陥による波動関数の周期性の乱れによってのみ決まる．このことより金属のクオリティの評価には不純物濃度と格子欠陥の両方を含めた指標が必要になる¹．

絶対零度における電気抵抗率は波動関数の周期性の乱れによってのみ決まり，また常温における電気抵抗率はこのような不完全性にほとんど依らないことから，これらの比を指標として用い，RRR(Residual Resistance Ratio)と呼ぶ．ただし，絶対零度と液体 He 温度における電気抵抗率はほとんど変わらないので，RRR は実際的²には 300K と 4.2K における電気抵抗率の比として定義される．即ち，

$$\text{RRR} = \frac{\rho_{300\text{K}}}{\rho_{4.2\text{K}}} \quad (\text{A.7})$$

であり，この値が大きいほど電子の平均自由行程は長くなる．

A.4 低温における熱伝導率の予測値

低温における熱抵抗は，金属の格子の周期性の乱れによるものと，フォノンによる電子の大角度散乱が支配的である．これらによる熱抵抗率(熱伝導率の逆数) W への寄与を W_0, W_{ph} と書いておけば，

$$W = W_0 + W_{\text{ph}} \quad (\text{A.8})$$

となる．ここで，絶対零度付近ではフォノンによる寄与は消えるはずであるから，

$$W_{\text{ph}} \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow 0) \quad (\text{A.9})$$

である．従って，絶対零度付近での電気抵抗率がほぼ一定であることを考えれば，Wiedemann-Franz 則より，

$$W_0 = \frac{\beta}{T}, \quad \beta = \frac{\rho_{4.2\text{K}}}{L} = \frac{\rho_{300\text{K}}}{L} \frac{1}{\text{RRR}} \quad (\text{A.10})$$

となるはずである．また， W_{ph} は温度の 2-3 乗に比例することが知られている．

以上より，低温における金属の熱伝導率は，

$$\kappa = \frac{1}{\alpha T^n + \beta/T} \quad (\text{A.11})$$

の形で書かれる． α 及び n はフォノンによる散乱による factor であるから金属の種類のみによって決まってしまうと考えてよいだろう．従って，文献 [6] の recommended value をそのまま採用する．また，Al 及び Cu の室温における電気抵抗率として，

$$\rho_{300\text{K}}^{(\text{Al})} = 2.655 \times 10^{-8} \Omega\text{m}, \quad \rho_{300\text{K}}^{(\text{Cu})} = 1.673 \times 10^{-8} \Omega\text{m} \quad (\text{A.12})$$

を用いる．以上より，Al 及び Cu の熱伝導率の RRR に対応する予測値の計算式として，

$$\kappa^{(\text{Al})} = \frac{1}{1.83 \times 10^{-7} T^2 + 1.09/\text{RRR}/T} \text{W/m/K}, \quad (\text{A.13})$$

$$\kappa^{(\text{Cu})} = \frac{1}{6.41 \times 10^{-8} T^{2.4} + 0.685/\text{RRR}/T} \text{W/m/K} \quad (\text{A.14})$$

¹ 逆に言えば純度のみでは評価できない．

² 絶対零度における電気抵抗率を測定することは不可能である．

を得る。ただし、この式が成り立つのは 30K 付近までであり、それ以上の温度では他の要因が効いてきて RRR 依存性もなくなる、従って、その温度領域では文献 [6] の recommended value をそのまま採用することとする。

A.5 原理的に実現可能な RRR の上限値

前節までの議論から低温においては、

$$\text{RRR} \frac{LT}{\rho_{300\text{K}}} = \frac{1}{3} C_{\text{el}} v_{\text{F}} l \quad (\text{A.15})$$

が成り立つが、金属 fiber を考えたとき、電子の平均自由行程 l は fiber の直径 d より大きくなることはできない。従って、どんなに純度を上げ、格子欠陥を減らす努力をしても実現可能な RRR には上限値が存在してしまう。逆に言えばこの上限値より十分に小さい RRR であれば、直径による熱伝導率の依存性は存在しないと考えられる。

