

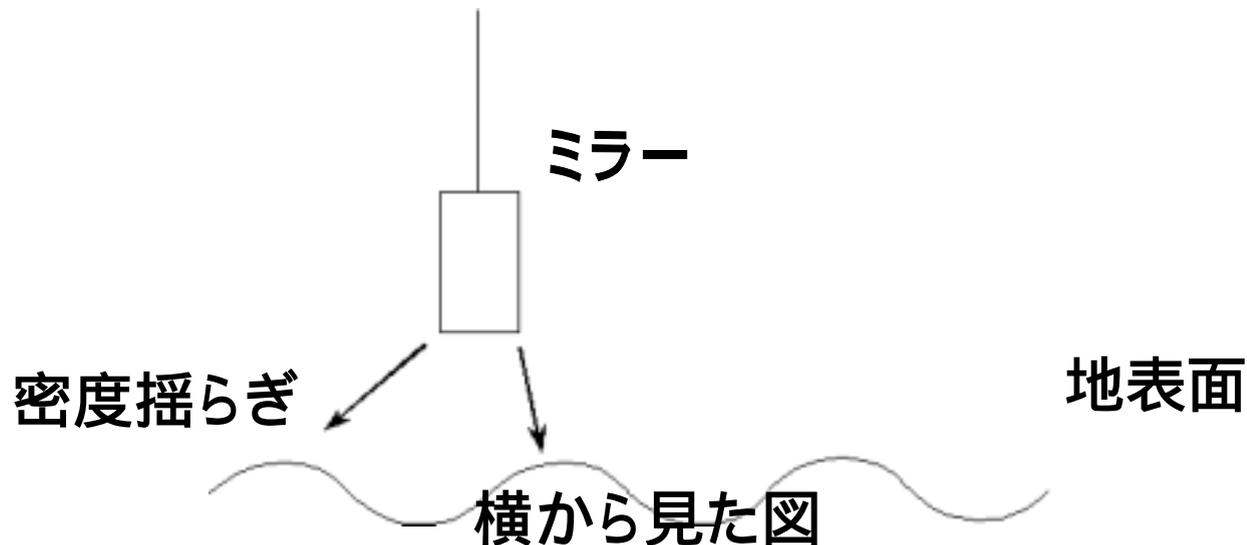
重力場ノイズ見積もり

- 地盤の密度揺らぎ起因の万有引力によるミラー変位を計算

Seismic gravity-gradient noise

in interferometric gravitational-wave detectors

PRD, Vol.58 (1998)



計算概略

- ・地面振動からアーム長変動への伝達関数を計算
 - 等方均質地盤モデルでの表面波
 - 密度変動
 - ミラーの受ける引力
 - アーム長変動スペクトル
 - 地面振動スペクトルで規格化
- ・求めた伝達関数 × 地面振動スペクトル実測値
= 予想重力場ノイズスペクトル

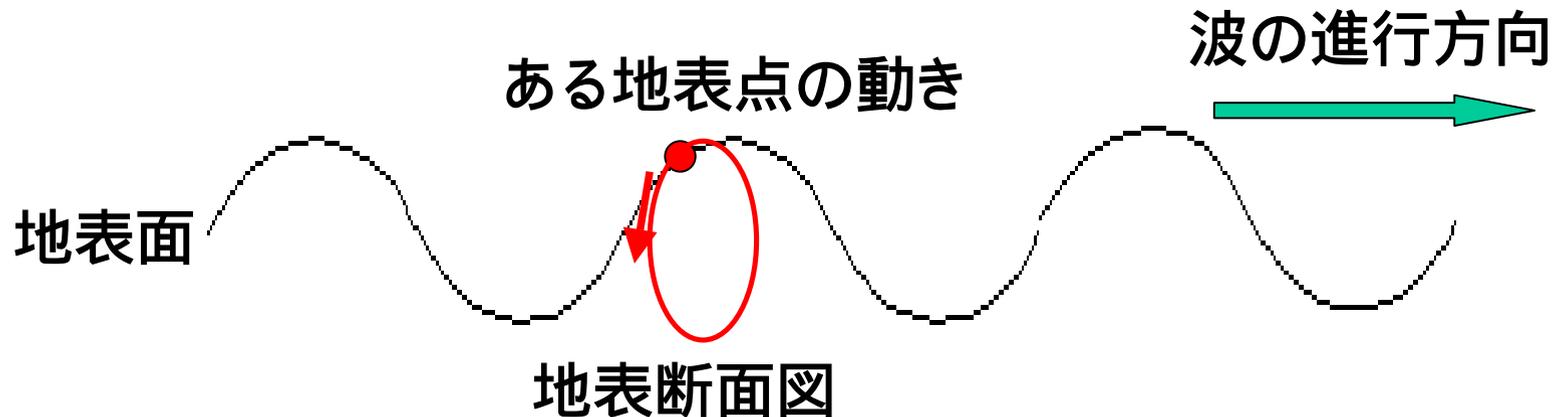
地盤モデル

地盤モデル

等方均質な半無限弾性体

表面波(レーリー波)

進行方向に平行な鉛直面内で振動



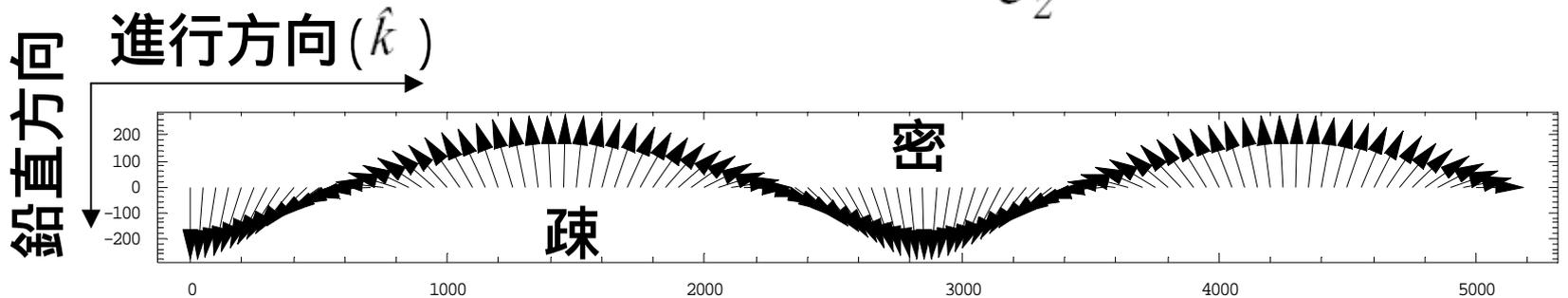
レーリー波

地表面変位ベクトル

$$\vec{\xi}(z=0) = (\xi_H \hat{k} - \xi_V \vec{e}_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

進行方向成分 (縦波) 鉛直方向成分 (横波)

\hat{k} : 進行方向単位ベクトル
 \vec{e}_z : 鉛直下向き単位ベクトル



地表の動き (断面図)

1Hzで波長3km
(レーリー波速度3km/s

振幅は深さに対して指数的に減少

@神岡)

$$V=f$$

密度揺らぎ

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \sum_k [\underbrace{\xi_V}_{\text{地表}}\delta(z) + \underbrace{R(z)}_{\text{地中}}] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\delta\rho(z>0)}{\rho} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} = \mathcal{R}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \\ \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial}{\partial z} \xi_z dz = \xi_z(\delta) \rightarrow \xi_z(0) \end{array} \right)$$