では、この上限値を計算しよう。Al に関しては、

$$\frac{C_{\text{el}}^{(\text{Al})}}{T} = 1.35 \times 10^2 \text{J/m}^3/\text{K}, \quad v_{\text{F}}^{(\text{Al})} = 2.02 \times 10^6 \text{m/s} \quad (\text{A.16})$$

より [11],

$$\text{RRR}_{\text{limit}}^{(\text{Al})} = 1.98 \times 10^4 \left(\frac{d}{0.2\text{mm}} \right) \quad (\text{A.17})$$

となり、Cu に関しては、

$$\frac{C_{\text{el}}^{(\text{Cu})}}{T} = 9.80 \times 10 \text{J/m}^3/\text{K}, \quad v_{\text{F}}^{(\text{Cu})} = 1.57 \times 10^6 \text{m/s} \quad (\text{A.18})$$

より [11],

$$\text{RRR}_{\text{limit}}^{(\text{Cu})} = 7.03 \times 10^3 \left(\frac{d}{0.2\text{mm}} \right) \quad (\text{A.19})$$

となる。ただし、以上の議論においては 300K 付近における電子の平均自由行程が直径により limit されるような状況は考えにいていない。従って、RRR ~ 1 のような状況下ではここで示した式は成り立たないことに注意されたい。

付録B fiberの弾性

B.1 弾性体 fiber を用いた振り子

図 B.1 のように一端を原点に clamp されていて, free である他端に集中力

$$F_x = F, F_z = T \quad (\text{B.1})$$

が働いている fiber(長さ l , 断面の慣性モーメント¹ I , Young 率 E) のつり合い状態における弾性曲線を考えよう. ただし棒の各点の変位 $X(z)$ は微小であるとする.

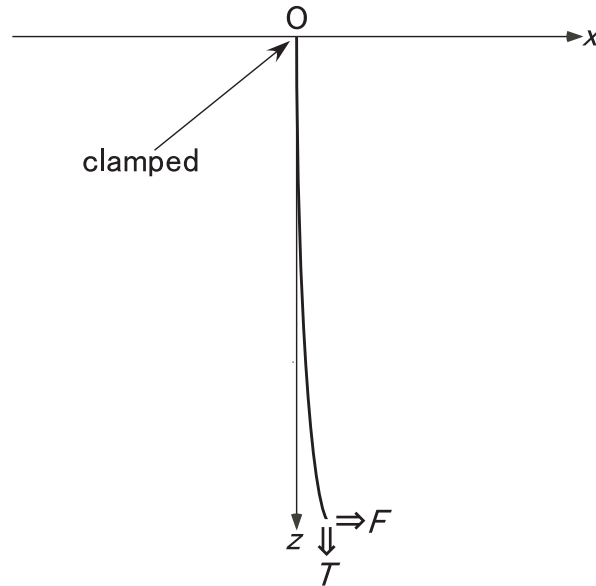


図 B.1: 弾性体 fiber を微小変形させたときの弾性曲線

棒内部における tension は一様に T であり, せん断力は,

$$F = -EIX''' + TX' \quad (\text{B.2})$$

で与えられる [12]. ここで, prime は z に関する微分を表す. これを境界条件

$$X''(l) = 0, X'(0) = 0, X(0) = 0 \quad (\text{B.3})$$

の下で解いて,

$$X(z) = \frac{F}{T} \left[z - \frac{\sinh \alpha z}{\alpha} + \frac{\tanh \alpha l}{\alpha} (\cosh \alpha z - 1) \right] \quad (\text{B.4})$$

¹直径 d の fiber においては $I = \pi d^4 / 2^6$ である.

を得る．ただし，

$$\alpha = \sqrt{\frac{T}{EI}} \quad (\text{B.5})$$

とおいた．従って，端点における変位は，

$$X(l) = \frac{F}{T} \left(l - \frac{\tanh \alpha l}{\alpha} \right) \quad (\text{B.6})$$

となるが，これは逆に端点を $X(l)$ だけ変位させたときに生じる復元力 F を定める式とみなすことができる．すると，復元力のばね定数は，

$$k = \frac{F}{X(l)} = \frac{T}{l - \tanh \alpha l / \alpha} \quad (\text{B.7})$$

で与えられる．特に tension の大きい極限 ($\alpha l \gg 1$) では，

$$k = \frac{T}{l} + \frac{\sqrt{TEI}}{l^2}, \quad (\text{B.8})$$

tension の小さい極限 ($\alpha l \ll 1$) では，

$$k = \frac{3EI}{l^3} \quad (\text{B.9})$$

となる．

この fiber の端点に質点 (質量 m) がとりつけられた振り子の復元力については $T = mg$ (g は重力加速度) とすればよい．このとき $E \rightarrow 0$ の極限では，

$$k \rightarrow \frac{mg}{l} \quad (\text{B.10})$$

となるが，これが重力による復元力の寄与とみなすことができる．従って，復元力のばね定数を重力の寄与による項と弾性力の寄与による項に分離すると，

$$k_{\text{grav}} = \frac{mg}{l}, \quad k_{\text{elas}} = \frac{mg}{l} \frac{\tanh \alpha l}{\alpha l - \tanh \alpha l} \quad (\text{B.11})$$

として，

$$k = k_{\text{grav}} + k_{\text{elas}} \quad (\text{B.12})$$

となる．このとき，

$$\alpha = \sqrt{\frac{mg}{EI}} \quad (\text{B.13})$$

である．

B.2 半円形状ばねのばね定数

図 B.2 のように変形前の形状が半円形状である弾性体 fiber のばね定数は， x, y 方向それぞれの変位に対して，

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2 EI}{\pi r^3} = \frac{1}{2^5} \frac{Ed^4}{r^3} \\ k_y &= \frac{2 EI}{3\pi r^3} = \frac{1}{3} k_x \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

で与えられる [13] ．

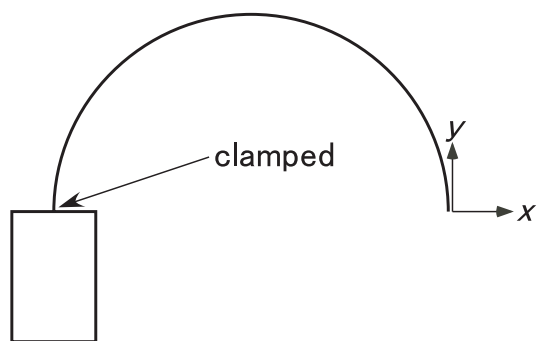


図 B.2: 半円形状ばね

付録C 散逸と熱雑音

C.1 散逸のある調和振動子

調和振動子の運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{C.1})$$

を Fourier 変換すると,

$$-m\omega^2\tilde{x} + k\tilde{x} = 0 \quad (\text{C.2})$$

となるが, これに散逸を導入するにはばね定数を複素ばね定数にして,

$$-m\omega^2\tilde{x} + k(1 + i\phi(\omega))\tilde{x} = 0 \quad (\text{C.3})$$

とすればよい. $\phi(\omega)$ は, loss angle と呼ばれ, 大抵の場合 $\phi \ll 1$ であり, $2\pi\phi$ が 1 周期におけるエネルギー損失の割合に対応する.

ここで, 2 つの代表的な散逸の model をあげておく. viscous damping model は速度に比例した減衰力がかかるという有名な model で, loss angle を

$$\phi(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0 Q} \quad (\text{C.4})$$

と与える. ここで, ω_0 は共鳴周波数である. structure damping model では, loss angle を

$$\phi(\omega) = \frac{1}{Q} \quad (\text{C.5})$$

と与える. これは散逸が周波数依存しないという model である. いずれの場合にも

$$Q = \phi(\omega_0)^{-1} \quad (\text{C.6})$$

であり. この値を Q-value と呼ぶ.

C.2 fiber の Q-value と pendulum mode の Q-value

振り子の運動方程式は,

$$m\ddot{x} + (k_{\text{grav}} + k_{\text{elas}})x = 0 \quad (\text{C.7})$$

である. これを Fourier 変換して loss angle を導入するのであるが, 重力によるエネルギーは散逸しないので k_{elas} のみ複素ばね定数にすると,

$$-m\omega^2\tilde{x} + k_{\text{grav}}\tilde{x} + k_{\text{elas}}(1 + i\phi)\tilde{x} = 0 \quad (\text{C.8})$$