ρ : 地盤密度 (定数)
 $\delta\rho$: 波動がある時の密度

大きさ k - $k/2 \sim k+$ $k/2$ であらゆる方向の \vec{k} で和をとる

地盤以外の空間は $=0$ としている

密度変動によってミラーが受ける光軸方向の引力

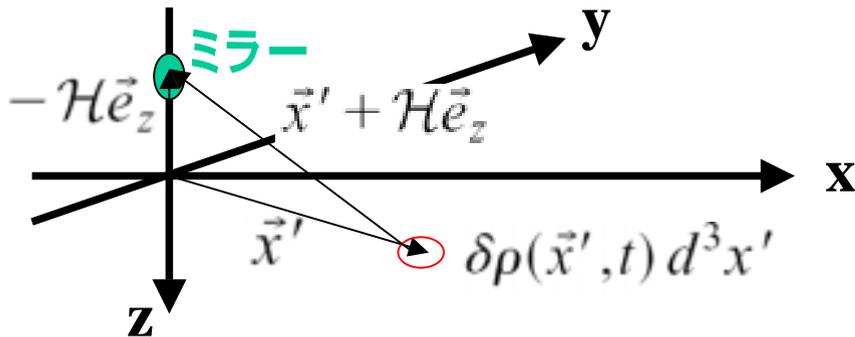
$$F_{\hat{m}}(t) = - \int_{Z=0 \text{ の全領域で積分}} d^3x' \frac{(\vec{x}' \cdot \hat{m}) G \delta\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x}' + \mathcal{H}\vec{e}_z|^3} \times M$$

\hat{m} : 光軸方向 (水平方向)

G : 万有引力定数 $6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

M : ミラー質量

\mathcal{H} : ミラー高さ



密度変動によってミラーが受ける光軸方向の引力

$$\begin{aligned} F_{\hat{m}} &= - \sum_{\vec{k}} (\hat{m} \cdot \hat{k}) 2\pi i G \rho e^{-i\omega t} e^{-k\mathcal{H}} \\ (t) & \times \left(\xi_V + \int_0^\infty \mathcal{R}(z') e^{-kz'} dz' \right) \times M \end{aligned}$$

ミラーへの力 ミラー変位 伝達関数

$$\delta \vec{x} \cdot \hat{m} \approx - \frac{F_{\hat{m}}(f)}{M\omega^2} \quad (\text{多段振り子剛体共振周波数以上の領域})$$