となり，

$$-m\omega^2 \tilde{x} + (k_{\text{grav}} + k_{\text{elas}}) \left(1 + i \frac{k_{\text{elas}}}{k_{\text{grav}} + k_{\text{elas}}} \phi\right) \tilde{x} = 0 \quad (\text{C.9})$$

となるから，この振り子の”実効的な”loss angle は，

$$\phi_{\text{P}} = \frac{k_{\text{elas}}}{k_{\text{grav}} + k_{\text{elas}}} \phi \quad (\text{C.10})$$

となり，fiber 自体の Q-value Q と pendulum mode の Q-value Q_{P} は，

$$Q = \frac{k_{\text{elas}}}{k_{\text{grav}} + k_{\text{elas}}} Q_{\text{P}} \quad (\text{C.11})$$

なる関係にあることが分かる．ここで，復元力の potential energy はばね定数に比例することを考えると，pendulum mode では重力のエネルギーと弾性エネルギーの和のうち弾性エネルギーのみが散逸することにより，エネルギー損失の割合は減ってみえる，即ち Q-value は大きくなると理解することもできる [14] ．

C.3 調和振動子の熱雑音

散逸と揺動力をとりいれた調和振動子の運動方程式

$$-m\omega^2 \tilde{x} + k(1 + i\phi) \tilde{x} = \tilde{F} \quad (\text{C.12})$$

を考えよう．共鳴角周波数 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ を導入しておけば，この系の伝達関数は，

$$H(\omega) = \frac{\tilde{x}}{\tilde{F}} = \frac{1}{m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2(1 + i\phi)} \quad (\text{C.13})$$

で，機械的な impedance は，

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{F}}{i\omega \tilde{x}} = m \frac{-\omega^2 + \omega_0^2(1 + i\phi)}{i\omega} \quad (\text{C.14})$$

で与えられる．揺動散逸定理によれば，温度 T の熱浴中にある調和振動子に働く揺動力の power spectrum は，

$$G_F(f) = 4k_{\text{B}}T \text{Re}(Z) \quad (\text{C.15})$$

で与えられ，いまの場合には，

$$G_F(f) = \frac{4k_{\text{B}}T m \omega_0^2 \phi}{\omega} \quad (\text{C.16})$$

となる．従って，この揺動力によって生じる変位雑音の power spectrum は，

$$G_x(f) = |H|^2 G_F = \frac{4k_{\text{B}}T}{m\omega} \frac{\omega_0^2 \phi}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2} \quad (\text{C.17})$$

で与えられることになる．特に $Q \gg 1$ とし，structure damping を仮定すれば，

$$G_x(f) = \frac{4k_{\text{B}}T}{mQ\omega} \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4/Q^2} \quad (\text{C.18})$$

であり, $\omega \ll \omega_0$ で,

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{m\omega_0^2 Q} \frac{1}{\omega} \propto f^{-1} \quad (\text{C.19})$$

$\omega \gg \omega_0$ で,

$$G_x(f) = \frac{4k_B T \omega_0^2}{mQ} \frac{1}{\omega^5} \propto f^{-5} \quad (\text{C.20})$$

となる.

付録D 補足実験

Al 及び Cu fiber の Q-value 測定において，Q-value が clamp 部分に用いたスタイキャストで limit されていないか調べるために，直径 $250\mu\text{m}$ の sapphire fiber の 1 端をスタイキャストでクランプして，bending mode の Q-value を測定した．その結果を表 D.1 に示す．これは Al 及び Cu fiber の Q-value 測定における値より充分大きい．従って，Al 及び Cu fiber の Q-value 測定がクランプ部分のスタイキャストで limit されていた可能性は排除された．