光軸方向ミラー変位

アーム長変動

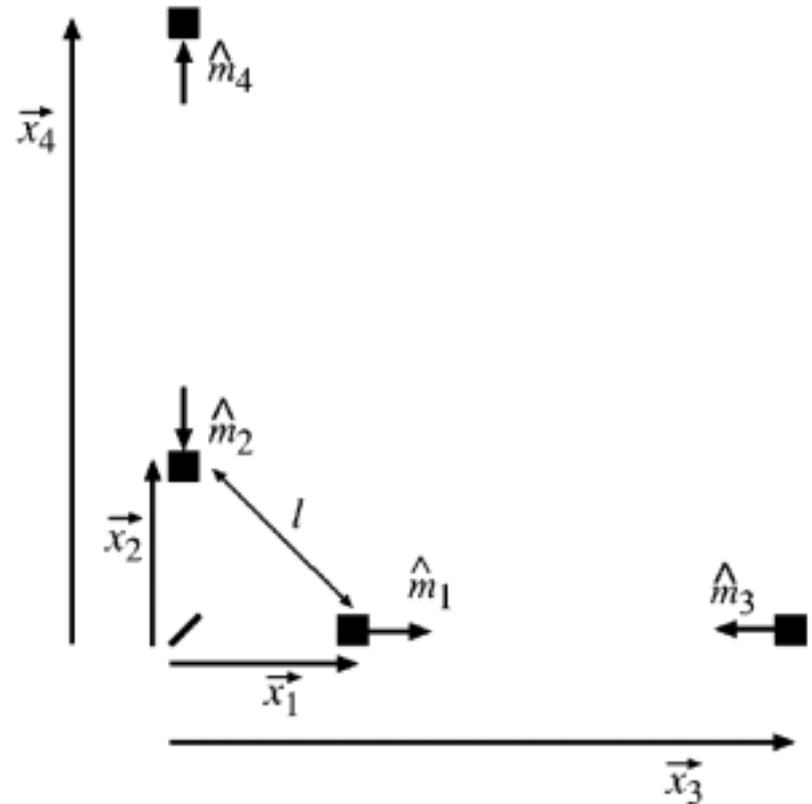
各ミラーの光軸方向変位

$$\delta \vec{x}_j \cdot \hat{m}_j = \sum_{\vec{k}} \frac{(\hat{k} \cdot \hat{m}_j) 2\pi i G \rho e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_j - \omega t)} e^{-k\mathcal{H}}}{\omega^2} \times \left(\xi_V + \int_0^\infty \mathcal{R}(z') e^{-kz'} dz' \right)$$

(j = 1, 2, 3, 4)

$$x(t) = \sum_{j=1}^4 \delta \vec{x}_j \cdot \hat{m}_j$$

x(t): アーム長変動



アーム長変動スペクトル

$$\tilde{x}^2(f) \Delta f = \frac{(2\pi G\rho)^2}{\omega^4} e^{-2k\mathcal{H}}$$

$$\times \sum_{\Delta k} \left| \xi_V + \int_0^\infty \mathcal{R}(z') e^{-kz'} dz' \right|^2 J_k$$

$$J_k = \sum_{\hat{k}} [(\hat{k} \cdot \hat{m}_1)^2 + (\hat{k} \cdot \hat{m}_2)^2 + (\hat{k} \cdot \hat{m}_3)^2 + (\hat{k} \cdot \hat{m}_4)^2] = 2N_k$$

各ミラーの動きは互いに無相関と仮定

$$\left(\begin{array}{c} \hat{m} \\ \hat{k} \end{array} \right) \sum_{\hat{k}} (\hat{k} \cdot \hat{m})^2 = \sum_{\hat{k}} \cos^2 \theta = \sum_{\hat{k}} \frac{1}{2} = \frac{N_k}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \right)$$

地面振動パワースペクトル

$$\vec{\xi}(z=0) = (\xi_H \hat{k} - \xi_V \vec{e}_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}^2(f) \Delta f = \sum_{\vec{k}} |\xi_H|^2 (\hat{k} \cdot \hat{n})^2 = |\xi_H|^2 \frac{N_{\Delta k}}{2} \\ \tilde{Z}^2(f) \Delta f = \sum_{\vec{k}} |\xi_V|^2 = |\xi_V|^2 N_{\Delta k} \end{array} \right.$$

地面振動パワースペクトル

$$\tilde{W}^2 \Delta f = (2\tilde{X}^2 \Delta f + \tilde{Z}^2 \Delta f) / 3 = \frac{|\xi_H|^2 + |\xi_V|^2}{3} N_{\Delta k}$$

伝達関数

$$T(f) \equiv \frac{\tilde{x}(f)}{\tilde{W}(f)} = \frac{4\pi G\rho}{(2\pi f)^2} e^{-k\mathcal{H}} \beta'(f)$$

$$\beta'(f) = \sqrt{\frac{3/2}{|\xi_H|^2 + |\xi_V|^2}} \left| \xi_V + \int_0^\infty \mathcal{R}(z') e^{-kz'} dz' \right|$$

レイリー波の場合

$$\beta' = \sqrt{\frac{3(1+s^2-2q)^2}{2(1+s^2)[(1+s^2)(1+q^2)-4qs]}} \quad q = \sqrt{1-(c_H/c_P)^2}, \quad s = \sqrt{1-(c_H/c_S)^2}$$

c_H : レイリー波速度 2900m/s

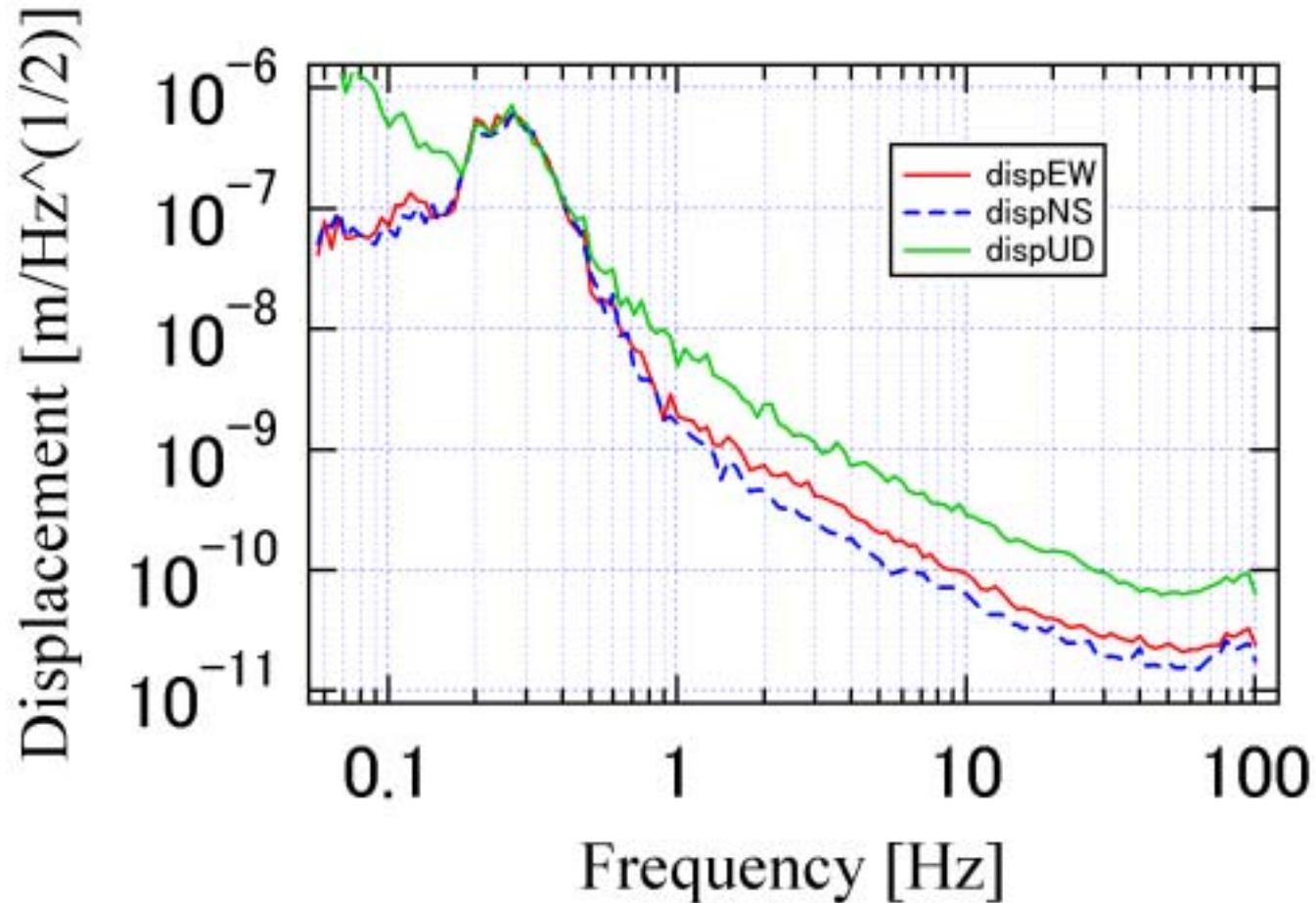
c_P : P波速度 5500m/s

c_S : S波速度 3100m/s

@神岡

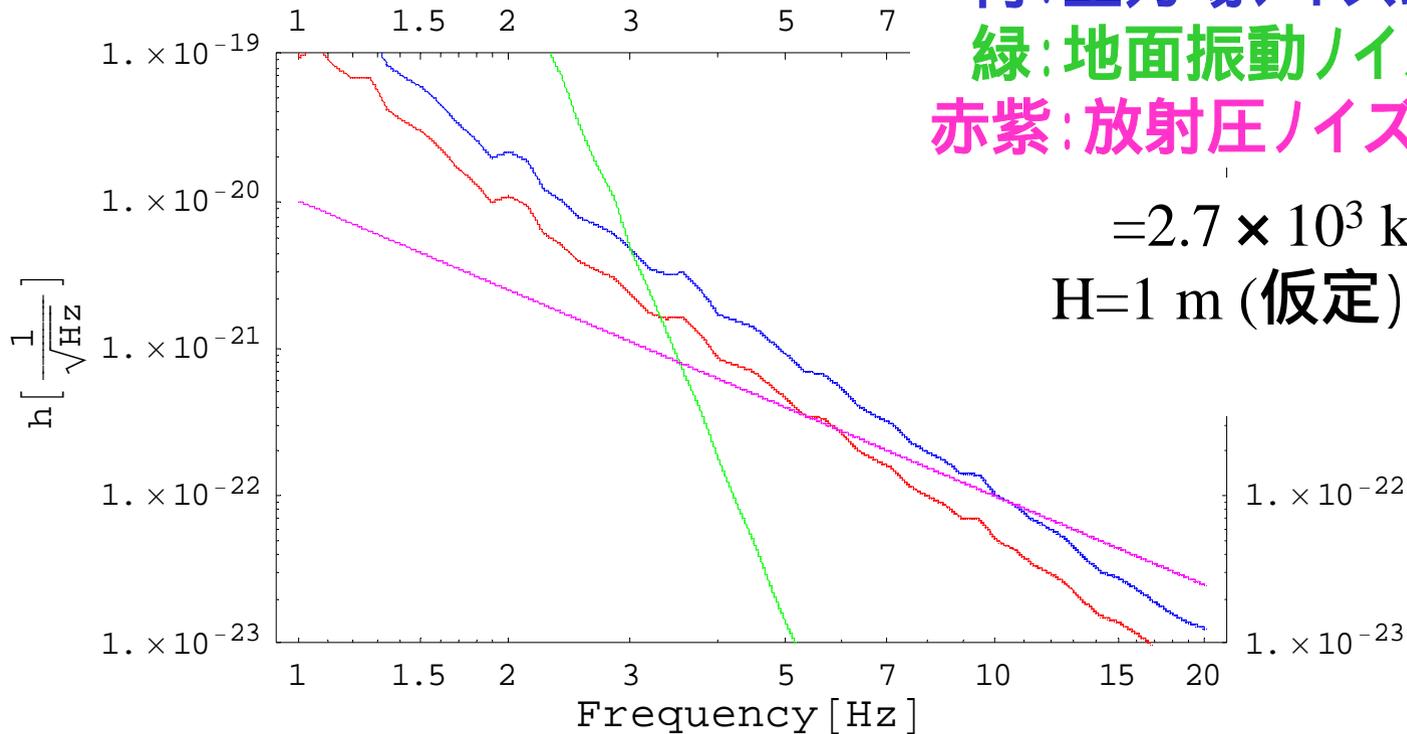
'=0.78

神岡地面振動スペクトル



重力場ノイズ見積もり

赤: 重力場ノイズ(無相関)
青: 重力場ノイズ最悪の場合
緑: 地面振動ノイズ
赤紫: 放射圧ノイズ



$= 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ @ 神岡

H=1 m (仮定)

まとめ

- ・単純モデル計算からすると、重力場ノイズが他のノイズを上回る可能性がある。

不確かな点

- ・モデルの妥当性
- ・地盤以外での密度変動
(近くのトンネル内での物体の移動)