表 D.1: Sapphire ϕ 0.25 fiber の Q-value

$T[\text{K}]$	f_{R}	Q
293	81.8	14300
78	82.6	35300
10	82.7	190000

関連図書

- [1] K.Kuroda et al.,*Japanese large-scale interferometers*,*Class.Quantum Grav.***19**,1237(2002).
- [2] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健,「重力波をとらえる」, 京都大学学術出版会 (1998).
- [3] J.Mizuno et al.,*Resonant sideband extraction: a new configuration for interferometric gravitational wave detectors*,*Phys.Lett.A***175**,273(1993).
- [4] 山元一広,「LCGT の目標感度 ver3.1」,unpublished(2002).
- [5] T.Tomaru et al.,*Maximum heat transfer along sapphire suspension fiber for a cryogenic interferometric gravitational wave detector*,*Phys.Lett.A***301**,215(2002).
- [6] Y.S.Touloukian et al.,*Metallic elements and alloys*,IFI/Plenum(1970).
- [7] W.Duffy Jr.,*Acoustic quality factor of aluminium and selected aluminium alloys from 50 mK to 300 K*,*Cryogenics***42**,245(2002).
- [8] 内山隆, private communication(2003).
- [9] 麻生洋一,「補助干渉計による Fabry-Perot 干渉計の安定化」, 東京大学修士論文 (2002).
- [10] 新井宏二,「基線長 300m レーザー干渉型重力波検出器のための懸架システムの開発」, 東京大学修士論文 (1996).
- [11] C.Kittel,「キッテル固体物理学入門(上)-第6版-」, 丸善 (1988).
- [12] L.Landau and E.Lifshitz,「弾性理論-増補新版-」, 東京図書 (1989).
- [13] ばね技術研究会,「ばねの設計-第2版-」, 丸善 (1978).
- [14] P.R.Saulson,*Thermal noise in mechanical experiments*,*Phys.Rev.D***42**,2437(1990).

あとがき

本研究は私にとって、物理学を志すものとしての第一歩ではありますが、人生にとっての大きな糧にもなりました。本研究を通じて関わることができた全ての人たちが私にとって各分野の先生であり、人生の偉大なる先輩でした（後輩もいましたが）。その人たちへの感謝の言葉を例を挙げて語るのはほとんど無意味かもしれませんが、敢えて特にお世話になったことがらを挙げていくことにします。

私の指導教官である教授の黒田和明先生は、この研究のテーマを与えてくださった張本人です。重力波検出という志高い分野の中で私が微力ながら貢献できる場を与えて下さり、またそのための協力を惜しまずになさって下さいました。そして、人として生きていく上での示唆に富んだ言葉も数多く頂きました。

助教授の大橋正健先生は、口数の少ない方ですが、たまに示して下さる「物理的な見方」はいつも心のどこかにあり私に大きな影響を与えていたと思います。

助手の三代木伸二さんは、怠けがちな私に喝を入れて下さるとともに、経過をいつも見守ってアドバイスを下さいました。

本研究の実験は高エネルギー加速器研究機構 (KEK) の低温工学センターにおいてさせて頂いたのですが、センター長でおられる新富孝和先生の協力なくしては本研究が成されることもなかったと思います。助手の鈴木敏一さん、研究員の都丸隆行さんには実験のノウハウを1から教えて頂くとともに、ときには徹夜で手伝って頂いたこともありました。また、センター所属の他の皆様にもご意見を頂いたり、実験器具を貸して頂くなど数多くのサポートをして頂きました。

重力波グループの大先輩である内山隆さんは、LCGT のデザインの中核をなす人であり、数え切れないアドバイスを頂きました。Heat link に関する具体的な事柄は内山さんとの議論がなければ決まらなかったと思います。

宇宙線研究所研究員である山元一広さんは、居室も一緒であり、また KEK での滞在期間も大分重なっていたりし、いつも意見をお伺いしました。特に熱雑音に関してたくさんのことを教えて頂きました。

重力波グループの大学院生である D1 の近藤寿浩さん、M1 の徳成正雄さん、既に卒業された奥富聡さん、辻勲さん、林直人さん達がいなければ研究生活はもっと孤独で辛いものになってしまったでしょう。彼らは良き先輩、後輩であると共に、良き友人です。

これ以上挙げはじめたら切りがないですが、学部時代の同級生や特に高校時代の友人たち、音楽仲間、アルバイト先の人たち、そして家族がいつも支えてくれたことは忘れてはならないことです。

他にも数多くの力添えがあって、私は研究を行い、そして生きていくことができることは疑いようがありません。心から感謝しています。それと同時にこれからも変わらないご指導とご助力を頂けるようお願い致します。この修士論文の締めくくりにしたいと思います。本当に有難うございました。